MAT5711 – Cálculo Avançado – Exame Final

Prof. Claudio Gorodski

26/06/2017

Escolher cinco questões. Cada questão vale 2 pontos.

Questão 1 Considere a equação

$$x^2z^5 + 2y^2z^3 + z - 1 = 0$$

em $\mathbb{R}^3$.

a. Mostre que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe um único $z \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação.

b. Mostre que a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assim definida é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Calcule o polinômio de Taylor de grau 2 de φ em $(0, 0)$.

Questão 2 *a.* Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ definida num aberto U de $\mathbb{R}^3$. Mostre que se $x_0 \in U$ é um ponto de máximo local de f então $\nabla f(x_0) = 0$.

b. Sendo U como em (a), seja $F : U \to \mathbb{R}^2$ uma submersão de classe $\mathcal{C}^\infty$ e seja $K \subset U$ um subconjunto compacto. Mostre que o valor máximo de $f = ||F||$ em K é atingido na fronteira (topológica) ∂K.

Questão 3 Sejam $B \subset \mathbb{R}^m$ um bloco fechado e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa integrável com $\int_B f = 0$.

a. Sendo $n = 1, 2, \ldots$, mostre que

$$B_{1/n} = \{x \in B \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$$

tem conteúdo nulo.

b. Mostre que

$$B_0 = \{x \in B \mid f(x) > 0\}$$

tem medida nula.

Questão 4 Seja $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 2y & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demonstre que f não é integrável. (Sugestão: Teorema de Fubini.)

Questão 5 Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ definida num aberto U de $\mathbb{R}^2$ contendo o disco unitário D^2, e suponha que $f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 1$ para todo $(x, y) \in U$, onde $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

a. Mostre que

$$\int_{S^1} f\,dg - g\,df = 0$$

onde S^1 é a fronteira de D^2. (Sugestão: Teorema de Stokes.)

b. Conclua que não se pode ter $\varphi|_{S^1} = \text{id}$.

Questão 6 *a.* Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ funcionais lineares num espaço vetorial real de dimensão finita V. Mostre que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = 0$ se e somente se $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ são linearmente dependentes.

b. Seja ω uma 1-forma de classe $\mathcal{C}^\infty$ definida num aberto U de $\mathbb{R}^3$ com $\omega_{(x,y,z)} \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in U$. Dada uma 1-forma α de classe $\mathcal{C}^\infty$ em U com $\omega \wedge \alpha = 0$ em U, mostre que existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\alpha = f\,\omega$.

Questão 7 Sejam $\omega = xz\,dx + yz\,dy - z^2\,dz$ 1-forma e M o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$.

a. Mostre que $x\,dx + y\,dy = z\,dz$ em vetores tangentes a M.

b. Mostre que para todo círculo S^1 mergulhado em M (sem auto-intersecções) vale $\int_{S^1} \omega = 0$. (Sugestão: Calcular $d\omega$ em M e calcular a integral para um círculo num plano $z = \text{cte}$..)