1. (a)f é contínua e para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos $\lim_{z\to\pm\infty} f(x,y,z) = \pm\infty$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = 0$.
$\frac{\partial f}{\partial z} = 5x^2z^4 + 6y^2z + 1 > 0$; para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ f é estritamente crescente como função de z, logo existe um único $z \in \mathbb{R}$ com $f(x,y,z) = 0$.
(b) Como f é $\mathcal{C}^\infty$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ nunca se anula, para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ temos pelo Teorema da Função Implícita que a equação $f(x,y,z) = 0$ define z como função de classe C^∞ de (x,y) numa vizinhança de $(x_0, y_0, \varphi(x_0,y_0))$. Essas funções localmente defiidas são restrições de φ pela unicidade da parte (a) e assim φ é $\mathcal{C}^\infty$.
(c) Note que $\varphi(0,0) = 1$. Derivando $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ implicitamente repetidamente obtemos:

$$f_x + f_z\varphi_x = 0, \quad f_y + f_z\varphi_y = 0,$$

ou

$$2xz^5 + (5x^2z^4 + 6y^2z + 1)\varphi_x = 0, \quad 4yz^3 + (5x^2z^4 + 6y^2z + 1)\varphi_y = 0,$$

e em $(x,y) = (0,0)$:

$$0 + 1\varphi_x = 0, \quad 0 + 1\varphi_y = 0,$$

logo $\varphi_x(0,0) = \varphi_y(0,0) = 0$. Novamente

$$f_{xx} + f_{xz}\varphi_x + (f_{zx} + f_{zz}\varphi_x)\varphi_x + f_z\varphi_{xx} = 0$$

$$f_{xy} + f_{xz}\varphi_y + (f_{zy} + f_{zz}\varphi_y)\varphi_x + f_z\varphi_{xy} = 0$$

$$f_{yy} + f_{yz}\varphi_y + (f_{zy} + f_{zz}\varphi_y)\varphi_y + f_z\varphi_{yy} = 0$$

Em $(0,0)$:

$$2 + 1\varphi_{xx} = 0, \quad 0 + 1\varphi_{xy} = 0, \quad 4 + 1\varphi_{yy} = 0.$$

Logo o polinômio desejado é

$$p(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(-2x^2 - 4y^2) = 1 - x^2 - 2y^2.$$

2. (a) Seja $v \in \mathbb{R}^3$. Para t suf. pequeno

$$\frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \geq 0, & t > 0 \\ \leq 0, & t < 0 \end{cases}$$

Logo $\nabla f(x_0) \cdot v = Df(x_0)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$ é simultaneamente ≥ 0 e ≤ 0 logo nulo.
(b) Por ser submersão, F é aplicação aberta e assim f não é identicamente nula. Temos $F = (F_1, F_2)$ e x_0 é ponto de máximo local de f se e somente se é ponto de máximo local de f^2. Temos $\nabla(f^2) = 2F_1\nabla F_1 + 2F_2\nabla F_2$. Por (a), se x_0 é ponto de máximo local de f^2 então $\nabla F_1(x_0)$, $\nabla F_2(x_0)$ é l.d. Mas F é submersão em U, portanto não pode haver ponto de máximo local de f em U. Como o interior de K está contido em U, o valor máximo de f em K é atingido na fronteira de K.
3. (a) $0 \leq \sup_P\{L(f,P)\} = \underline{\int}_B f = \int_B f = 0$ implica $L(f,P) = 0$ para toda P.
Dado $\epsilon > 0$ existe P tal que $0 \leq U(f,P) < \frac{\epsilon}{n}$
$U(f,P) = \sum_{S\in P} M_S(f)v(S) \geq \sum_{S\cap B_{1/n}\neq\varnothing} \frac{1}{n}v(S)$ implica $\mathcal{S} = \{S \in P | S \cap B_{1/n} \neq \varnothing\}$ é cobertura finita de $B_{1/n}$ com $\sum_{S\in\mathcal{S}} v(S) < \epsilon$.
(b) $B_0 = \cup_{n=1}^\infty B_{1/n}$ união enumerável de conjuntos de conteúdo nulo. Logo B_0 tem medida nula.
4. Seja $f_y(x) = f(x,y)$. Como $\mathbb{Q}$ e $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $[0,1]$,

$$\mathcal{L}(y) = \underline{\int_0^1} f_y = \begin{cases} 1, & y \geq 1/2 \\ 2y, & y \leq 1/2. \end{cases}$$

e assim

$$\int_0^1 \mathcal{L} = \int_0^{1/2} 2y\,dy + \int_{1/2}^1 1\,dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Por outro lado

$$\mathcal{U}(y) = \overline{\int_0^1} f_y = \begin{cases} 2y, & y \geq 1/2 \\ 1, & y \leq 1/2. \end{cases}$$

e assim

$$\int_0^1 \mathcal{U} = \int_0^{1/2} 1\,dy + \int_{1/2}^1 2y\,dy = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Se f fôsse integrável, pelo Teorema de Fubini teríamos que

$$\int_0^1 \mathcal{L} = \int_{[0,1]^2} f = \int_0^1 \mathcal{U}$$

mas não é o caso.
5. (a)

$$\int_{S^1} f\,dg - g\,df = \int_{S^1} \varphi^*\left(\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}\right) = \int_{D^2} d\varphi^*\left(\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}\right) = \int_{D^2} \varphi^* d\left(\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}\right) = \int_{D^2} \varphi^*(0) = 0,$$

usando o Teorema de Stokes.
(b) Se $\varphi = \mathrm{id}$ em S^1 então

$$\int_{S^1} f\,dg - g\,df = \int_{S^1} x\,dy - y\,dx = 2\int_{D^2} dx \wedge dy = 2\mathrm{area}(D^2) = 2\pi$$

contradizendo (a).
6. (a) Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ são l.d. então um deles, digamos φ_k, é combinação linear dos demais, $\varphi_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i\varphi_i$ com $a_i \in \mathbb{R}$. Então

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i\left(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k-1}\right) \wedge \varphi_i = 0$$

pois $\varphi_i \wedge \varphi_i = 0$.
Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ são l.i. então completamos a uma base $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de V^* e tomamos a base dual $v_1, \ldots, v_n$ de V. Agora

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, \ldots, v_k) = \frac{k!}{1! \cdots 1!}\frac{1}{k!}\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\varphi_{\sigma(1)}(v_1)\cdots\varphi_{\sigma(k)}(v_k) = 1$$

pois

$$\varphi_{\sigma(1)}(v_1)\cdots\varphi_{\sigma(k)}(v_k) = \begin{cases} 1 & \sigma = \mathrm{id} \\ 0 & \sigma \neq \mathrm{id}. \end{cases}$$

(b) Por (a), $\alpha_{(x,y,z)} = f(x,y,z)\omega_{(x,y,z)}$ onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Como α e ω são $\mathcal{C}^\infty$ em U, $\alpha = adx + bdy + cdz$ e $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ com a, b, c, A, B, $C : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$. Temos $a = fA$, $b = fB$, $c = fC$ em U. Como ω não se anula em nenhum ponto e é contínua, todo ponto de U admite uma vizinhança onde A ou B ou C nunca se anula, e nessa viz podemos escrever $f = a/A$ ou $f = b/B$ ou $f = c/C$. Logo f é $\mathcal{C}^\infty$.
7. (a) $M = f^{-1}(1)$ onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e 1 é valor regular.
$T_{(x,y,z)}M = \ker Df(1) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | 2xa + 2yb - 2zc = 0\}$, assim $(a,b,c) \in T_{(x,y,z)}M$ implica $(xdx + ydy)(a,b,c) = xa + yb = zc = zdz(a,b,c)$ como desejado.
(b) $d\omega = xdz \wedge dx + ydz \wedge dy = dz \wedge (xdx + ydy) = dz \wedge (zdz) = 0$ em M.
Se S^1 limita um disco D^2 em M então $\int_{S^1} \omega = \int_{D^2} d\omega = 0$.
Caso contrário, existe um círculo $(S^1)'$ em M com $z = z_0$ tal que S^1 e $(S^1)'$ são as componentes de bordo de um cilindro N em M. Temos$\int_{S^1} \omega - \int_{(S^1)'} \omega = \int_N d\omega = 0$ então

$$\int_{S^1} \omega = \int_{(S^1)'} \omega = z_0 \int_{(S^1)'} xdx + ydy = \frac{z_0}{2}\int_{(S^1)'} d(x^2 + y^2) = \frac{z_0}{2} \cdot 0 = 0.$$

Alternativa
$\omega = z(xdx + ydy) - z^2dz = z(zdz) - z^2dz = 0$ em M usando a parte (a), logo $\int_{S^1} \omega = 0$.