1. Mostrar que as três equações

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 &= 2 \\ xy - \sin u \cos v + z &= 0 \end{aligned}$$

definem unicamente x, y, z como funções de u, v numa vizinhança de $(u,v) = (\pi/2, 0)$ a valores numa vizinhança de $(x,y,z) = (1,1,0)$, e calcular as derivadas parciais $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$, $\partial y/\partial v$, $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$ nesse ponto.

2. Mostre que as raízes simples de um polinomio real

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

de grau $n > 0$ dependem suavemente dos coeficientes do polinômio. Mais precisamente, se x_0 é uma raiz simples de p então x_0 é uma função suave, localmente definida, dos coeficientes de p. O que acontece com raízes múltiplas?

3. Identificamos o espaço $M_n(\mathbf{R})$ das matrizes reais $n \times n$ com $\mathbf{R}^{n^2}$, onde $n \geq 1$.

a. Mostre que a função $f : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ dada por $f(A) = A^2$ é de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Calcule $Df(I)$ onde I denota a matriz identidade.

c. Deduza que toda matriz B suficientemente próxima de I admite pelo menos duas raiz quadradas, cada uma das quais sendo uma função de classe $\mathcal{C}^1$ de B. Podem existir mais de duas raízes quadradas?

4. Seja $f : [0,2] \to (0, +\infty)$ uma função contínua tal que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt = 1.$$

Mostre que existe uma função $g : [0,1] \to [0,2]$, de classe $\mathcal{C}^1$ em $(0,1)$, tal que

$$\int_x^{g(x)} f(t)\,dt = 1.$$