# EXERCÍCIOS, 3.ª PARTE

16/02/22

**Obs.** Sejam $T \in \mathcal{L}(V)$ $(\dim V < \infty)$ e $B, B'$ duas bases de $V$. Qual é a relação entre

$$[T]_B \quad \text{e} \quad [T]_{B'} \; ?$$

$$[T]_B = [T]_B^B \qquad [T]_{B'} = [T]_{B'}^{B'}$$

$B : v_1, \dots, v_n$ $\qquad$ $B' : u_1, \dots, u_n$

$(n = \dim V)$

$$A = (a_{ij}) = [T]_B^B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Tv_1 & \cdots & Tv_j & \cdots & Tv_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Big[\;\Big] & \cdots & \Big[\;\Big] & \cdots & \Big[\;\Big] \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \qquad C = [T]_{B'}^{B'} = (c_{ij})$$

$$(1) \quad Tv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$$(2) \quad Tu_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i \qquad j = 1, \dots, n$$

Escrevamos cada elemento da base $B$ na base $B'$: $\qquad M := (m_{ij})$

$$(3) \quad Iv_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} u_k \qquad i = 1, \dots, n$$

Substituindo (2), (3) em (1) em ambos os membros:

~~e comparando com (2):~~

$$T v_j = \sum_{i=1} a_{ij} v_i \qquad T u_j = \sum_{i=1} c_{ij} u_i$$

$$T\left(\sum_k m_{kj} u_k\right) = \sum_i a_{ij}\left(\sum_k m_{ki} u_k\right)$$

$$\sum_k m_{kj} \underline{T u_k} = \sum_{i,k} m_{ki} a_{ij} u_k$$

$$\sum_k m_{kj} \sum_i c_{ik} u_i = \sum_{i,k} m_{ki} a_{ij} u_k$$

$k \leftrightarrow i$

$$\sum_{i,k} m_{ij} c_{ki} \underline{u_k} = \sum_{i,k} m_{ki} a_{ij} \underline{u_k}$$

$$\sum_k \left(\sum_i c_{ki} m_{ij}\right) \underset{=}{u_k} = \sum_k \left(\sum_i m_{ki} a_{ij}\right) \underset{=}{u_k}$$

$$\therefore \sum_i c_{ki} m_{ij} = \sum_i m_{ki} a_{ij}$$

$$\boxed{C M = M A}$$

$M$ = matriz de mudança de base de $B$ para $B'$

$$A = [T]^{B}_{B} \qquad C = [T]^{B'}_{B'}$$

$M$ é invertível, pois $M^{-1}$ é a matriz de mudança de base de $B'$ para $B$.

$$C = M A M^{-1}$$

$$[T]^{B'}_{B'} = [I]^{\cancel{B}}_{\cancel{B'}} [T]^{\cancel{B}}_{\cancel{B}} [I]^{B'}_{\cancel{B}}$$

$$\underline{M = [I]^{B}_{B'}} \qquad M^{-1} = [I]^{B'}_{B}$$

—//—

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ $\qquad$ $B_V, B'_V$ base de $V$

$B_W, B'_W$ base de $W$

Qual é a relação entre $[T]^{B_V}_{B_W}$ e $[T]^{B'_V}_{B'_W}$?

$$[T]^{B'_V}_{B'_W} = [I]^{B_W}_{B'_W} [T]^{B_V}_{B_W} [I]^{B'_V}_{B_V}$$

$$= [I]^{B_W}_{B'_W} [T]^{B_V}_{B_W} \left([I]^{B_V}_{B'_V}\right)^{-1}$$

Caso mais usado: $V = W$, $\underbrace{B_V = B_W}_{=B}$, $\underbrace{B'_V = B'_W}_{=B'}$

$$\underbrace{[T]_{B'}^{B'}}_{=A} = [I]_{B'}^{B}\,[T]_{B}^{B}\,[I]_{B}^{B'}$$

$$= \underbrace{[I]_{B'}^{B}}_{=M}\;\underbrace{[T]_{B}^{B}}_{=C}\;\underbrace{[I]_{B'}^{B}}_{=M^{-1}}$$

$$\boxed{A = MCM^{-1}}$$

Dizemos que as matrizes $A$ e $C$ são <u>semelhantes</u> ou <u>conjugadas</u>.

$$[T]_{can}^{can} = [I]_{can}^{B}\,[T]_{B}^{B}\,[I]_{B}^{can}$$

$$AM = MC$$

Em particular: Suponhamos $A = [T]_{can}$ onde $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$

e $C = [T]_B$ é diagonal, onde $B$ é uma base de $V$ formada por autovetores de $T$. Então

$$M = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

onde $v_1, \dots, v_n$ são os autovetores de $T$ expressos na base canônica. Agora $Tv_j = \lambda_j v_j$ onde $\lambda_j$ é o autovalor correspondente e

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

$$AM = MC \quad (*)$$

$$A \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$T$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ $A = [T]_{base}$ é semelhante a uma matriz diagonal

$M^{-1}AM = C$ é diagonal

! As colunas de $M$ são exatamente os autovetores de $T$ expressos na base dada.

---

8 fev, Supl., Ex. 4

Determinar todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{F}$ que tornam a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

semelhante a uma matriz diagonal.

Resolução: • Como a matriz é triangular superior, seus autovalores são os elementos diagonais, ou seja, $\boxed{a, c, 1}$.

• Calculemos os autovetores.

$\boxed{\lambda = a}$ $\quad A - aI = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1, 0, 0)$ é autovetor

$$\begin{cases} by + z = 0 \\ (c-a)y = 0 \end{cases}$$

$\left\{ \quad (1-a)z = 0 \right.$

Se $a, c, 1$ são distintos 2 a 2,

$y = z = 0 \qquad E_A(a) = \text{span}\,(1,0,0)$

— u —

- Se $a, c, 1$ são distintos 2 a 2, então $A$ é semelhante a uma matriz diagonal ✓.

$a \neq c$

$\neq \quad \neq$

$1$

✓

- Casos:

(i) $a = c \neq 1$

(ii) $a = 1 \neq c$

(iii) $c = 1 \neq a$

(iv) $a = c = 1$

(i) $a = c \neq 1$ Precisamos que $\dim E_A(a) = 2$.

$\boxed{\lambda = a}$ $\quad \ker(A - aI) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} by + z = 0 \\ \cancel{(c-a)y = 0} \\ \underbrace{(1-a)}_{\neq 0} z = 0 \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \underline{z = 0} \Rightarrow by = 0$

Se $b \neq 0$ então $\underline{y = 0}$ e

$E_A(a) = \text{span}\,(1,0,0)$

tem dim 1 $\therefore$ Não é diagonalizável.

Se $b=0$ então $by+z=0$ é redundante

$$E_A(a) = \text{span}((1,0,0),(0,1,0))$$

tem dim 2 $\therefore$ A é diagonalizável

$a = c \neq 1$ ✓
$b = 0$

(ii) $\underbrace{a=1} \neq c$

dim ker $(A-I) = 2$ ?

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} by+z=0 \\ \underbrace{(c-1)}_{\neq 0} y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y=0$
$\Rightarrow z=0$

$E_A(1) = \text{span}(1,0,0)$
Não é diagonalizável.

(iii) $\underbrace{c=1} \neq a$

posto + nulidade = ordem

dim ker $(A-I) = 2$ ?

$$A - I = \begin{pmatrix} \overbrace{a-1}^{\neq 0} & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posto é}$$

posto-linha $= 1$

$\Rightarrow$ Nulidade $= 3 - 1 = 2$ ✓.

$\therefore$ É diagonalizável   $c = 1 \neq a$ ✓

(iv) $a = c = 1$

$\dim \ker(A - I) = 3$ ?

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & b & 1^{\neq 0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{posto} = \text{pos b linha é } 1$$

$\Rightarrow$ Nulidade $= 3 - 1 = 2 < 3$ ✗

Não é diagonalizável.

Resp. $\underset{\neq 1}{a} \neq c$ ,   $a = c \neq 1$, $b = 0$ ,   $c = 1 \neq a$

É diagonalizável exatamente em um desses três casos.

$$\boxed{a \neq 1 \quad e \quad \begin{cases} c \neq a \\ \text{ou} \\ c = a \;\; e \;\; b = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} a^{\neq 1} & b & 1 \\ 0 & c^{\neq a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{cc|c} a^{\neq 1} & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dadas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, como reconhecer se $A$ e $B$ são semelhantes ou não?

Existem invariantes que fornecem condições necessárias para semelhança entre $A$ e $B$. Por exemplo:

$$A, B \text{ semelhantes} \Rightarrow \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \text{ e } \det A = \det B$$

$$\operatorname{tr}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 3+7-5 = 5$$

Se $A$ e $B$ são diagonalizáveis, então $A$ e $B$ são semelhantes $\Leftrightarrow$ $A$ e $B$ têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades.

Neste caso, a matriz que realiza a semelhança é a matriz de mudança da base formada por autovetores de $A$ para a base formada por autovetores de $B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

têm os mesmos autovalores,

a 1.ª não é diagonalizável,

a 2.ª é diagonal.

Não são semelhantes.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

—*—

8 fev, Supl., Ex 1

$V = M(n, \mathbb{C})$ $\qquad \langle A, B \rangle = tr(A B^*)$

$T_P(A) = P^{-1} A P$ onde $P \in V$ é invertível.

$(T_P)^* = ?$

Resolução

$$\langle T_P(A), B\rangle = \langle P^{-1}AP, B\rangle$$

$$= tr(P^{-1}APB^*) = tr(A\underbrace{PB^*P^{-1}})$$

$$= tr(A((P^{-1})^* B P^*)^*)$$

$$= \langle A, (P^*)^{-1} B P^*\rangle$$

$$= \langle A, (T_P)^*(B)\rangle \quad \forall A, B \in V$$

$$\therefore (T_P)^*(B) = (P^*)^{-1} B P^* \quad \forall B \in V$$

$$\therefore (T_P)^* = T_{P^*} \quad //$$

—*—

$$\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle \quad \forall v$$

$$\Rightarrow \langle u-u', v\rangle = 0 \quad \forall v$$

$$\Rightarrow \langle u-u', u-u'\rangle = 0$$

$$\|u-u'\|^2 \Rightarrow u-u' = 0 \quad \therefore u = u'$$