OPERADORES EM ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

08/02/22

V, W esp c/ prod int ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$\dim V, \dim W < \infty$

7.2 Def. [TRANSFORMAÇÃO ADJUNTA DE $T \in \mathcal{L}(V,W)$]

É a transformação $T^* \in \mathcal{L}(W,V)$ t.q.

$$\boxed{\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle}$$

$\forall v \in V, \ \forall w \in W$.

- T^* está bem definida.

Dado $w \in W$, consideremos $\varphi_w \in V'$, $\varphi_w(v) = \langle Tv, w \rangle$.
Pelo T. de Representação de Riesz, $\exists! \ \tilde{v} \in V$ t.q.

$\varphi_w(v) = \langle v, \tilde{v} \rangle \ \forall v \in V \Rightarrow \langle Tv, w \rangle = \langle v, \tilde{v} \rangle \ \forall v \in V$

Pomos $T^* w = \tilde{v}$.

- T^* é linear.

$$\left.\begin{array}{l} \langle Tv, w_1 \rangle = \langle v, T^* w_1 \rangle \\ \langle Tv, w_2 \rangle = \langle v, T^* w_2 \rangle \end{array}\right. \quad \forall v \in V.$$

$\Rightarrow \underbrace{\langle Tv, w_1 + w_2 \rangle}_{= \langle v, T^*(w_1 + w_2) \rangle} = \langle Tv, w_1 \rangle + \langle Tv, w_2 \rangle$

$$= \langle v, T^* w_1 \rangle + \langle v, T^* w_2 \rangle$$

$$= \langle v, T^* w_1 + T^* w_2 \rangle \quad \forall v \in V$$

$$\therefore \quad T^*(w_1 + w_2) = T^* w_1 + T^* w_2 \qquad \text{etc.}$$

7.3 Ex Consideremos $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$,
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1)$. Calcular T^*.

Resolução. $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), T^*(y_1, y_2) \rangle = \langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2) \rangle$$

$$= \langle (x_2 + 3x_3, 2x_1), (y_1, y_2) \rangle$$

$$= x_2 y_1 + 3x_3 y_1 + 2x_1 y_2$$

$$= \langle (x_1, x_2, x_3), (2y_2, y_1, 3y_1) \rangle \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\therefore \quad T^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1)$$

7.4 Ex Dados $\overset{*0}{u} \in V$, $\overset{*0}{x} \in W$, consideremos
$T \in \mathcal{L}(V, W)$ dado por $Tv = \langle v, u \rangle x$.
Calcular T^*.

Resolução. $\operatorname{im} T = \operatorname{span}(x)$ tem dim 1

$\ker T = \operatorname{span}(u)^\perp \leftarrow$

$T^* \in \mathcal{L}(W,V)$. Dado $w \in W$, temos

$$\langle v, T^*w\rangle = \langle Tv, w\rangle \qquad \forall v \in V$$
$$= \langle \langle v,u\rangle x, w\rangle$$
$$= \langle v,u\rangle \langle x, w\rangle$$
$$= \langle v, \overline{\langle x,w\rangle} u\rangle$$
$$= \langle v, \langle w, x\rangle u\rangle$$
$$\therefore\ T^*w = \langle w, x\rangle u$$

—n—

7.6 Propriedades da adjunta

(a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ $\qquad S, T \in \mathcal{L}(V,W)$

→ (c) $(T^*)^* = T$ $\qquad \lambda \in \mathbb{F}$

(d) $I^* = I$

(e) $(ST)^* = T^* S^*$ $\qquad T \in \mathcal{L}(V,W),\ S \in \mathcal{L}(W,U)$

Dem. (b) $\langle v, (\lambda T)^* w\rangle = \langle (\lambda T)v, w\rangle$

$$= \langle \lambda (Tv), w\rangle$$
$$= \lambda \langle Tv, w\rangle$$
$$= \lambda \langle v, T^*w\rangle$$

$= \langle v, \bar{\lambda} T^* w \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$

$\therefore (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

(c) $\langle v, (ST)^* u \rangle = \langle (ST)v, u \rangle$

$= \langle S(Tv), u \rangle$

$= \langle Tv, S^* u \rangle$

$= \langle v, T^*(S^* u) \rangle$

$= \langle v, (T^* S^*) u \rangle \quad \forall u \in U, v \in V$

$\therefore (ST)^* = T^* S^*$ //.

7.7 Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Então:

(a) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$

(b) $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp$

(c) $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$

(d) $\operatorname{im} T = (\ker T^*)^\perp$

Dem. (a). $V \underset{T^*}{\overset{T}{\rightleftarrows}} W \ni w$

$w \in \ker T^* \iff T^* w = 0 \iff \langle v, T^* w \rangle = 0, \forall v \in V$

$\iff \langle Tv, w \rangle = 0, \forall v \in V \iff w \perp \operatorname{im} T \iff w \in (\operatorname{im} T)^\perp$

$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp \Rightarrow (\ker T^*)^\perp = \underbrace{((\operatorname{im} T)^\perp)^\perp}_{= \operatorname{im} T} \quad (d)$$

(a), (d) aplicados a T^* dão (b), (c)

(aqui usamos que $(T^*)^* = T$)

//

—

7.10 A MATRIZ DE T^*

Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Suponhamos que $e_1, \dots, e_n$ (B_V:) seja uma base ortonormal de V e (B_W:) $f_1, \dots, f_m$ uma base o.n. de W. Então

$$[T^*]^{B_W}_{B_V} = \left(\overline{[T]^{B_V}_{B_W}}\right)^t$$

$$= \left([T]^{B_V}_{B_W}\right)^*$$

(matriz transposta conjugada)

Dem.

$$[T]^{B_V}_{B_W} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} e_1 & \cdots & e_k & \cdots & e_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & \langle Te_k, f_j\rangle & \cdots & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array}$$

$$Te_k = \langle Te_k, f_1\rangle f_1 + \dots + \langle Te_k, f_m\rangle f_m$$

$$T^* f_j = \langle T^* f_j, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle T^* f_j, e_n\rangle e_n$$

$$[T^*]^{B_W}_{B_V} = \begin{array}{cc} & f_j \\ \left(\begin{matrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle T^* f_j, e_k \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{matrix} \right) & e_k \end{array}$$

$$\langle T^* f_j, e_k \rangle = \langle f_j, Te_k \rangle = \overline{\langle Te_k, f_j \rangle}$$

$$\left([T^*]^{B_W}_{B_V} \right)_{j,k} = \overline{\left([T]^{B_V}_{B_W} \right)_{k,j}}$$ //

7.11 <u>Def</u> [OPERADOR AUTO-ADJUNTO $T \in \mathcal{L}(V)$]

É um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ t.q. $T^* = T$.

7.12 <u>Ex.</u> Determinar $b \in \mathbb{F}$ t.q. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ com

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$ seja auto-adjunto.

<u>Resolução.</u> A base canônica é o.n.

$$[T^*] = [T]^* = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{b} & \bar{7} \end{pmatrix}$$

$$T = T^* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & b \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \bar{b} & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 3$$ //

7.13 Todo autovalor de um operador auto-adjunto é real.

Dem. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$, $T = T^*$. Seja $\lambda \in \mathbb{F}$ um autovalor de T. Então $Tv = \lambda v$ para algum $v \in V$, $v \neq 0$ e

$$\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ T = T^*}}{=} \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\|v\|^2}_{\neq 0 \ (\because v \neq 0)} = 0 \qquad \therefore \lambda = \bar{\lambda} \ //.$$

7.14 Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então $Tv \perp v \ \forall v \in V \Rightarrow T = 0$

Dem. Ler no livro, à página 210.

7.15 Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ então $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \Leftrightarrow T = T^*$.

Dem. ($\Leftarrow$) Suponhamos $T = T^*$. Então

$$\langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \overline{\langle Tv, v \rangle} \Rightarrow \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle - \langle v, Tv \rangle &= \langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} \\ &= \langle Tv, v \rangle - \langle Tv, v \rangle \quad \text{(por hip)} \\ &= 0 \qquad \forall v \in V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle \quad \forall v \in V \quad \therefore T^* = T \ //.$$

7.16 Se $T = T^*$ e $\langle Tv, v\rangle = 0$ $\forall v \in V$ então $T = 0$

<u>Dem.</u> 7.14 cobre o caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Podemos assumir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$$\langle Tu, w\rangle = \frac{1}{4}\Big\{ \underbrace{\langle T(u+w), u+w\rangle}_{=0 \text{ p/ hip}} - \underbrace{\langle T(u-w), u-w\rangle}_{=0 \text{ p/ hip}} \Big\}$$

$$= 0 \quad \forall v \in V,\ w \in W$$

$$\langle Tu, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow Tu = 0$$

$$Tu = 0 \quad \forall u \in U \Rightarrow T = 0 \quad //.$$

7.18 <u>Def.</u> [OPERADOR NORMAL]

$T \in \mathcal{L}(V)$ é <u>normal</u> se $TT^* = T^*T$.

Em part., T auto-adjunto $\Rightarrow T$ normal.

7.19 <u>Ex</u> $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$, $[T] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [T^*] = [T]^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \neq [T]$$

Essas matrizes comutam, pois:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2I + 3J \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2I - 3J$$

$\therefore$ T é normal e T não é auto-adjunto.

7.20 T é normal $\iff \|Tv\| = \|T^*v\| \quad \forall v \in V$

<u>Dem</u>. T é normal $\iff TT^* - T^*T = 0$

$\overset{(7.16)}{\iff} \langle (TT^* - T^*T)v, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

$TT^* - T^*T$ é auto-adjunto

$\iff \langle TT^*v, v \rangle - \langle T^*Tv, v \rangle = 0$

$\iff \langle T^*v, T^*v \rangle - \langle Tv, Tv \rangle = 0$

$\iff \|T^*v\|^2 - \|Tv\|^2 = 0$ //

$(TT^* - T^*T)^*$
$= (TT^*)^* - (T^*T)^*$
$= (T^*)^*T^* - T^*(T^*)^*$
$= TT^* - T^*T$

7.21 Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é normal e $v \in V$ é um autovetor de T com autovalor λ, então v também é um autovetor de T^* e o autovalor associado é $\bar{\lambda}$.

<u>Dem</u>. $Tv = \lambda v \Rightarrow (T - \lambda I)v = 0$

$(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ e

$(T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) = (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I)$

pois $TT^* = T^*T$

$\Rightarrow T - \lambda I$ é normal.

$$0 = \|(T-\lambda I)v\| \underset{(7.20)}{=} \|(T-\lambda I)^* v\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)v\|$$

$$\Rightarrow (T^* - \bar{\lambda} I)v = 0 \Rightarrow T^* v = \bar{\lambda} v \quad //.$$

7.22 Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é normal, então autovetores de T associados a autovalores distintos são ortogonais.

<u>Dem</u>. Suponhamos que u, v são autovetores de T, $Tu = \lambda u$, $Tv = \mu v$ com $\lambda \neq \mu$. Então

$$\lambda \langle u, v\rangle = \langle \underbrace{Tu}_{=\lambda u}, v\rangle = \langle u, \underbrace{T^* v}_{\substack{=\bar{\mu} v \\ 7.21}}\rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle u, v\rangle = 0 \quad \therefore \quad u \perp v \quad //.$$

§7.B <u>O</u> <u>TEOREMA</u> <u>ESPECTRAL</u>

7.24 <u>O CASO $\mathbb{F} = \mathbb{C}$</u>

Suponhamos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então as seguintes asserções são equivalentes:

(a) T é normal.

(b) V admite uma base o.n. consistindo de autovetores de T

(c) $[T]_B$ é diagonal para alguma base o.n. de V.

7.23 <u>Ex</u>. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $[T] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Vimos em 7.19 que T é normal.

B: $\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)$ é uma base o.n. de $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i - 3 \\ 3i + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(2+3i)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2i - 3 \\ -3i + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(2-3i)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

—//—

Ex. 5, §6.A $T \in \mathcal{L}(V)$, $\|Tv\| \leq \|v\|$ $\forall v \in V$

$\Rightarrow T - \sqrt{2}\, I$ é invertível.

ERRATUM. Falta a hipótese $\dim V < \infty$!!!

Resolução: Supondo $\dim V < \infty$, basta ver que $T - \sqrt{2}\,I$ é injetora, ou seja, que $\ker(T - \sqrt{2}\,I) = \{0\}$.

Isto quer dizer que $\sqrt{2}$ não é autovalor de T.

Se $\sqrt{2}$ fosse autovalor de T, teríamos $Tv = \sqrt{2}\,v$ para algum $v \in V$, e então,

$$\|Tv\| = \sqrt{2}\|v\| > \|v\|,$$

uma contradição com a hipótese.

—//—

Obs. $S = T - \sqrt{2}\,I$. Seja $u \in \ker S^*$

$$0 = \langle S^* u, u\rangle = \langle (T^* - \sqrt{2}\,I)u, u\rangle$$

$$= \langle T^* u, u\rangle - \sqrt{2}\,\langle u, u\rangle$$

$$= \langle u, Tu\rangle - \sqrt{2}\,\|u\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 (1 - \sqrt{2}) \Rightarrow u = 0$$

$|\langle u, Tu\rangle| \leq \|u\|\|Tu\| \leq \|u\|^2$

$\therefore \ker S^* = \{0\}$
$\Downarrow$
im S é densa em V

Se V espaço de Hilbert então
$\|S\|$ im S é fech.

$\cancel{T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)}$ $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$

$T \in \mathcal{L}$(sequências quase-finitas em $\mathbb{R}$)

$\|Tv\| = \|v\| \quad \forall v \in V$

$\|(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)\| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ (soma é finita)

$(T - \sqrt{2} I)(x_1, x_2, \dots)$

$= (-\sqrt{2} x_1, \; x_1 - \sqrt{2} x_2, \; x_2 - \sqrt{2} x_3, \dots)$