O COMPLEMENTO ORTOGONAL

07/02/22

6.45 **Def.** Seja S um subcj de V ← esp vet c/prod interno ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

O complemento ortogonal de S em V, denotado com $S^{\perp}$, é o conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a todo vetor de S, em símbolos:

$$S^{\perp} = \{ v \in V \mid v \perp u, \ \forall u \in S \}$$

6.46 • $S^{\perp}$ é um subespaço de V

$$\underset{\forall u \in S}{v_1, v_2 \in S^{\perp} \Rightarrow v_1, v_2 \perp u} \Rightarrow \langle v_1, u \rangle = \langle v_2, u \rangle = 0 \quad \forall u \in S$$

$$\Rightarrow \langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \forall u \in S$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \perp u, \ \forall u \in S \Rightarrow v_1 + v_2 \in S^{\perp} \quad \text{etc.}$$

• $\{0\}^{\perp} = V$

• $V^{\perp} = \{0\}$

• $S \cap S^{\perp} = \{0\}$

$$v \in S \cap S^{\perp} \Rightarrow \begin{matrix} v \in S \text{ e} \\ v \in S^{\perp} \end{matrix} \Rightarrow \overbrace{\langle \underset{S}{v}, \underset{S^{\perp}}{v} \rangle}^{=\|v\|^2} = 0 \ \therefore v = 0$$

• $S_1, S_2 \subset V$ subcjs com $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$.

$v \in S_2^\perp \Rightarrow v \perp u, \ \forall u \in S_2 \underset{S_2 \supset S_1}{\Rightarrow} v \perp u, \forall u \in S_1$

$\Rightarrow v \in S_1^\perp$

6.47 Seja U um subespaço de dim finita de V. Então $V = U \oplus U^\perp$.

Dem. Seja $e_1, \dots, e_m$ uma base o.n. de U, $m = \dim U$. Podemos escrever

$$v = \underbrace{\langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m\rangle e_m}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$$

onde $w := v - \langle v, e_1\rangle e_1 - \dots - \langle v, e_m\rangle e_m$.

Notemos que

$$\langle w, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle - \underbrace{\left(\langle v, e_1\rangle\langle e_1, e_j\rangle + \dots + \langle v, e_m\rangle\langle e_m, e_j\rangle\right)}$$

$$= \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_j\rangle \underbrace{\langle e_j, e_j\rangle}_{=1}$$

$$= 0 \qquad \forall j = 1, \dots, m$$

$\Rightarrow w \perp e_j \quad \forall j$

$\Rightarrow w \perp \operatorname{span}(e_1, \dots, e_m) = U \Rightarrow w \in U^\perp$.

Isso mostra que $V = U + U^\perp$. Mas já sabemos que $U \cap U^\perp = \{0\}$. Logo $V = U \oplus U^\perp$ //.

Cor. Suponha $\dim V < \infty$, temos (U subesp)
$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}.$$

6.51 Suponhamos $\dim U < \infty$. Então (U subesp)
$$(U^{\perp})^{\perp} = U.$$

Dem. Seja $u \in U$. Então $u \perp v$, $\forall\, v \in U^{\perp}$
$\Rightarrow u \in (U^{\perp})^{\perp}$. Logo $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$. (*)

[Obs. Se $\dim V < \infty$, então $\dim (U^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim U^{\perp}$
$= \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$]

Seja $v \in (U^{\perp})^{\perp}$. Por (6.47), $v = u + w$ onde
$u \in U$ e $w \in U^{\perp}$. Então

$$v - u = w \in U^{\perp} \qquad (1)$$

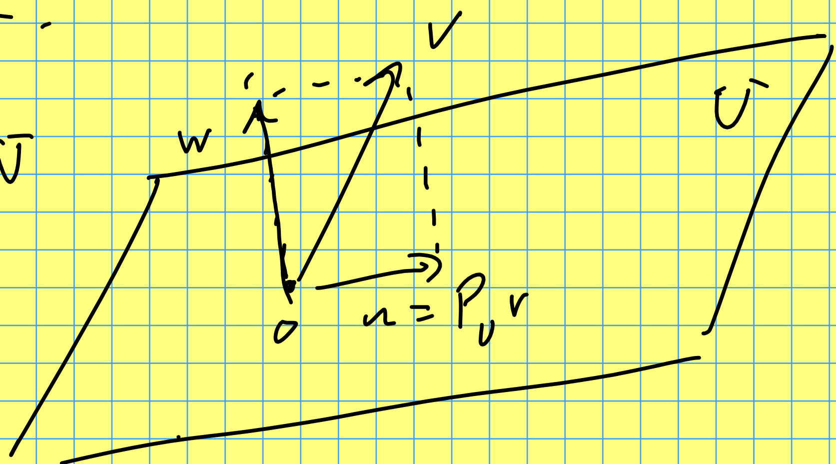
$$\left.\begin{array}{l} u \in U \subset (U^{\perp})^{\perp} \\ v \in (U^{\perp})^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow v - u \in (U^{\perp})^{\perp} \qquad (2)$$

(1) e (2) $\Rightarrow v - u \in U^{\perp} \cap (U^{\perp})^{\perp} = \{0\} \Rightarrow v = u \in U$

Logo $(U^{\perp})^{\perp} \subset U$ (**). De (*) e (**), vem que $(U^{\perp})^{\perp} = U$ //.

6.53 <u>**Def**</u> Seja U um subesp de dim finita de V.
Escrevamos $V = U \oplus U^\perp$ conforme (6.47).
A <u>projeção ortogonal</u> de V sobre U é o operador linear $P_U \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo:
dado $v \in V$, se $v = u + w$ com $u \in U$, $w \in U^\perp$, então
$P_U(v) = u$.

$v - P_U v = w \perp U$



$P_U v$ é o único vetor de U que torna $v - P_U v \perp U$.
De fato se $u' \in U$ é t.q. $v - u' \perp U$ então

$$v = \underbrace{u'}_{\in U} + \underbrace{(v - u')}_{\in U^\perp} = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$$

Como $V \oplus U^\perp$ é uma soma direta,

$\underline{\underline{u = u'}}$ e $v - u' = w$

6.55 Seja U um subesp de dim fin de V e seja $v \in V$. Então ?

(a) $P_U \in \mathcal{L}(V)$

(b) $P_U u = u \quad \forall u \in U$

(c) $P_U w = 0 \quad \forall w \in U^\perp$

(d) $\operatorname{im} P_U = U$

(e) $\ker P_U = U^\perp$

(f) $v - P_U v \in U^\perp$

(g) $P_U^2 = P_U$ (idempotência)

(h) $\|P_U v\| \leq \|v\|$

(i) $\forall$ base o.n. $e_1, \dots, e_m$ de U, temos

$$P_U v = \sum_{j=1}^{m} \langle v, e_j \rangle e_j .$$

(a) $v_1 = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in U^\perp} \qquad v_2 = \underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in U^\perp}$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in U^\perp}$$

$$\Rightarrow P_U(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 \qquad \text{etc,}$$

$$= P_U v_1 + P_U v_2$$

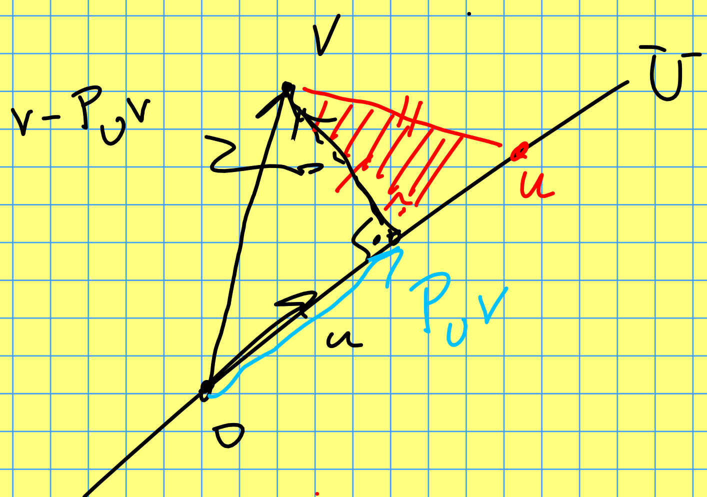
(h) Se $v = u + w$ então $u \perp w$

$ \underset{U}{\uparrow} \quad \underset{U^\perp}{\uparrow}$

Pitágoras $\Rightarrow$ $\|v\|^2 = \|u\|^2 + \underbrace{\|w\|^2}_{\geq 0} \geq \|u\|^2$

Mas $u = P_U v$. Logo $\|v\| \geq \|P_U v\|$ $\forall v \in V$ //

MINIMIZAÇÃO DE DISTÂNCIAS



Qual é o ponto da reta mais próximo de v?

6.56 Seja U um subespaço de dim finita de V. Seja $v \in V$. Então

(*) $\|v - P_U v\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U$

Dem. $\|v - P_U v\|^2 \leq \|\underbrace{v - P_U v}_{\in U^\perp}\|^2 + \underbrace{\|\overbrace{P_U v - u}^{\in U}\|^2}_{\geq 0}$

$= \|(v - \cancel{P_U v}) + (\cancel{P_U v} - u)\|^2$ (por Pitágoras)

$= \|v-u\|^2$ //

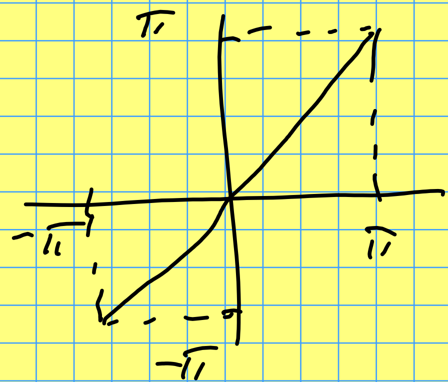
Além disso, vale a igualdade em (*) se e somente se $\|P_U v - u\|^2 = 0 \iff P_U v - u = 0$

$\iff u = P_U v$

— // —

<u>Ex</u> $V = C([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ $\dim V = \infty$

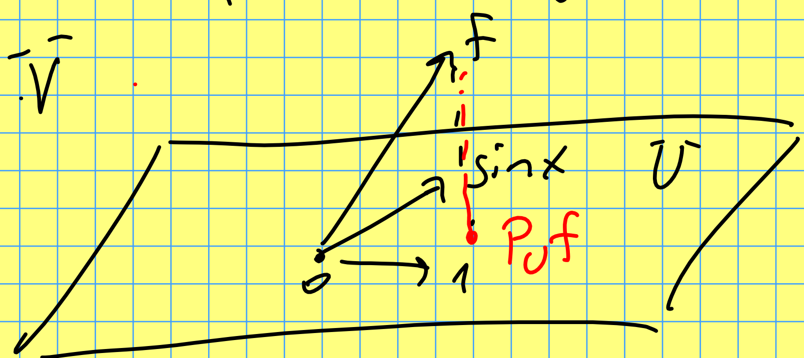
Seja $f(x) = x$, $x \in [-\pi,\pi]$



Seja U o subespaço de V gerado por $\underbrace{1, \sin x}$

$\dim U = 2$

Qual é a "melhor" aproximação de f por uma função em U?



$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, f_2(x)\, dx$$

Ortonormalizemos a base 1, $\sin x$ de U:

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\langle \sin x, e_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$$

$$\|\sin x\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \pi$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$$

$$\langle f, e_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$$

$$\langle f, e_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

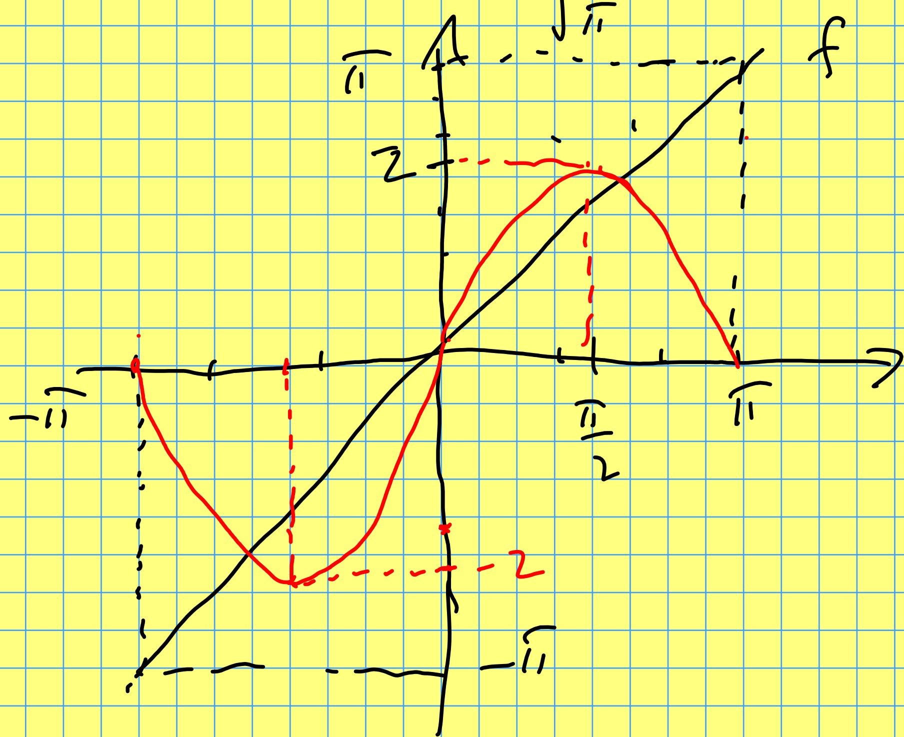
$$\langle f, e_2 \rangle = \left(\sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} - x\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(\pi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - (-\pi) \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} \Big)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(-2\pi) = 2\sqrt{\pi}$$

$$\therefore\ P_U f = \cancel{\langle f, e_1\rangle}^{\,0} e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2$$

$$= 2\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x = 2\sin x$$



$\|f - P_U f\| =$ Erro cometido aproximando f por $P_U f$

$\|f - u\| =$ Erro cometido aproximando f por $u \in U$
$u \in U$

6.56 : $\|f - P_U f\| \leq \|f - u\| \quad \forall u \in U$

Ou seja, $P_U f$ minimiza

$$\|f-u\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x-g(x)|^2 dx$$

$u = g(x) \in U$

6.58 Calcular um polinômio real de grau ≤ 5 que minimiza

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - u(x)|^2 dx \,.$$

<u>Resolução</u> $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

$$V = C([-\pi,\pi];\mathbb{R}) \quad U = P_5(\mathbb{R}) < V$$

$v \in V$, $v(x) := \sin x$ Minimizar $\|v-u\|$ com $u \in U$.

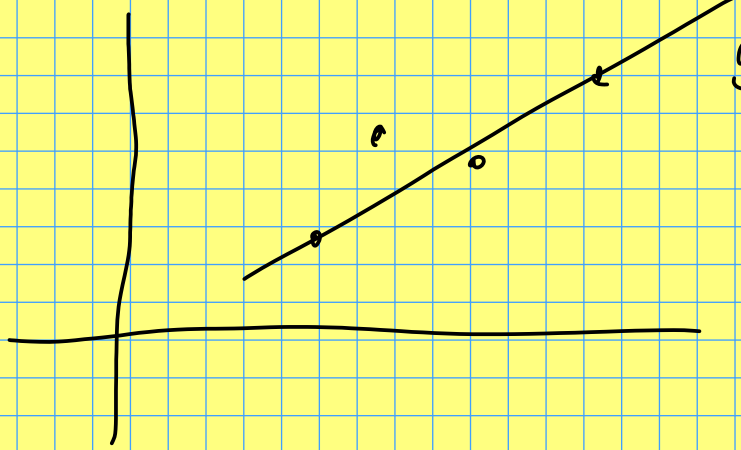
Solução $u = P_U v$

$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ base canônica de U

$\xrightarrow{\text{G-S}}$ $e_1, \dots, e_6$ base o.n. de U

$\dots$ $u(x) = 0{,}987862\,x - 0{,}155271\,x^3 + 0{,}00564312\,x^5$

Polinômio de Taylor de $\sin x$ de grau 5 é (centrado em 0) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$



$y = \underline{\underline{a}}x + \underline{\underline{b}}$

Valores observados

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

$1, x$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, g(x_i)\, w_i$$

$w_i > 0$

pesos

$V = C(\{x_1, \dots, x_n\}, \mathbb{R})$

U

$U = \operatorname{span}(1, x)$