2.23 $\boxed{\text{Compr de lista LI} \leq \text{Compr de lista geradora}}$ 13/01/22

Se: $\dim V < \infty$
$u_1, \dots, u_m$ LI
$\text{span}(w_1, \dots, w_n) = V$

Então $m \leq n$.

<u>Dem.</u> <u>Passo inicial</u>: Seja B a lista $w_1, \dots, w_n$. Como B gera V, temos que a lista $u_1, w_1, \dots, w_n$ é LD.

Notemos que $\underline{u_1 \neq 0}$. Agora, pelo Lema da Dep. Linear, podemos remover um vetor da lista $u_1, w_1, \dots, w_n$, que é comb. lin. dos vetores anteriores, de modo que a lista remanescente continue gerando V. Esse vetor não pode ser u_1 (pois caso contrário u_1 seria comb lin de $\emptyset \Rightarrow u_1 = 0$ ↯), então será um dos w_j's. Seja B a nova lista assim obtida (de compr n).

<u>Passo j</u> $\text{span}(B) = V$ ←

$B: u_1, \dots, u_{j-1}, \dots$

Adicionamos u_j a B, colocando-o logo após u_{j-1}. A nova lista é LD

$$B: \underbrace{u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j}_{\text{L. I.}}, w_{i_{j+1}}, \ldots, w_{i_{n+1}} \quad \text{LD}$$

Pelo Lema da Dep Lin, um dos w_i's é comb. lin. dos demais vetores da lista.

Removendo esse w_i da lista, obtemos uma lista de compr n que continua gerando V.

Chegando ao passo m, teremos acrescentado todos os u_i's a B, e o processo termina.

Como em cada passo há sempre um w_j a ser removido, existem pelo menos tantos w_j's quanto u_i's. Logo $n \geq m$. //

Ex. $(1,2,3), (4,5,8), (9,6,7), (-3,2,8)$ lista em $\mathbb{R}^3$ é LD, pois tem compr 4, e a lista $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ de compr 3 gera $\mathbb{R}^3$.

$\underline{Ex}$. $(1,2,3,-5)$, $(4,5,8,3)$, $(9,6,7,-1)$

lista em $\mathbb{R}^4$. não gera $\mathbb{R}^4$, pois

$(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ é LI em $\mathbb{R}^4$.

2.26 Todo subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita também tem dim finita.

2.B BASES

2.27. $\underline{Def}$ [BASE de V].

É uma lista de vetores de V que é simultaneamente LI e geradora de V.

$\underline{Exs}$. (a) $V = \mathbb{F}^n$

$(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,\dots,0,1)$

é uma base de $\mathbb{F}^n$. BASE CANÔNICA DO $\mathbb{F}^n$

(b) $(1,2)$, $(3,5)$ é base de $\mathbb{F}^2$

L.I. $x(1,2) + y(3,5) = (0,0)$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

$\operatorname{span}((1,2),(3,5)) = \mathbb{F}^2$ Dado $(a,b) \in \mathbb{F}^2$:

$(a,b) = x\,(1,2) + y\,(3,5)$

$$\begin{cases} x + 3y = a & \times -2 \\ 2x + 5y = b \end{cases} \quad + \quad -y = b - 2a$$

$$y = 2a - b$$

$x = a - 3y = \ldots$

(d) $\underbrace{(1,2),\ (3,5),\ (4,3)}_{\text{compr } 3 \,>\, 2 \,=\, \text{compr}((1,2),\,(3,5))}$ gera $\mathbb{F}^2$, mas não é LI.

$\uparrow$ gera V

por 2.23

(e) $V = \mathbb{F}^3$ $\quad U = \{(x,x,y) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$

U é um subespaço de V

(definido pela equação $x_1 - x_2 = 0$)

$(x,x,y) = x\,(1,1,0) + y\,(0,0,1)$

$\Rightarrow (1,1,0),\ (0,0,1)$ gera U

Além disso, essa lista é LI, pois

nenhum dos vetores é múltiplo do outro.

Logo $(1,1,0),\ (0,0,1)$ é uma base de U.

(g) $1, z, \ldots, z^m$ é uma base de $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

2.29 Critério para uma lista ser base

$v_1, \dots, v_n$ lista em V é base de V $\iff$ Qualquer vetor $v \in V$ se escreve como comb. lin. de $v_1, \dots, v_n$ de modo único

Dem. ($\Rightarrow$) Suponhamos $v_1, \dots, v_n$ base de V.

Seja $v \in V$ arbitrário. Como $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = V$,

$\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

Suponhamos que também

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n .$$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0}_{\text{rel. lin.}}.$$

Como $v_1, \dots, v_n$ é LI,

$$a_1 - b_1 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que qq. $v \in V$ é (I) comb. lin. de $v_1, \dots, v_n$ de modo único. (II)

(I) $\Rightarrow$ $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ ←

Consideremos uma relação linear

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$$
$$= 0v_1 + \dots + 0v_n$$

Escrevemos $0 \in V$ como comb. lin. de 2 maneiras.

(II) $\Rightarrow$ $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$

$\therefore$ $v_1, \dots, v_n \in I$ ←

$\therefore$ $v_1, \dots, v_n$ é base de V //.

—//—

2.31 Toda lista geradora de V pode ser reduzida a uma base de V

2.31 Segue do Lema da Dep. Linear.

2.33 Toda lista LI de V pode ser estendida a uma base de V (assumindo que V tem dimensão finita)

Uma conseqüência de 2.31:

2.32 Todo espaço vetorial de dimensão finita admite uma base.

__Dem__ V tem dim finita $\Rightarrow$ V admite uma lista geradora (por def) Por 2.31, ela pode ser reduzida a uma base //.

<u>Dem de 2.33</u> Suponhamos que V tem dim finita e $u_1, \ldots, u_m$ é uma lista LI em V. Se $\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m) = V$ então $u_1, \ldots, u_m$ já é base de V. Caso contrário, existe $u_{m+1} \notin \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)$. Consideremos agora a lista $u_1, \ldots, u_{m+1}$. Afirmamos que ela é LI, pois:

$$a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m + \cancel{a_{m+1}} u_{m+1} = 0$$

$\Rightarrow a_{m+1} = 0$ (pois $a_{m+1} \neq 0 \Rightarrow u_{m+1} \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)$ $\lightning$)

$$a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m = 0$$

$u_1, \ldots, u_m$ é LI $\Rightarrow a_1 = \ldots = a_m = 0$

$\Rightarrow u_1, \ldots, u_{m+1}$ é LI

Podemos repetir o processo.

Passo j: $u_1, \ldots, u_{m+j-1}$ LI

Se $\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_{m+j-1}) = V$ então $u_1, \ldots, u_{m+j-1}$ é base de V. Caso contrário $\exists\, u_{m+j} \notin \text{span}(u_1, \ldots, u_{m+j-1})$

e mostramos como acima que

$u_1, \ldots, u_{m+j-1}, u_{m+j}$ é LI.

Para algum j, $\text{span}(u_1, \ldots, u_{m+j}) = V$.

Caso contrário, obteríamos uma

seq. de listas de LI de compr arbitraria/e

grande, mas isso é impossível por 2.23. //

2.34

$\dim V < \infty$ $\Rightarrow$ $\exists\, W \underset{\text{subesp}}{\subset} V$ t.q.

$U \underset{\text{subesp}}{\subset} V$

$$V = U \oplus W.$$

<u>Dem</u>. $\dim V < \infty \overset{2.26}{\Rightarrow} \dim U < \infty$.

$\exists$ base $\underbrace{u_1, \ldots, u_m}_{LI}$ base de U (2.32)

$\exists$ base $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ base de $\underset{(I)}{V}$ (2.33)

$W := \text{span}(w_1, \ldots, w_m)$

Resta mostrar que

$V = U + W$ ✓ e $U \cap W = \{0\}$.

Seja $v \in V$.

Por (I),

$$v = \underbrace{a_1u_1+\dots+a_mu_m}_{:=u} + \underbrace{b_1w_1+\dots+b_nw_n}_{:=w}$$

$\Rightarrow v = u + w$ onde $u \in U$, $w \in W$

$\Rightarrow v \in U + W$ $\therefore$ $V = U + W$

Suponhamos $v \in U \cap W$.

Como $\text{span}(u_1, \dots, u_m) = U$, $\text{span}(w_1, \dots, w_n) \in W$,

$$b_1w_1 + \dots + b_nw_n = v = a_1u_1 + \dots + a_mu_m$$

$\Rightarrow a_1u_1 + \dots + a_mu_m - b_1w_1 - \dots - b_nw_n = 0$

(rel lin)

Por (I), $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ é LI

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_n = 0$

$\Rightarrow v = 0$ $\therefore$ $U \cap W = \{0\}$ //. (§2.B)