

# MAT230 – Geometria e Desenho Geométrico I

Prova Substitutiva – 28/11/2003

## GABARITO

Todas as geometrias consideradas satisfazem os Postulados 1-7.

1. Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  o pé da perpendicular a  $\overleftrightarrow{BC}$  que passa por  $A$ . Mostre que se  $m(\angle ABC) < 90$  e  $m(\angle ACB) < 90$ , então  $P - B - C$ .

**Resolução:** Como  $P \in \overleftrightarrow{BC}$ , há cinco casos possíveis:  $P - B - C$ ;  $P = B$ ;  $B - P - C$ ;  $P = C$ ; ou  $B - C - P$ .

Como  $m(\angle APB) = 90$  e  $m(\angle ACB) < 90$ , o caso  $P = C$  é impossível.

Como  $m(\angle APC) = 90$  e  $m(\angle ABC) < 90$ , o caso  $P = B$  é impossível.

Se  $P - B - C$ , então  $\angle ABC$  é externo ao  $\triangle APB$  e  $\angle APB$  é interno não-adjacente, o que implica

$$90 = m(\angle APB) < m(\angle ABC) < 90,$$

o que é absurdo. Logo, esse caso é impossível.

O caso  $B - C - P$  é análogo ao anterior e portanto, impossível.

Resta então apenas a possibilidade de que  $B - P - C$ .

2. Dado o quadriângulo convexo  $\square ABCD$ , mostre que se  $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ , então  $\overleftrightarrow{AC}$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{BD}$ .

**Resolução:** Inicialmente note que  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  se intersectam num ponto  $M$  pelo teorema das barras cruzadas. Temos

$$\overline{AB} \equiv \overline{AD} \quad (\text{por hipótese})$$

$$\overline{CB} \equiv \overline{CD} \quad (\text{por hipótese})$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{AC}.$$

Portanto  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  por LLL. Em particular

$$\angle BAC \equiv \angle DAC.$$

Agora

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\equiv \overline{AD} \\ \angle BAM &\equiv \angle DAM \\ \overline{AM} &\equiv \overline{AM}.\end{aligned}$$

Logo  $\triangle BAM \equiv \triangle DAM$  por LAL. Segue que

$$\angle BMA \equiv \angle DMA.$$

Como  $\angle BMA$  e  $\angle DMA$  são ângulos suplementares, eles têm que ser retos.

Logo  $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ .

3. Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $M$  o ponto de encontro das bissetrizes de  $\triangle ABC$ . Mostre que existe uma circunferência de centro em  $M$  que é tangente aos três lados de  $\triangle ABC$ .

**Resolução:** Sejam  $D$ ,  $E$ ,  $F$  os pés das perpendiculares a  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ , resp., por  $M$ . Temos

$$\begin{aligned}\overline{AM} &\equiv \overline{AM} \\ \angle AME &\equiv \angle AMF \quad (\overline{AM} \text{ é bissetriz de } \angle FAE) \\ \angle AEM &\equiv \angle AFM \quad (\text{retos})\end{aligned}$$

Portanto  $\triangle AME \equiv \triangle AMF$  por LAAo. Em particular

$$\overline{ME} \equiv \overline{MF}.$$

Analogamente,

$$\overline{MF} \equiv \overline{MD}.$$

Então

$$d(M, D) = d(M, E) = d(M, F).$$

Como  $D$ ,  $E$  e  $F$  são equidistantes de  $M$ , existe uma circunferência  $\mathcal{C}$  centrada em  $M$  passando por esses pontos. Como  $\overline{MD} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{ME} \perp \overline{CA}$ ,  $\overline{MF} \perp \overline{AB}$ ,  $\mathcal{C}$  é tangente a  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ .