

## Inferência em Processos Estocásticos - MAE 5741

### 1a. Lista de Exercícios (27/3/08)

*Esta lista será discutida na aula do dia 2 de abril.*

1. Dado  $a \in \{1, 2, 3\}$  definimos a sequência  $\{X_n^a\}_{n=1}^\infty$  por:

$$\begin{aligned} X_0^a &= a \\ X_n^a &= F(X_{n-1}^a, U_n), \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

onde  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme em  $(0, 1)$  e  $F(x, u)$  está definida por:

$$F(x, u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u < h_1(x) \\ 2, & \text{se } h_1(x) \leq u < h_2(x) \\ 3, & \text{se } h_2(x) \leq u \leq 1 \end{cases}$$

onde

$$h_1(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = 1 \\ 1/3, & \text{se } x = 2 \\ 1/4, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

e

$$h_2(x) = \begin{cases} 3/4, & \text{se } x = 1 \\ 2/3, & \text{se } x = 2 \\ 1/2, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

- Simule a sequência  $\{X_n^1\}_{n=0, \dots, 1000}$ .
- Calcule

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{\{X_n^1=a\}}$$

para  $a = 1, 2$  e  $N = 10, 50, 100, 150, 200, 250, \dots$ . Compare os resultados e comente.

2. Como você simularia a cadeia de Markov assumindo valores no conjunto  $\{0, 1, \dots, N\}$  e com probabilidades de transição

$$\begin{aligned} p(x+1/x) &= \frac{N-x}{N} \\ p(x-1/x) &= \frac{x}{N}, \end{aligned}$$

para todo  $x = 1, \dots, N-1$  e  $p(N-1/N) = p(1/0) = 1$ .

3. Seja  $A = \{0, 1\}$  e seja  $p$  a matriz de probabilidades de transição assim definida:

$$p = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Suponhamos que  $(X_n^1)$  seja uma cadeia de Markov de alcance 1, assumindo valores no alfabeto  $A = \{0, 1\}$ , matriz de transição  $p$  e com inicialização  $X_{-1} = 1$ .

- Calcule a verossimilhança da sequência

$$x_{-1}^{19} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$$

supondo que ela tenha sido gerada pela cadeia  $(X_n^1)$ .

- Estime por máxima verossimilhança as probabilidades de transição da cadeia a partir da sequência amostral dada no ítem anterior.
- Sempre assumindo que  $\mathbf{P}\{X_{-1} = 1\} = 1$ , calcule a verossimilhança da sequência amostral e compare com a verossimilhança calculada no primeiro ítem deste exercício. Comente o resultado.