MAE 326 - Seção de perguntas 2 (Turma A)

26 de novembro de 2013

Em cada questão uma e só uma opção é correta. A nota final dessa seção será calculada pela fórmula $P = (1/2)\max\{0, C - E/3\}$, sendo C o número de respostas certas e E o número de respostas erradas. Respostas rasuradas serão consideradas como se estivessem em branco e não entrarão no cálculo da nota.

Em todas as questões abaixo, denotaremos por $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ o processo estocástico assumindo valores no alfabeto $A = \{0, 1, 2\}$ cujas probabilidades de transição são, para todo $n \in \mathbb{Z}$, dadas por

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_{-\infty}^n) = \phi_i\left(\sum_{j=1}^{2} W_{j\to i} \sum_{s=L_n^i}^{n} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}}\right), \quad i = 1, 2 \text{ e}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_{-\infty}^n) = 1 - \left[\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_{-\infty}^n) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_{-\infty}^n)\right],$$

onde os pesos sinápticos $W = (W_{i\to j} : i, j \in A)$ e as funções de disparo $\phi_i : \mathbb{N} \to [0, 1]$ satisfazem

$$W_{i\to i} = 0,\ W_{i\to j} \in \{0, 1\},\ \text{para } i, j \in \{1, 2\} \text{ e } \sum_{i=1}^{2} \phi_i(u_i) < 1,\ \text{para todo}\ \ u_i \geq 0,\ i = 1, 2.$$

Na definição acima, para cada $i = 1, 2$, $L_n^i = \sup\{m \leq n : X_m = i\}$. Definimos, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $L_n = \min\{L_n^1, L_n^2\}$.

Dada uma sequência $a_{-k}^{-1} \in A^k$, $k \geq 1$, definimos $\mu(a_{-k}^{-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_{n-k+1}^n = a_{-k}^{-1} | X_{-1} = 1, X_{-2} = 2)$.

Dada uma amostra X_1^n, uma sequência $a_{-k}^{-1} \in A^k$, $k \geq 1$, definimos $\hat{p}_n(a_{-k}^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k+1} \mathbb{1}_{\{X_t^{t+k-1} = a_{-k}^{-1}\}}$.

1. Considere a cadeia estocástica $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, com $\phi_i(0) \geq \delta > 0,\ i = 1, 2$. Fixe um contexto w da árvore de contextos τ associada $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, e diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:
   (a) $\mu(w)$ existe mas depende dos símbolos $\{X_{-2} = 2, X_{-1} = 1\}$.
   (b) $\mu(w)$ não existe.
   (c) $\mu(w)$ existe e não depende dos símbolos $\{X_{-2} = 2, X_{-1} = 1\}$.
   (d) Nenhuma das respostas anteriores.

2. Se os pesos sinápticos são tais que $W_{1\to 2} = 1, W_{2\to 1} = 0$ e as funções de disparo satisfazem, para $u \geq 0$, $\phi_1(u) = \phi_2(u) = \frac{1-(0.8)^{u+1}}{2}$, então $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma cadeia de alcance variável que associa ao "passado" $X_{-\infty}^n$ o contexto
   (a) $X_{L_n^1}^n$
   (b) $X_{L_n^2}^n$
   (c) $X_{L_n}^n$
   (d) Nenhuma das respostas anteriores.

3. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ com $\phi_1(u) = \frac{1-(0.8)^{u+1}}{2}$ e $\phi_2(u) = \frac{1-\rho^{u+1}}{2}$, onde $\rho \in (0,1)$ e $u \geq 0$. Sob essas condições, diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   (a) $\mu(2)$ é uma função estritamente crescente de ρ.

   (b) $\mu(2)$ é uma função estritamente decrescente de ρ.

   (c) $\mu(2) = 1/2$ para qualquer valor de ρ.

   (d) Nenhuma das respostas anteriores.

4. Se os pesos sinápticos são tais que $W_{1\to 2} = 1, W_{2\to 1} = 1$ e as funções de disparo satisfazem, para $u \geq 0$, $\phi_1(u) = \phi_2(u) = \frac{1-(0.8)^{u+1}}{2}$, então $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma cadeia de alcance variável que associa ao "passado" $X_{-\infty}^{n}$ o contexto

   (a) $X_{L_n^1}^{n}$

   (b) $X_{L_n^2}^{n}$

   (c) $X_{L_n}^{n}$

   (d) Nenhuma das respostas anteriores.

5. Sejam $U_{n+1}(i) = \sum_{j=1}^{2} W_{j\to i} \sum_{s=L_n^i}^{n} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}$ o potencial de interação do neurônio $i = 1, 2$ e $U_n = (U_n(1), U_n(2))$ o vetor dos potenciais no instante n, com $W_{1\to 2} = 1$ e $W_{2\to 1} = 1$. Assinale a alternativa correta.

   (a) $\mathbb{P}(U_n = (u+1, 0) | U_{n-1} = (u, 0)) = \phi_1(u)$

   (b) $\mathbb{P}(U_n = (u+1, 0) | U_{n-1} = (u, 0)) = \phi_2(u)$

   (c) $\mathbb{P}(U_n = (u+1, 0) | U_{n-1} = (u, 0)) = 1 - \phi_1(u)$

   (d) Nenhuma das anteriores.

6. Considerando que $W_{1\to 2} = 1$ e $W_{2\to 1} = 1$, assinale a alternativa correta:

   (a) Se $X_n = 0$, então $L_n = L_{n-1}$.

   (b) Se $X_n = 1$, então $L_n = L_{n-1}$.

   (c) Se $X_n = 2$, então $L_n = L_{n-1}$.

   (d) Nenhuma das respostas anteriores.

7. Escreva os valores de $\frac{N_{10^4}(211)}{N_{10^4-1}(21)} =$ .... e $\frac{N_{10^4}(122)}{N_{10^4-1}(12)} =$ .... obtidos na sua simulação. Os valores obtidos correspondem a nossa expectativa porque:

   (a) a diferença em valor absoluto das frequências relativas $\frac{N_{10^4}(211)}{N_{10^4-1}(21)}$ e $\frac{N_{10^4}(122)}{N_{10^4-1}(12)}$ é grande, já que cada uma delas converge para probabilidades de transição associadas a contextos diferentes.

   (b) ao menos uma das frequências relativas $\frac{N_{10^4}(211)}{N_{10^4-1}(21)}$ e $\frac{N_{10^4}(122)}{N_{10^4-1}(12)}$ é próxima de $1/2$, o que segue da simetria da cadeia estocástica $(X_n)_{n\geq 0}$.

   (c) as frequências relativas $\frac{N_{10^4}(211)}{N_{10^4-1}(21)}$ e $\frac{N_{10^4}(122)}{N_{10^4-1}(12)}$ são estatisticamente próximas, como era de se esperar, já que $\phi_1 = \phi_2$, $W_{1\to 2} = 1, W_{2\to 1} = 1$ e o estimador de máxima verossimilhança é consistente.

   (d) Nenhuma das alternativas anteriores

8. Seja $U_n = (U_n(1), U_n(2))$ o vetor dos potenciais no instante n e $Z_n = U_n(1) + U_n(2)$. Sob a hipótese de que $W_{1\to 2} = 1, W_{2\to 1} = 1$ e $\phi_1 = \phi_2$, pode-se afirmar que

   (a) A cadeia estocástica $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia de alcance variável cuja árvore de contextos é $\tau = \{1\} \cup \{120^k : k \geq 1\}$.

   (b) A cadeia estocástica $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia de Markov de alcance 1 cujas probabilidades de transição são dadas por $p(u+1|u) = \phi(0), p(u|u) = 1 - [\phi(0) + \phi(u)]$ e $p(1|u) = \phi(u)$ para todo $u \geq 1$.

   (c) A cadeia estocástica $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia de alcance variável cuja árvore de contextos é $\tau = \{2\} \cup \{210^k : k \geq 1\}$.

   (d) Nenhuma das alternativas anteriores.

9. Defina W_n como o contexto associado ao "passado" $X_{-\infty}^n$. Suponhamos que $W_n = w_{-k}^{-1}$, com $w_{-k} = 1$, $w_{-1} = 2$ e $k > 1$ fixado. Diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   (a) $\mathbb{P}(W_{n+1} = 21 | W_n = w_{-k}^{-1}) \geq \phi_1(1)$

   (b) $\mathbb{P}(W_{n+1} = 21 | W_n = w_{-k}^{-1}) \geq \phi_2(1)$

   (c) $\mathbb{P}(W_{n+1} = 21 | W_n = w_{-k}^{-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

   (d) Nenhuma das anteriores.

10. Escreva os valores de $\hat{p}_{10^4}(1) =$ .... e $\hat{p}_{10^4}(2) =$ .... obtidos na sua simulação. Esses resultados estão conforme a expectativa porque

   (a) as frequências relativas $\hat{p}_{10^4}(1)$ e $\hat{p}_{10^4}(2)$ são estatisticamente próximas, uma vez que $\phi_1 = \phi_2$, $W_{1\to 2} = 1$ e $W_{2\to 1} = 1$.

   (b) ao menos uma das frequências relativas $\hat{p}_{10^4}(1)$ e $\hat{p}_{10^4}(2)$ é próxima de $1/2$, como já era de se esperar, pois $W_{1\to 2} = 1, W_{2\to 1} = 1$ e $\phi_1 = \phi_2$.

   (c) a diferença em valor absoluto das frequências relativas $\hat{p}_{10^4}(1)$ e $\hat{p}_{10^4}(2)$ é grande, já que as variáveis $(X_n)_{n\geq 0}$ não são independentes e, portanto, a Lei dos Grandes Números não se aplica.

   (d) Nenhuma das alternativas anteriores