MAE 326 - Sessão de perguntas 1 (Turma A)

12 de novembro de 2013

Em cada questão uma e só uma opção é correta. A nota final da prova será calculada pela fórmula $P = (1/2)\max\{0, C - E/3\}$, sendo C o número de respostas certas e E o número de respostas erradas. Respostas rasuradas serão consideradas como se estivessem em branco e não entrarão no cálculo da nota.

Notações e definições básicas

Nas probabilidades de transição, o passado é indicado do símbolo mais recente ao símbolo mais remoto:

$$\mathbb{P}\{X_0 = b | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}\} = p(b|a_{-k}^{-1}) = p(b|a_{-1}, ..., a_{-k}), \text{ para } a \in A \text{ e } a_{-k}^{-1} = (a_{-k}, ..., a_{-1}) \in A^k.$$

Já os contextos são indicados na ordem "natural",

$$a_{-k}, ..., a_{-1} = \{X_{-k} = a_{-k}, ..., X_{-1} = a_{-1}\}.$$

Dada uma amostra $(X_0, \dots, X_n)$ de símbolos de A, seja $N_n(a_{-k}^{-1})$ o número de vezes que a sequência $a_{-k}^{-1} \in A^k$ aparece na amostra, ou seja,

$$N_n(a_{-k}^{-1}) = \sum_{t=0}^{n-k+1} \mathbf{1}\{X_t^{t+k-1} = a_{-k}^{-1}\}.$$

Algoritmo Contexto:

Dada uma amostra $X_0^n = (X_0, \dots, X_n)$ de símbolos do alfabeto $A = \{0, 1\}$, definimos para uma sequência $w = w_{-k}^{-1} \in A^k$ com $k < \ln n$ a seguinte quantidade

$$\Delta_n(w_{-k}^{-1}) = \max_{a,b \in A} \left| \hat{p}_n(a|w_{-k}^{-1}) - \hat{p}_n(a|w_{-k}^{-1}b) \right| .$$

Fixado $\delta \in (0, 1)$, se $\Delta_n(w_{-k}^{-1}) < \delta$, podamos os símbolos mais remotos (representados pela letra b) das sequências $\{bw_{-k}^{-1} : b \in A\}$. Caso contrário, mantemos as sequências $\{bw_{-k}^{-1} : b \in A\}$.

1. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov de alcance 1, assumindo valores no alfabeto $A = \{0, 1\}$, com matriz de probabilidades de transição $p = \{p(a|b) : a, b \in A\}$ assim definida: $p(1|1) = p(0|0) = \frac{4}{5}$. Diga qual das seguintes afirmações é correta:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} 1\{X_{t-1} = 1 = X_t\} = \frac{2}{5}$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} 1\{X_{t-1} = 1 = X_t\} = \frac{1}{2}$.

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} 1\{X_{t-1} = 1 = X_t\} = 0$.

   (d) Nenhuma das respostas anteriores.

2. Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias iid, assumindo valores no alfabeto $A = \{0,1\}$, satisfazendo

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y_n = 0).$$

Sob essas condições, diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) $\mathbb{P}(50 \leq \sum_{n=1}^{200} Y_n \leq 150) < 0.98$

(b) $\mathbb{P}(50 \leq \sum_{n=1}^{200} Y_n \leq 150) \geq 0.98$

(c) $\mathbb{P}(50 \leq \sum_{n=1}^{200} Y_n \leq 150) = 0.5$

(d) Nenhuma das respostas anteriores.

3. Dada uma amostra $X = (X_0, \cdots, X_{1000})$ gerada por um algoritmo aleatório, obteve-se os seguintes valores das funções de contagem:

$a_0\ a_1\ a_2$	$N_{1000}(a_0a_1a_2)$
0 0 0	118
0 0 1	114
0 1 0	274
1 0 0	113
0 1 1	69
1 0 1	229
1 1 0	68
1 1 1	14

$a_0\ a_1$	$N_{1000}(a_0a_1)$	$N_{999}(a_0a_1)$
0 0	232	232
0 1	343	343
1 0	342	342
1 1	83	82

a_0	$N_{1000}(a_0)$	$N_{999}(a_0)$
0	575	575
1	426	425

Utilizando o Algoritmo Contexto com $\delta = 0.1$, no critério de poda, a árvore de contextos estimada $\hat{\tau}$, detre todas as árvores de contexto cuja altura é não superior a 2, é:

(a) $\hat{\tau} = \{\{X_{-1} = 0\}, \{X_{-1} = 1\}\}$

(b) $\hat{\tau} = \{\{X_{-1} = 0\}, \{X_{-2} = 0, X_{-1} = 1\}, \{X_{-2} = 1, X_{-1} = 1\}\}$

(c) $\hat{\tau} = \{\{X_{-1} = 1\}, \{X_{-2} = 0, X_{-1} = 0\}, \{X_{-2} = 1, X_{-1} = 0\}\}$

(d) Nenhuma das respostas anteriores.

4. Seja X_0^n uma amostra gerada por uma cadeia de alcance variável assumindo valores no alfabeto $A = \{0,1\}$. Queremos usar o Algoritmo Contexto para estimar a árvore probabilística de contextos que gerou esta amostra. Sob a hipótese nula

H_0 : A sequência 00 é um contexto e $p(.\,|\,00)$ é a probabilidade de transição associada a esse contexto,

e, fixado $\delta > 0$, assinale a alternativa correta:

(a) $\mathbb{P}(|\hat{p}_n(1|00) - \hat{p}_n(1|000)| > \delta) \leq \mathbb{P}(|\hat{p}_n(1|00) - p(1|00)| > \frac{\delta}{2}) + \mathbb{P}(|\hat{p}_n(1|000) - p(1|000)| > \frac{\delta}{2})$

(b) $\mathbb{P}(|\hat{p}_n(1\,|\,00) - \hat{p}_n(1\,|\,000)| > \delta) \leq \mathbb{P}(|\hat{p}_n(1\,|\,00) - p(1\,|\,00)| > \frac{\delta}{2}) + \mathbb{P}(|\hat{p}_n(1\,|\,0) - p(1\,|\,0)| > \frac{\delta}{2})$

(c) $\mathbb{P}(|\hat{p}_n(1\,|\,00) - \hat{p}_n(1\,|\,000)| > \delta) > \mathbb{P}(|\hat{p}_n(1\,|\,0) - p(1\,|\,0)| > \frac{\delta}{2})$

(d) Nenhuma das respostas anteriores.

5. Considere o processo estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assumindo valores em A, onde $A = \{0, 1, 2\}$ e com probabilidades de transição definidas por

$$\mathbb{P}\{X_n = i|X_{-\infty}^{n-1}\} = \phi\left(\sum_{j=1}^{2} W_{j\to i} \sum_{t=L_{n-1}^i}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\right), i = 1, 2$$

e $\mathbb{P}\{X_n = 0|X_{-\infty}^{n-1}\} = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 1|X_{-\infty}^{n-1}\} - \mathbb{P}\{X_n = 2|X_{-\infty}^{n-1}\}$, onde os pesos sinápticos são dados por $W_{1\to1} = 0, W_{1\to2} = 1, W_{2\to1} = 0, W_{2\to2} = 0$, $L_m^i = \sup\{t \leq m : X_t = i\}$ e a função de disparo $\phi(u)$ satisfaz $1 > \phi(u) > 0$ para todo $u \geq 0$.

Sob essas condições, podemos afirmar que a probabilidade condicional

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2|X_{-1} = 0, X_{-2} = 1, X_{-3} = 2) \text{ vale:}$$

(a) $\phi^2(0)$
(b) $\phi(0)\phi(1)$
(c) $1/2$
(d) Nenhuma das anteriores.

6. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a cadeia de alcance variável assumindo valores em $A = \{0, 1\}$, com árvore de contextos $\tau = \{10^k : k = 0, 1, \ldots\} \cup \{0^\infty\}$ e com probabilidades de transição assim definida

$$p(1|0^k1) = q_k, \text{ onde } q_k \in]0, 1[, k \geq 0, \text{ e } p(1|0^\infty) = 0.$$

Assinale a alternativa correta.

(a) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 0|X_0 = 1) = q_0^2(1 - q_0)(1 - q_1)q_2$
(b) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 0|X_0 = 1) = q_0(1 - q_0)(1 - q_1)q_1q_2$
(c) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 0|X_0 = 1) = q_0(1 - q_0)^2(1 - q_1)q_2$
(d) Nenhuma das anteriores.