MAE 326 - Lista de Exercícios 1

Prof. Antonio Galves

2 de agosto de 2013

1. Seja $(X_n)_{n\geq -1}$ uma evolução Markoviana assumindo valores no alfabeto $A = \{0, 1\}$ e que pode ser simulada através do seguinte algoritmo:

   Passo 1. $X_{-1} = 0$;

   Passo 2. Para $n \geq 0$, definimos $X_n = 0$, se $U_n \leq h(X_{n-1})$, onde $h(0) = 1/3$ e $h(1) = 1/5$, e $X_n = 1$, se $U_n > h(X_{n-1})$,

   onde $(U_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

   (a) Qual é a matriz de probabilidades de transição desta cadeia de Markov?

   (b) Calcule $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1|X_{-1} = 0)$. (Dica: *Utilize o resultado do item (a).*)

2. Dado $a \in \{1, 2, 3\}$ definimos a sequência $\{X_n\}_{n=-1}^{\infty}$ por:

$$\begin{aligned} X_{-1} &= 1 \\ X_n &= F(X_{n-1}, U_n), \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

   onde $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme em $(0, 1)$ e $F(x, u)$ está definida por:

$$F(x,u) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq u < h_1(x) \\ 2, & \text{se } h_1(x) \leq u < h_2(x) \\ 3, & \text{se } h_2(x) \leq u \leq 1 \end{cases}$$

   onde

$$h_1(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = 1 \\ 1/3, & \text{se } x = 2 \\ 1/4, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

e

$$h_2(x) = \begin{cases} 3/4, & \text{se } x = 1 \\ 2/3, & \text{se } x = 2 \\ 1/2, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

(a) Calcule as probabilidades de transição desta cadeia de Markov.

(b) Calcule sua ou suas probabilidades invariantes.

(c) Diga tudo que puder sobre essa cadeia de Markov (irredutibilidade, aperiodicidade etc.).

3. Seja p a matriz de probabilidades de transição em $A = \{1, 2, 3\}$, assim definida

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Queremos simular uma realização da cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq -1}$ assumindo valores no alfabeto A e tendo o símbolo 1 como estado inicial (ou seja, $X_{-1} = 1$).

(a) Proponha um algoritmo de simulação para esta cadeia.

(b) A partir do algoritmo proposto em (a), simule uma realização dos doze primeiros símbolos desta cadeia, ou seja, simule uma realização da sequência $(X_{-1}, \ldots, X_{10})$.

(c) A cadeia é irredutível? É aperiódica?

(d) A cadeia admite alguma probabilidade invariante? Se a resposta for sim, calcule-a. Ela é única?

4. Dada a amostra

$$X_{-1} = 0, X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 0, X_6 = 1, X_7 = 1, X_8 = 1, X_9 = 0,$$

(a) Determine $\hat{p} \in \mathcal{M}_0(\{0, 1\})$ que maximiza a verossimilhança.

(b) Calcule a verossimilhança, supondo que $\mathbb{P}(X_{-1} = 0) = 1$ e que $(X_t)_{t=-1,0,1,\ldots,10}$ é uma cadeia de Markov de ordem 1 assumindo valores no alfabeto $A = \{0,1\}$, com matriz de transição P dado por

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Em seguida, determine $\hat{p} \in \mathcal{M}_1(A)$ que maximiza a verossimilhança.

(c) Suponha agora que $\mathbb{P}(X_{-1} = 0, X_0 = 1) = 1$ e que $(X_t)_{t=-1,0,1,\ldots,10}$ é uma cadeia de Markov de ordem 2 assumindo valores no alfabeto $A^2 = \{0,1\}^2$, com matriz de transição $p = \{p(a|x_{-2}^{-1}) : a \in A, x_{-2}^{-1} \in A^2\}$ com

a	$p(a\|00)$	$p(a\|01)$	$p(a\|10)$	$p(a\|11)$
0	0.7	0.5	0.4	0.8
1	0.3	0.5	0.6	0.2

Calcule a verossimilhança da amostra. Em seguida, determine $\hat{p} \in \mathcal{M}_2(A^2)$ que maximiza a verossimilhança.

5. Seja $(X_n)_{n\geq -1}$ uma cadeia de Markov assumindo valores no alfabeto $A = \{0,1,2\}$, tendo o símbolo 1 como estado inicial e tendo matriz de probabilidades de transição p assim definida :

$$p = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} .$$

Prove que

$$\mathbb{P}\{X_n = 1\} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \text{ para todo } n \geq 1 .$$

6. Seja $X_0, X_1 \cdots$, a sequência, assumindo valores no conjunto $\{-1,+1\}$, assim definida:

1. X_0 é escolhido aleatoriamente com $\mathbb{P}(X_0 = +1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = 1/2$

2. Para todo $n \geq 1$, $X_n = -X_{n-1}$.

Seja também $(\xi_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias iid e independentes de X_0 assumindo valores no conjunto { "apaga", "mantém"} com $\mathbb{P}(\xi_n =$ "apaga"$) = \varepsilon$, onde $\varepsilon \in (0,1)$ é um parâmetro fixado.

Definimos a cadeia estocática Y_n assumindo valores no conjunto $\{-1, 0, +1\}$ da seguinte maneira:

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } X_n = -1 \text{ e } \xi_n = \text{ “apaga”} \\ X_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando esse mecanismo geramos a sequência:

$$(Y_0, \cdots, Y_9) = (0, +1, -1, +1, 0, +1, -1, +1, 0, +1)$$

Determine valor de ε que maximiza a probabilidade dessa sequência.

7. Seja $(X_n)_{n\geq -2}$ uma evolução Markoviana com memória de alcance 2 assumindo valores no alfabeto $A = \{0, 1\}$ e que pode ser simulada através do seguinte algoritmo:

   Passo 1. $X_{-2} = 1$ e $X_{-1} = 0$;

   Passo 2. Para $n \geq 0$, definimos

   $$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se } U_n \leq h(X_{n-2}, X_{n-1}) \\ 1, & \text{se } U_n > h(X_{n-2}, X_{n-1}) \end{cases}$$

   onde $h(0,0) = 1/2$, $h(0,1) = 1/3$, $h(1,0) = 1/4$ $h(1,1) = 1/5$ e $(U_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

   (a) Qual é a matriz de probabilidades de transição desta cadeia de Markov de ordem 2?

   (b) Calcule $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.

8. Considere a cadeia estocástica $(X_n)_{n\geq -2}$ definida no exercício anterior. Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ a cadeia estocástica tomando valores no alfabeto $S = \{0, 1\}^2$ satisfazendo $Y_n = (X_{n-2}, X_{n-1})$.

   (a) Observe que $(Y_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov de ordem 1.

   (b) Determine a matriz de transição desta cadeia de Markov.

   (c) O que podemos dizer a respeito de cadeias de Markov de alcance 1 em A^k construidas a partir de cadeias de alcance k em A?

9. Seja $(X_n)_{n\geq -1}$ uma cadeia de Markov assumindo valores num alfabeto finito A com a matrix de probabilidades de transição $p = (p(i|j) : i, j \in A)$. Uma medida de probabilidade μ definida em A é dita reversível com respeito a p se para todo par de elementos i e j de A valer a igualdade

$$\mu(i)p(j|i) = \mu(j)p(i|j).$$

Mostre que se μ é reversível com respeito a matrix p, então μ é invariante com respeito a p.

10. Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ a sequência definida por

$$X_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 3k, k = 0, 1, 2... \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $(\xi_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas tomando valores no alfabeto $A = \{0, 1\}$, tais que $\mathbb{P}(\xi = 0) = \varepsilon$. Considere a cadeia de estocástica $(Y_n)_{n\geq 0}$ definida como

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{se } X_n = 2 \\ X_n\xi_n & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $(Y_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov de ordem 2.