MAE 326 - Lista de Exercícios 5

Prof. Antonio Galves

8 de novembro de 2013

Algoritmo Contexto:

Dada uma amostra $X_0^n = (X_0, \ldots, X_n)$ de símbolos do alfabeto $A = \{0,1\}$, definimos para uma sequência $w = w_{-k}^{-1} \in A^k$ com $k < \ln n$ a seguinte quantidade

$$\Delta_n(w_{-k}^{-1}) = \max_{a,b \in A} \left| \hat{p}_n(a|w_{-k}^{-1}) - \hat{p}_n(a|w_{-k}^{-1}b) \right| .$$

Fixado $\delta \in (0,1)$, se $\Delta_n(w_{-k}^{-1}) < \delta$, então podamos os símbolos mais remotos (representados pela letra b) das sequências $\{bw_{-k}^{-1} : b \in A\}$. Caso contrário, mantemos as sequências $\{bw_{-k}^{-1} : b \in A\}$.

1. Dada uma amostra $X = (X_0, \cdots, X_{1000})$ gerada por um algoritmo aleatório, obteve-se os seguintes valores das funções de contagem:

a_0	a_1	a_2	$N_{1000}(a_0a_1a_2)$
0	0	0	118
0	0	1	114
0	1	0	274
1	0	0	113
0	1	1	69
1	0	1	229
1	1	0	68
1	1	1	14

a_0	a_1	$N_{1000}(a_0a_1)$	$N_{999}(a_0a_1)$
0	0	232	232
0	1	343	343
1	0	342	342
1	1	83	82

a_0	$N_{1000}(a_0)$	$N_{999}(a_0)$
0	575	575
1	426	425

Utilizando o Algoritmo Contexto com $\delta = 0.1$, no critério de poda, qual é a árvore de contextos estimada $\hat{\tau}$, detre todas as árvores de contexto cuja altura é não superior a 2?

2. Considere uma amostra $(X_1, \ldots, X_{50})$ de símbolos pertencente ao alfabeto $A = \{0, 1\}$. Queremos estimar a "melhor árvore probabilística de contextos"usando o Algoritmo Contexto visto em aula. Para tanto, usando o fato de que $3 < \ln 50 < 4$, consideramos as contagens das sequências de tamanho menor ou igual a 4 para a realização do algoritmo:

$$N_{50}(0) = 34 \ ; \ N_{50}(1) = 16$$

$$N_{50}(00) = 24 \ ; \ N_{50}(01) = 9 \ ; \ N_{50}(10) = 9 \ ; \ N_{50}(11) = 7$$

$$\begin{gathered} N_{50}(000) = 16 \ ; \ N_{50}(001) = 7 \ ; \ N_{50}(010) = 3 \ ; \ N_{50}(011) = 6 \\ N_{50}(100) = 7 \ ; \ N_{50}(101) = 2 \ ; \ N_{50}(110) = 6 \ ; \ N_{50}(111) = 1 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} N_{50}(0000) = 11 \ ; \ N_{50}(0001) = 5 \ ; \ N_{50}(0010) = 2 \ ; \ N_{50}(0011) = 5 \\ N_{50}(0100) = 2 \ ; \ N_{50}(0101) = 1 \ ; \ N_{50}(0110) = 5 \ ; \ N_{50}(0111) = 1 \\ N_{50}(1000) = 5 \ ; \ N_{50}(1001) = 1 \ ; \ N_{50}(1010) = 1 \ ; \ N_{50}(1011) = 1 \\ N_{50}(1100) = 5 \ ; \ N_{50}(1101) = 1 \ ; \ N_{50}(1110) = 1 \ ; \ N_{50}(1111) = 0 \end{gathered}$$

   (a) Termine o Algoritmo Contexto no caso $\delta = 0,25$. Dê a árvore final e sua respectiva família de probabilidades de transição estimadas.

   (b) Repita o procedimento do item (a) para $\delta = 0,15$, $\delta = 0,20$ e $\delta = 0,30$. Caso haja diferença entre as árvores estimadas, comente como o valor de δ afeta o formato das árvores.

3. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de símbolos pertencentes ao alfabeto $A = \{0, 1\}$ e gerada por algum mecanismo aleatório. Obteve-se uma amostra dos 11 primeiros símbolos dessa sequência:

$$(X_1, \ldots, X_{11}) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) .$$

   Qual é a árvore de contextos $\hat{\tau}$ obtida a partir da aplicação da versão do Algoritmo Contexto com $\delta = 0.150$ no critério de poda? (Observação: Use o fato de que $2 < \ln 11 < 3$.)

4. Considere o processo estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assumindo valores em A, onde $A = \{0,1,2\}$ e com probabilidades de transição definidas por

$$\mathbb{P}\{X_n = i | X_{-\infty}^{n-1}\} = \phi\left(\sum_{j=1}^{2} W_{j\to i} \sum_{t=L_n^i+1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\right), i = 1,2$$

e

$$\mathbb{P}\{X_n = 0 | X_{-\infty}^{n-1}\} = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 1 | X_{-\infty}^{n-1}\} - \mathbb{P}\{X_n = 2 | X_{-\infty}^{n-1}\},$$

onde $W_{1\to1} = 0, W_{1\to2} = 1, W_{2\to1} = 0,\ W_{2\to2} = 0$ e

$$L_n^i = \sup\{t < n : X_t = i\},$$

é o instante do último de disparo do neurônio i antes do instante n e

$$\phi : \{0,1,\ldots\} \to [0,1]$$

é definida por $\phi(u) = (1 - \beta e^{-\alpha u})$ com $\alpha > 0$ e $\beta \in (0,1)$ constantes fixadas.

   (a) Determine os contextos associados a este modelo.
   (b) Determine as probabilidades de transições de todos os contextos de tamanho menor ou igual a 3.

5. Considere o processo estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assumindo valores em A, onde $A = \{0,1,2\}$ e com probabilidades de transição definidas por

$$\mathbb{P}\{X_n = i | X_{-\infty}^{n-1}\} = \phi\left(\sum_{j=1}^{2} W_{j\to i} \sum_{t=L_n^i+1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\right), i = 1,2$$

e

$$\mathbb{P}\{X_n = 0 | X_{-\infty}^{n-1}\} = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 1 | X_{-\infty}^{n-1}\} - \mathbb{P}\{X_n = 2 | X_{-\infty}^{n-1}\},$$

onde $W_{1\to1} = 0, W_{1\to2} = 1, W_{2\to1} = 1,\ W_{2\to2} = 0$ e

$$L_n^i = \sup\{t < n : X_t = i\},$$

é o instante do último de disparo do neurônio i antes do instante n e

$$\phi : \{0,1,\ldots\} \to [0,1]$$

é definida por $\phi(u) = (1 - \beta e^{-\alpha u})$ com $\alpha > 0$ e $\beta \in (0,1)$ constantes fixadas.

(a) Determine os contextos associados a este modelo.

(b) Determine as probabilidades de transições de todos os contextos de tamanho menor ou igual a 3.

6. Considere o processo estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assumindo valores em A, onde $A = \{0, 1, 2\}$ e com probabilidades de transição definidas por

$$\mathbb{P}\{X_n = i | X_{-\infty}^{n-1}\} = \phi\left(\sum_{j=1}^{2} W_{j\to i} \sum_{t=L_n^i+1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}, n - L_n^i\right), i = 1, 2$$

e

$$\mathbb{P}\{X_n = 0 | X_{-\infty}^{n-1}\} = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 1 | X_{-\infty}^{n-1}\} - \mathbb{P}\{X_n = 2 | X_{-\infty}^{n-1}\},$$

onde $W_{1\to 1} = 0, W_{1\to 2} = 1, W_{2\to 1} = 1$, $W_{2\to 2} = 0$ e

$$L_n^i = \sup\{t < n : X_t = i\},$$

é o instante do último de disparo do neurônio i antes do instante n e

$$\phi : \{0, 1, \ldots\} \times \{1, 2, \ldots\} \to [0, 1]$$

é definida por $\phi(u, d) = (1 - \beta e^{-\alpha(u+d)})$ com $\alpha > 0$ e $\beta \in (0, 1)$ constantes fixadas.

(a) Determine os contextos associados a este modelo.

(b) Determine as probabilidades de transições de todos os contextos de tamanho menor ou igual a 3.