MAE 326 - Lista de Exercícios 3

Prof. Antonio Galves

13 de setembro de 2013

1. Seja $(Z_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov de alcance 1 assumindo valores no alfabeto $B = \{0,1\}^2$ e com matriz de probabilidades de transição Q dada por

$$\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array} .$$

   Nessas condições, verifique que a matriz Q define uma cadeia de alcance variável que assume valores no alfabeto $A = \{0,1\}$ e com árvore de contextos dada por

$$\tau = \{\{w_{-1} = 0\}, \{w_{-2} = 0, w_{-1} = 1\}, \{w_{-2} = 1, w_{-1} = 1\}\}.$$

2. Sejam $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov assumindo valores no alfabeto $A = \{0,1\}$ e $(\xi_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e assumindo valores no conjunto A, independente da cadeia $(X_n)_n$ e tal que

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = 1 - \epsilon\,,$$

   onde $0 < \epsilon < 1$. Definimos uma nova sequência $(Z_n)_{n\geq 0}$ da seguinte forma:

$$Z_n = X_n \xi_n \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

   Sob estas condições, mostre que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = 1 | Z_{n-1} = 1) &= \mathbb{P}(Z_n = 1 | Z_{n-1} = 1, Z_{n-2} = 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_n = 1 | Z_{n-1} = 1, Z_{n-2} = 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = 1 | Z_{n-1} = 0, Z_{n-2} = 1) &= \mathbb{P}(Z_n = 1 | Z_{n-1} = 0, Z_{n-2} = 1, Z_{n-3} = 0)\\ &= \mathbb{P}(Z_n = 1 | Z_{n-1} = 0, Z_{n-2} = 1, Z_{n-3} = 1)\end{aligned}$$

3. Sejam $k, n \geq 1$ dois números inteiros, $X_{-k}^n = (X_{-k}, \ldots, X_n)$ uma amostra de uma cadeia com memória de alcance variável definida em um alfabeto A finito com árvore de contextos τ. Suponhamos que $X_{-k}^{-1} = w \in \tau$, isto é, X_{-k}^{-1} é um contexto da árvore τ, definimos para cada $a \in A$,

$$N_{[0,n]}(wa) = \sum_{t=0}^{n} \mathbf{1}\{X_{t-|w|}^{t-1} = w, X_t = a\},$$

como sendo o número de vezes que o símbolo a é precedido pelo contexto w na amostra X_0^n.

Seja (X_k) uma cadeia com memória de alcance variável, assumindo valores no alfabeto finito $A = \{0, 1\}$, tendo como árvore de contextos

$$\tau = \{\{w_{-1} = 1\}, \{w_{-2} = 1, w_{-1} = 0\}, \{w_{-2} = 0, w_{-1} = 0\}\}$$

e tendo família associada de probabilidades de transição definida por

$$p(1 \,|\, 1) = \alpha \,, p(1 \,|\, 01) = \beta \;\text{ e }\; p(1 \,|\, 00) = \gamma \,,$$

onde α, β e γ são tres parâmetros pertencentes ao intervalo aberto $(0, 1)$.

(a) Suponhamos que a amostra gerada foi

$$X_{-1}^{10} = x_{-1}^{10} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Supondo que $\mathbb{P}(X_{-1} = 1) = 1$, diga quanto vale $\mathbb{P}(X_1^{10} = x_{-1}^{10})$.

(b) Verifique que $\sum_{a \in A} N_{[0,n]}(wa) = N_{[0,n-1]}(w)$.

(c) Verifique que $\sum_{w \in \tau} \sum_{a \in A} N_{[0,n]}(wa) = n + 1$

4. Nas condições do Exercício 3, encontre as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α, β e γ.

5. Seja $(X_0, \ldots, X_n)$ uma amostra de uma cadeia de alcance variável assumindo valores no alfabeto $A = \{0, 1\}$, com árvore de contextos $\tau = \{\{X_{-1} = 0\}, \{X_{-2} = 0, X_{-1} = 1\}, \{X_{-2} = 1, X_{-1} = 1\}\}$ e com família de probabilidades de transição p dada por

$$p(0 \,|\, 0) = 0,4\,, p(0 \,|\, 10) = 0,2 \text{ e } p(0 \,|\, 11) = 0,6\,.$$

Nessas condições, quanto vale

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_{[0,n]}(000)}{N_{[0,n-1]}(00)}.$$