Notas de Aula de Aplicações de Processos Estocásticos

Prof. Antonio Galves
Transcrito por Giovanna A. de A. Isolani

2ºSemestre de 2013

Dada uma amostra X_{-k}^{n}=a_{-k}^{n},supondo que ela foi gerada por p$\in\mathcal{M}_k$ (A), calcular a verossimilhança da amostra

$$\mathbb{P}\{X_0^n = a_0^n | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}\}$$

$$= \Pi_{t=0}^{n} \mathbb{P}\{X_t = a_t | X_{-k}^{t-1} = a_{-k}^{t-1}\} \tag{1}$$

Lembrando que $X_t = f(X_{t-k}^{t-1}, U_t)$, logo

$$(1) = \Pi_{t=0}^{n} \mathbb{P}\{X_t = b | X_{t-k}^{t-1} = a_{t-k}^{t-1}\}$$

e

$$\mathbb{P}\{X_t = b | X_{t-k}^{t-1} = a_{t-k}^{t-1}\} = p(a_t | a_{t-k}^{t-1}).$$

Então,

$$(1) = \Pi_{t=0}^{n} p(a_t | a_{t-k}^{t-1})$$

$$= \Pi_{x_{-k}^{-1}} \Pi_y p(y | x_{-k}^{-1})^{N_{0:n}(x_{-k}^{-1} y)}$$

Onde,

$$N_{0:n}(x_{-k}^{-1} y) = \Sigma_{t=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{t-k}^{t-1} = x_{-k}^{-1}, X_t = y\}}$$

Para calcularmos verossimilhança, convém usarmos o logaritmo da função de verossimilhança. Assim,

$$\log \mathbb{P}\{X_0^n = a_0^n | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}\}$$

$$= \Sigma_{x_{-k}^{-1} \in A^k} \Sigma_{y \in A} N_{0:n}(x_{-k}^{-1} y) \log p(y | x_{-k}^{-1})$$

Sabemos pela Lei dos Grandes Números que

$$N_{0:n}(x_{-k}^{-1} y) = \Sigma_{t=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{t-k}^{t-1} = x_{-k}^{-1}, X_t = y\}} \backsimeq n \mathbb{P}\{X_{-k}^{-1} = x_{-k}^{-1}, X_0 = y\}$$

$$\mathbb{P}\{X_{-k}^{-1} = x_{-k}^{-1}, X_0 = y\} = \mathbb{P}\{X_{-k}^{-1} = x_{-k}^{-1}\} p(y | x_{-k}^{-1})$$

Sendo que $\mathbb{P}\{X_{-k}^{-1} = x_{-k}^{-1}\}$ é a probabilidade invariante.Agora,

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{X_0^n = a_0^n | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}\}$$

$$= \Sigma_{x_{-k}^{-1} \in A^k} \Sigma_{y \in A} \frac{N_{0:n}(x_{-k}^{-1} y)}{n} \log p(y | x_{-k}^{-1}) \overrightarrow{n \to \infty}$$

$$\overrightarrow{n \to \infty} \Sigma_{x_{-k}^{-1} \in A^k} \Sigma_{y \in A} \mu(x_{-k}^{-1}) p(y | x_{-k}^{-1} \log p(y | x_{-k}^{-1}) = -h(p)$$

Onde $\mu : A^k \to [0,1]$ é a probabilidade invariante com respeito à matriz P e -h(p) é a entropia da cadeia.

Então, para n grande,

$$\mathbb{P}\{X_0^n = a_0^n | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}\} \approx e^{-nh(p)}$$

Proposição: Uma Cadeia de Markov de alcance k em A com matriz p$\in \mathcal{M}_k$ (A) é uma Cadeia de Markov de alcance 1 no alfabeto $\bar{A} = A^k$ e tendo matriz $\bar{p} \in \mathcal{M}(\bar{A})$, onde $\bar{p}$ é $\mathbb{P}\{X_{-k+1}^0 = b_{-k+1}^0 | X_{-k}^{-1} = a_{-k}^{-1}\}$.
Calculamos $\mu : \bar{A} \to [0,1]$ invariante com respeito à $\bar{p}$.

$$\frac{1}{n} N_{0:n}(x_{-k}^{-1}) \to \mu(x_{-k}^{-1})$$

Teorema: $lim_{n\to\infty} L_n(p) \to \Sigma_{x_{-k}^{-1}\in A^k} \Sigma_{y\in A} \mu(x_{-k}^{-1}) p(y|x_{-k}^{-1} \log p(y|x_{-k}^{-1})$

$$= -h(p)$$

Dada uma amostra $X_{-k}^{n} = a_{-k}^{n}$, com k fixado.

$$p \in \mathcal{M}_k(A) \Longrightarrow L(p|a_{-k}^{n}) \in]-\infty, 0[$$

Sabemos que a amostra foi gerada por uma matriz $\bar{p} \in \mathcal{M}(\bar{A})$, mas não conhecemos $\bar{p}$.Queremos estimar $\bar{p}$.Para isso vamos introduzir o estimador de máxima verossimilhança.

$$\hat{p}_n = argmax\{L_p(x_{-k}^{n}) : p \in \mathcal{M}(A)\},$$

qué a matriz $\bar{p}$ em $\mathcal{M}$(A) que maximiza a função de verossimilhança.