Grupoides e Algebroides de Lie

Michael Forger

– São Paulo, 24 de Agosto de 2010 –

Conteúdo

Introdução - Aspectos Históricos e Motivação

Origem das noções: grupoides abstratos (Brandt, 1926), grupoides de Lie (Ehresmann, $\sim$ 1954), algebroides de Lie (Pradines, $\sim$ 1968).

Os conceitos de um grupoide de Lie e de um algebroide de Lie constituem uma generalização substancial dos conceitos de um grupo de Lie e de uma álgebra de Lie e, ao mesmo tempo, um refinamente das noções de uma folheação e de uma distribuição involutiva. A nova teoria que emana desses conceitos apresenta fortes analogias com a teoria clássica: por exemplo, a relação entre grupoides de Lie e algebroides de Lie é muito semelhante à relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie. Por outro lado, ela é muito mais abrangente e rica, unificando áreas até então distintos e oferecendo novas perspectivas sobre problemas clássicos, o que é motivação suficiente para o seu estudo no âmbito da matemática pura.

Além disso, esses conceitos são os mais adequados para descrever um tipo de simetria conhecida em Física como "simetria local", introduzido por Hermann Weyl, $\sim$ 1931) e hoje no centro das teorias de calibre, amplamente usadas em teorias de calibre que descrevem 3 das 4 interações fundamentais conhecidas em física (eletromagnética, fraca e forte) – a relatividade geral descreve a outra (gravitacional).

Introdução a ser elaborada com maiores detalhes.

Grupoides abstratos

Neste capítulo, que tem caráter preliminar, discutimos grupoides abstratos, isto é, grupoides sem nenhuma estrutura adicional (tal como uma topologia ou estrutura de variedade compatível). Introduzimos os conceitos básicos e apresentamos uma primeira série de exemplos; outros exemplos, que se enquadram melhor na teoria dos grupoides de Lie do que na dos grupoides abstratos, podem ser encontrados no próximo capítulo.

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1 Um **grupoide (abstrato)** é uma quíntupla $(G, M, \sigma, \tau, \mu)$, onde

(a) G e M são conjuntos chamados, respectivamente, de **espaço total** e **espaço base** do grupoide,

(b) $\sigma : G \to M$ e $\tau : G \to M$ são aplicações sobrejetoras chamadas, respectivamente, de **projeção fonte** e **projeção alvo** do grupoide,[1] sendo que a sua combinação

$$\begin{array}{rccc} \tau \times \sigma : & G & \longrightarrow & M \times M \\ & g & \longmapsto & (\tau(g), \sigma(g)) \end{array} \tag{1.1}$$

é chamada de **âncora** do grupoide,

(c) μ é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G^{(2)} & \longrightarrow & G \\ & (g_2, g_1) & \longmapsto & g_2 g_1 \end{array} , \tag{1.2}$$

onde

$$G^{(2)} = \{ (g_2, g_1) \in G \times G \mid \sigma(g_2) = \tau(g_1) \} , \tag{1.3}$$

chamada de **multiplicação** no grupoide, com

$$\tau(g_2 g_1) = \tau(g_2) \ , \ \sigma(g_2 g_1) = \sigma(g_1) \qquad \text{para } (g_2, g_1) \in G^{(2)} , \tag{1.4}$$

tais que:

[1] As letras σ e τ são escolhidos para sugerir que σ é a “source projection” e τ é a “target projection”.

1. A multiplicação é associativa, i.e., vale
$$g_3(g_2g_1) \;=\; (g_3g_2)g_1 \qquad \text{para } (g_3,g_2,g_1) \in G^{(3)} \;, \tag{1.5}$$
onde
$$G^{(3)} \;=\; \{\,(g_3,g_2,g_1) \in G\times G\times G \mid \sigma(g_3) = \tau(g_2)\;,\; \sigma(g_2) = \tau(g_1)\,\}\;. \tag{1.6}$$

2. Existe, em todo ponto $x \in M$, uma unidade bilateral $1_x \in G$ para a multiplicação, com
$$\tau(1_x) = x = \sigma(1_x) \qquad \text{para } x \in M\;, \tag{1.7}$$
tal que
$$g\,1_{\sigma(g)} \;=\; g \;=\; 1_{\tau(g)}\,g \qquad \text{para } g \in G\;. \tag{1.8}$$

3. Existe, para cada elemento $g \in G$, um inverso bilateral $g^{-1} \in G$ para a multiplicação, com
$$\sigma(g^{-1}) = \tau(g) \;\;,\;\; \tau(g^{-1}) = \sigma(g)\;, \tag{1.9}$$
tal que
$$g\,g^{-1} \;=\; 1_{\tau(g)} \;\;,\;\; g^{-1}g \;=\; 1_{\sigma(g)}\;. \tag{1.10}$$

É fácil ver que a unidade bilateral em cada ponto x de M e o inverso bilateral de cada elemento g de G são únicos, pois se 1_x e $1_x'$ fossem duas unidades bilaterais em x, teríamos $1_x = 1_x\,1_x' = 1_x'$, e se g^{-1} e $g^{-1\,\prime}$ fossem duas inversas bilaterais de g, teríamos $g^{-1} = g^{-1}\,1_{\tau(g)} = g^{-1}(g\,g^{-1\,\prime}) = (g^{-1}g)\,g^{-1\,\prime} = 1_{\sigma(g)}\,g^{-1\,\prime} = g^{-1\,\prime}$. Assim, obtemos

(d) uma aplicação
$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & M & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & 1_x \end{array}\;, \tag{1.11}$$
chamada de **seção unidade** no grupoide, e

(e) uma aplicação
$$\begin{array}{rccc} \iota: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}\;, \tag{1.12}$$
chamada de **inversão** no grupoide.

Por abuso de linguagem, diremos também que G é um grupoide (abstrato) **sobre** M, com projeção fonte σ e projeção alvo τ, suprimindo a menção da multiplicação μ exceto quando essa for imprescindível, ou ainda que $G \rightrightarrows M$ é um grupoide (abstrato).

É conveniente considerar os elementos g de um grupoide G sobre M como flechas [2]
$$\tau(g) \xleftarrow{\;\;g\;\;} \sigma(g) \tag{1.13}$$

[2] O procedimento de representar elementos de grupoides por flechas apontando da direita para a esquerda e, concomitantemente, anotar primeiro o alvo e depois a fonte, é uma mera convenção, visando compatibilidade com a notação usada na composição de aplicações. Alertamos o leitor que há autores seguindo a convenção oposta.

que emanam da fonte $\sigma(g)$ e apontam para o alvo $\tau(g)$; isso nos permite visualizar as condições formuladas acima de forma gráfica. Por exemplo, a multiplicação μ é representada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \tau(g_2) & \sigma(g_2) = \tau(g_1) \arrow[l, bend right, "g_2"'] & \sigma(g_1) \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[ll, bend left, "g_2 g_1"] \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

de modo que podemos visualizar a associatividade da multiplicação pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \tau(g_3) & \sigma(g_3) = \tau(g_2) \arrow[l, bend right, "g_3"'] & \sigma(g_2) = \tau(g_1) \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_3 g_2"] & \sigma(g_1) \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[ll, bend left, "g_2 g_1"] \end{tikzcd} \tag{1.15}$$

a seção unidade pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \tau(g) \arrow[loop above, "1_{\tau(g)}"] & \sigma(g) \arrow[l, bend right, "g"'] \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \tau(g) & \sigma(g) \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[loop above, "1_{\sigma(g)}"] \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

e a inversão pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \tau(g) \arrow[r, bend right, "g^{-1}"'] & \sigma(g) \arrow[l, bend right, "g"'] \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

Exercício 1.1 Seja G um grupoide sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Prove que para todo $x \in M$, ${}_xG_x$ é um grupo, e que a prescrição

$$y \underset{R(G)}{\sim} x \iff {}_yG_x \neq \emptyset \tag{1.18}$$

define uma relação de equivalência $R(G)$ em M.

Lembramos que uma relação de equivalência em um conjunto M é um subconjunto R de $M \times M$ com as seguintes propriedades:

- Reflexividade:
$$(x, x) \in R \qquad \text{para } x \in M\,, \tag{1.19}$$
- Simetria:
$$(y, x) \in R \implies (x, y) \in M \qquad \text{para } x, y \in M\,, \tag{1.20}$$
- Transitividade:
$$(z, y) \in R\,,\ (y, x) \in R \implies (z, x) \in M \qquad \text{para } x, y, z \in M\,. \tag{1.21}$$

Ao invés de $(y, x) \in R$, escrevemos $y \sim x$ ou, mais explicitamente, $y \underset{R}{\sim} x$.

Lembramos também que qualquer relação de equivalência em M define uma decomposição de M na união disjunta das correspondentes classes de equivalência e que, reciprocamente, qualquer decomposição de M na união disjunta de subconjuntos porporciona uma única relação de equivalência em M tal que os subconjuntos dados são exatamente as correspondentes classes de equivalência. Da mesma forma, qualquer aplicação ϕ de M em um outro conjunto N define uma relação de equivalência $R(\phi)$, caracterizada pelo fato de que as correspondentes classes de equivalência são exatamente os conjuntos de nível de ϕ:

$$y \underset{R(\phi)}{\sim} x \iff (y,x) \in R(\phi) \iff \phi(y) = \phi(x) \qquad \text{para } x,y \in M\,. \tag{1.22}$$

Reciprocamente, dada uma relação de equivalência R em M e denotando por M/R o conjunto das classes de equivalência e por π_R a projeção canônica que leva cada elemento x de M para sua classe de equivalência $[x]_R$, vemos que toda relação de equivalência é dessa forma: $R = R(\pi_R)$.

Antes de prosseguirmos a apresentar exemplos, introduzimos a seguinte terminologia, que é padrão na área.

Definição 1.2 Seja G um grupoide sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Para $x,y \in M$, chamamos

- $G_x = \sigma^{-1}(x)$ a **fibra fonte** ou **σ-fibra sobre** x,
- ${}_yG = \tau^{-1}(y)$ a **fibra alvo** ou **τ-fibra sobre** x,
- ${}_yG_x = \tau^{-1}(y) \cap \sigma^{-1}(x)$ a **fibra conjunta** ou **$(\tau \times \sigma)$-fibra sobre** (y,x),
- ${}_xG_x = \tau^{-1}(x) \cap \sigma^{-1}(x)$ o **grupo de vértice em** x,
- $G \cdot x = \{y \in M \mid {}_yG_x \neq \emptyset\}$ a **órbita** de x em G,

e dizemos que

- G é **transitivo** se, para todo $x \in M$, $G \cdot x = M$,
- G é **totalmente intransitivo** se para todo $x \in M$, $G \cdot x = \{x\}$.

Obviamente, então, G é a união disjunta das suas fibras:

$$G = \bigcup_{x \in M} G_x \quad , \quad G_x = \bigcup_{y \in M} {}_yG_x\,, \tag{1.23}$$

$$G = \bigcup_{y \in M} {}_yG \quad , \quad {}_yG = \bigcup_{x \in M} {}_yG_x\,, \tag{1.24}$$

$$G = \bigcup_{(x,y) \in M \times M} {}_yG_x\,. \tag{1.25}$$

Definição 1.3 Seja G um grupoide (abstrato) sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Se $\sigma = \tau$, dizemos que G é um **fibrado de grupos (abstratos) sobre** M.

Observação 1.1 Seja G um grupoide sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Claramente, G é transitivo se e somente se a âncora $\tau \times \sigma$ for uma aplicação sobrejetora, enquanto que G é totalmente intransitivo se e somente se G for um fibrado de grupos sobre M; neste caso, os três tipos de fibras introduzidos acima coincidem, i.e., $G_x = {}_xG = {}_xG_x$ para todo $x \in M$, e ${}_yG_x = \emptyset$ para todo $x, y \in M$ com $x \neq y$.

A afirmação contida na seguinte definição é de fácil verificação.

Definição 1.4 Seja G um grupoide (abstrato) sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Então a união de todos os grupos de vértice

$$G^{(0)} = \bigcup_{x \in M} {}_xG_x \tag{1.26}$$

com a projeção óbvia, é um fibrado (abstrato) de grupos sobre M, chamado o **fibrado de isotropia** de G.

Exemplo 1.1 (Grupos como grupoides com base trivial) Se M é reduzido a um ponto, a definição de grupoide se reduz à de grupo.

Exemplo 1.2 (Grupoides com grupos de vértice triviais, totalmente intransitivos) Seja M um conjunto. Defina $G = M$ com $\sigma = \mathrm{id}_M = \tau$ e μ dado por

$$xx = x \qquad \text{para } x \in M\,, \tag{1.27}$$

de modo que, obviamente, $1_x = x$ e $x^{-1} = x$.

Exemplo 1.3 (Grupoides com grupos de vértice triviais, transitivos) Seja M um conjunto. Defina $G = M \times M$ com $\sigma = \mathrm{pr}_2$, $\tau = \mathrm{pr}_1$ e μ dado por

$$(z,y)(y,x) = (z,x) \qquad \text{para } x,y,z \in M\,, \tag{1.28}$$

de modo que, obviamente, $1_x = (x,x)$ e $(y,x)^{-1} = (x,y)$. Este grupoide é chamado o **grupoide dos pares.**

Exemplo 1.4 (Grupoides com grupos de vértice triviais, órbitas não-triviais) Sejam M, N conjuntos e $\phi : M \to N$ uma aplicação fixa. Defina $G = R(\phi)$, como na equação (1.22), com $\sigma = \mathrm{pr}_2|_{R(\phi)}$, $\tau = \mathrm{pr}_1|_{R(\phi)}$ e μ dado por

$$(z,y)(y,x) = (z,x) \qquad \text{para } x,y,z \in M \text{ com } \phi(z) = \phi(y) = \phi(x)\,, \tag{1.29}$$

de modo que, novamente, $1_x = (x,x)$ e $(y,x)^{-1} = (x,y)$. (Se $M = N$ e $\phi = \mathrm{id}_M$, recuperamos o Exemplo 1.2, enquanto que se N é reduzido a um ponto, recuperamos o Exemplo 1.3.)

Definição 1.5 Seja G um grupoide (abstrato) sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Então o grupoide $R(G)$ sobre M que corresponde à relação de equivalência em M induzida por G, conforme o Exemplo 1.4 e as equações (1.18) e (1.22), é chamado o **grupoide de base** de G.

Exemplo 1.5 (Grupoides com grupos de vértice fixos, totalmente intransitivos) Sejam M um conjunto e G_0 um grupo. Defina $G = M \times G_0$ com $\sigma = \mathrm{pr}_M = \tau$ e μ dado por

$$(x,h_0)(x,g_0) = (x,h_0g_0) \qquad \text{para } x \in M,\, g_0, h_0 \in G_0\,, \tag{1.30}$$

de modo que, obviamente, $1_x = (x,1)$ e $(x,g_0)^{-1} = (x,g_0^{-1})$.

Exemplo 1.6 (Grupoides com grupos de vértice fixos, transitivos) Sejam M um conjunto e G_0 um grupo. Defina $G = M \times G_0 \times M$ com $\sigma = \mathrm{pr}_3$, $\tau = \mathrm{pr}_1$ e μ dado por

$$\begin{array}{c} (z, h_0, y)(y, g_0, x) = (z, h_0 g_0, x) \\ \text{para } x, y, z \in M \;,\; g_0, h_0 \in G_0 \end{array} , \tag{1.31}$$

de modo que, obviamente, $1_x = (x, 1, x)$ e $(y, g_0, x)^{-1} = (x, g_0^{-1}, y)$. Este grupoide é chamado o **grupoide trivial.**

Exemplo 1.7 (Grupoides com grupos de vértice fixos, órbitas não-triviais) Sejam M, N conjuntos, G_0 um grupo e $\phi : M \to N$ uma aplicação fixa. Defina

$$G(\phi, G_0) \;=\; \{(y, g_0, x) \in M \times G_0 \times M \mid \phi(y) = \phi(x)\} \;, \tag{1.32}$$

com $\sigma = \mathrm{pr}_3|_{G(\phi,G_0)}$, $\tau = \mathrm{pr}_1|_{G(\phi,G_0)}$ e μ dado por

$$\begin{array}{c} (z, h_0, y)(y, g_0, x) = (z, h_0 g_0, x) \\ \text{para } x, y, z \in M \text{ com } \phi(z) = \phi(y) = \phi(x) \;,\; g_0, h_0 \in G_0 \end{array} , \tag{1.33}$$

de modo que, novamente, $1_x = (x, 1, x)$ e $(y, g_0, x)^{-1} = (x, g_0^{-1}, y)$. (Se $M = N$ e $\phi = \mathrm{id}_M$, recuperamos o Exemplo 1.5, enquanto que se N é reduzido a um ponto, recuperamos o Exemplo 1.6.)

Exemplo 1.8 (Grupoide de ação) Sejam Q um conjunto e G_0 um grupo que age em Q (à esquerda). Escrevendo a ação de G_0 em Q na forma

$$\begin{array}{ccc} G_0 \times Q & \longrightarrow & Q \\ (g_0, q) & \longmapsto & g_0 \cdot q \end{array} \tag{1.34}$$

de modo que valem as regras

$$h_0 \cdot (g_0 \cdot q) \;=\; (h_0 g_0) \cdot q \;\;,\;\; 1 \cdot q \;=\; q \qquad \text{para } q \in Q \;,\; g_0, h_0 \in G_0 \;, \tag{1.35}$$

considere $\dot{G}_0 = G_0 \times Q$ com

$$\dot{\sigma}(g_0, q) \;=\; q \;\;,\;\; \dot{\tau}(g_0, q) \;=\; g_0 \cdot q \qquad \text{para } g_0 \in G_0 \;,\; q \in Q \;, \tag{1.36}$$

e $\dot{\mu}$ dado por

$$(h_0, g_0 \cdot q)(g_0, q) \;=\; (h_0 g_0, q) \qquad \text{para } g_0, h_0 \in G_0 \;,\; q \in Q \;, \tag{1.37}$$

de modo que, obviamente, $1_q = (1, q)$ e $(g_0, q)^{-1} = (g_0^{-1}, g_0 \cdot q)$. Este grupoide sobre Q é chamado o **grupoide de ação** e denotado por $G_0 \ltimes Q$.

Exemplo 1.9 Seja M um espaço topológico. Defina $G = C([0,1], M)/\mathrm{Hom}([0,1])$, i.e., G é o espaço dos caminhos contínuos em M modulo reparametrização, ou seja, o quociente do espaço de todos as curvas contínuas $\gamma : [0,1] \to M$ pela ação do grupo dos homeomorfismos do intervalo $[0,1]$ que levam 0 em 0 e 1 em 1, com $\sigma([\gamma]) = \gamma(0)$ (ponto inicial), $\tau([\gamma]) = \gamma(1)$ (ponto final) e μ dado pela concatenação de curvas, $[\gamma_2][\gamma_1] = [\gamma_2\gamma_1]$ onde

$$(\gamma_2\gamma_1)(t) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_1(t) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{array} \right. , \tag{1.38}$$

de modo que a unidade é dada pelos caminhos constantes, ou seja, $1_x = [\gamma_x]$ onde $\gamma_x(t) = x$, e a inversão é dada pela prescrição de percorrer o mesmo caminho na direção oposta, ou seja, $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ onde $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Este grupoide é chamado o **grupoide dos caminhos** de M.

Exemplo 1.10 Seja M um espaço topológico. Defina G como sendo o espaço das classes de homotopia contínua de caminhos contínuos em M, com as mesmas operações do exemplo anterior. Este grupoide é chamado o **grupoide de homotopia** de M e denotado por $\pi_1(M)$.

Claramente, no Exemplo 1.8, as órbitas da ação de grupo são idênticas às órbitas do grupoide de ação, o que motiva a terminologia "órbita" para os últimos. Nos últimos dois exemplos, as órbitas são exatamente as componentes conexas por arcos de M (e se M for localmente conexo por arcos, estas coincidem com as componentes conexas de M). Finalmente, no último caso, os grupos de vértice ${}_x\pi_1(M)_x$ coincidem com os grupos de homotopia usuais $\pi_1(M,x)$ e, caso M for conexo, localmente conexo por arcos e localmente simplesmente conexo, as fibras fonte e as fibras alvo são homeomorfas ao espaço universal de recobrimento $\tilde{M}$ de M.

Para completar a definição da categoria dos grupoides, falta especificar os morfismos.

Definição 1.6 Sejam $(G, M, \sigma_G, \tau_G, \mu_G)$ e $(H, N, \sigma_H, \tau_H, \mu_H)$ grupoides (abstratos). Um **morfismo** ou **homomorfismo de grupoides (abstratos)** de $(G, M, \sigma_G, \tau_G, \mu_G)$ em $(H, N, \sigma_H, \tau_H, \mu_H)$ é um par $(f, \check{f})$ de aplicações $f : G \to H$ e $\check{f} : M \to N$ tal que cada um dos seguintes diagramas comuta,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_G"'] & H \arrow[d, "\sigma_H"] \\ M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau_G"'] & H \arrow[d, "\tau_H"] \\ M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \tag{1.39}$$

e tal que f preserva a multiplicação:

$$f(g_2 g_1) \;=\; f(g_2) f(g_1) \qquad \text{para } (g_2, g_1) \in G^{(2)} . \tag{1.40}$$

Por abuso de linguagem, diremos também que f é um morfismo ou homomorfismo de grupoides (abstratos) de G em H **sobre** $\check{f}$ ou que f **recobre** $\check{f}$. Se $M = N$ e $\check{f}$ é a identidade, diremos que f é um morfismo ou homomorfismo **estrito**.

Note que devido à comutatividade dos diagramas na equação (1.39), os dois lados da equação (1.40) são bem definidos, pois

$$\begin{aligned} (g_2, g_1) \in G^{(2)} \;&\Longrightarrow\; \sigma_G(g_2) = \tau_G(g_1) \\ &\Longrightarrow\; \sigma_H(f(g_2)) = \check{f}(\sigma_G(g_2)) = \check{f}(\tau_G(g_1)) = \tau_H(f(g_1)) \\ &\Longrightarrow\; (f(g_2), f(g_1)) \in H^{(2)} . \end{aligned}$$

Da noção de morfismo ou homomorfismo, decorre da forma usual a de **isomorfismo** entre grupoides e de **automorfismo** de um grupoide, estrito ou não. No caso não estrito, podemos concluir pelo menos que um isomorfismo $f : E \to F$ de grupoides induz um isomorfismo $\check{f} : M \to N$ dos respectivos espaços base.

Exemplo 1.11 Seja G um grupoide sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ. Então a âncora $\tau \times \sigma : G \to M \times M$ é um homomorfismo estrito do grupoide G no grupoide dos pares $M \times M$.

Observação 1.2 Na linguagem da teoria das categorias, a definição de grupoide e de morfismo entre grupoides pode ser resumida da seguinte forma concisa: um grupoide é uma categoria pequena[3] na qual todos os morfismos são isomorfismos, e um morfismo entre grupoides é um funtor entre tais categorias. (De fato, o conjunto dos objetos de uma categoria pequena constitui o espaço base M e o conjunto de todos os isomorfismos entre quaisquer dois dos seus objetos constitui o espaço total G de um grupoide.) Porém, tal interpretação não parece oferecer nenhuma vantagem específica; em particular, ela não contribui para uma melhor visualização do espaço total G do grupoide, pois costuma considerar apenas as fibras conjuntas ${}_yG_x$, isoladamente. Ademais, ela não se adapta facilmente a incluir grupoides com alguma estrutura adicional, tais como grupoides topológicos ou grupoides de Lie.

1.2 Subgrupoides, quocientes, núcleo e imagem

Definição 1.7 Um grupoide (abstrato) $(H, N, \sigma_H, \tau_H, \mu_H)$ é chamado um **subgrupoide (abstrato)** de um grupoide (abstrato) $(G, M, \sigma_G, \tau_G, \mu_G)$ se existem inclusões $i : H \hookrightarrow G$ e $\check{\imath} : N \hookrightarrow M$ tais que o par $(i, \check{\imath})$ é um homomorfismo de grupoides. Se $M = N$ e $\check{\imath}$ é a identidade, diremos que o subgrupoide é **amplo.** Neste caso, por abuso de linguagem, diremos também que H é um subgrupoide amplo de G.

Normalmente, identificamos H com sua imagem sob i e N com sua imagem sob $\check{\imath}$ e assim consideramos H como subconjunto de G e N como subconjunto de M. Reciprocamente, se G é um grupoide sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ, e se H é um subconjunto de G e N é um subconjunto de M com

$$\sigma(H) = N = \tau(H) \qquad \text{e} \qquad 1_x \in H \quad \text{para } x \in N \,, \tag{1.41}$$

tal que H é estável sob multiplicação e inversão, i.e., vale

$$h_2 h_1 \in H \quad \text{para } (h_2, h_1) \in H^{(2)} \,, \tag{1.42}$$

onde

$$H^{(2)} \;=\; \{\, (h_2, h_1) \in H \times H \mid \sigma(h_2) = \tau(h_1) \,\} \,, \tag{1.43}$$

e

$$h^{-1} \in H \quad \text{para } h \in H \,, \tag{1.44}$$

então $(H, N, \sigma|_H, \tau|_H, \mu|_{H^{(2)}})$ será um subgrupoide de $(G, M, \sigma, \tau, \mu)$, e a menos de isomorfismos estritos, todos os subgrupoides de $(G, M, \sigma, \tau, \mu)$ são obtidos dessa forma.

Um caso especial de um subgrupoide é a restrição de um grupoide a um subconjunto do seu espaço base.

Definição 1.8 Seja $(G, M, \sigma, \tau, \mu)$ um grupoide (abstrato) e seja N um subconjunto de M. Então $(G|_N, N, \sigma|_{G|_N}, \tau|_{G|_N}, \mu|_{G|_N^{(2)}})$ com

$$G|_N \;=\; \sigma^{-1}(N) \cap \tau^{-1}(N) \,, \tag{1.45}$$

é um subgrupoide (abstrato) de $(G, M, \sigma, \tau, \mu)$ chamado a sua **restrição** a N.

A restrição de grupoides é caracterizada pela seguinte propriedade universal: sempre podemos considerar um subgrupoide $(H, N, \sigma|_H, \tau|_H, \mu|_{H^{(2)}})$ não amplo de um grupoide $(G, M, \sigma, \tau, \mu)$, com $H \subset G$ e $N \subset M$, como subgrupoide amplo da sua restrição $(G|_N, N, \sigma|_{G|_N}, \tau|_{G|_N}, \mu|_{G|_N^{(2)}})$ a N.

[3]Uma categoria é chamada pequena se a classe dos seus objetos constituir um conjunto.

Exemplo 1.12 Sejam M, N conjuntos e $\phi : M \to N$ uma aplicação fixa. Então os grupoides $R(\phi)$ do Exemplo 1.4 são subgrupoides amplos do grupoide dos pares $M \times M$ do Exemplo 1.3, e reciprocamente, todos os subgrupoides amplos do grupoide dos pares $M \times M$ são obtidos dessa forma.

Exemplo 1.13 Sejam M, N conjuntos, G_0 um grupo e $\phi : M \to N$ uma aplicação fixa. Então os grupoides $G(\phi, G_0)$ do Exemplo 1.7 são subgrupoides amplos do grupoide trivial $M \times G_0 \times M$ do Exemplo 1.6.

Exemplo 1.14 Sejam Q um conjunto, G_0 um grupo que age sobre Q (à esquerda) e H_0 um subgrupo de G_0 que então também age sobre Q (à esquerda), por restrição. Então o grupoide de ação $H_0 \lessdot Q$ é um subgrupoide amplo do grupoide de ação $G_0 \lessdot Q$. (Observa que então cada órbita do último se decompõe na união disjunta de órbitas do primeiro – um fenômeno conhecido como quebra de simetria.)

Podemos também definir o conceito de subgrupoide normal de um grupoide, que estende o de subgrupo normal de um grupo:

Definição 1.9 Seja G um grupoide sobre M com projeção fonte σ e projeção alvo τ, e seja H um subgrupoide amplo e totalmente intransitivo de G. Diremos que H é **normal** se conjugação com elementos de G preserva os grupos de vértice de H, i.e., se

$$g\,({}_xH_x)\,g^{-1} \;=\; {}_yH_y \qquad \text{para } x, y \in M, g \in {}_yG_x \; . \tag{1.46}$$

Subgrupoides normais permitem a construção de quocientes que são grupoides sobre a mesma base. De fato, seja G um grupoide sobre M com projeção fonte σ_G e projeção alvo τ_G, e seja H um subgrupoide amplo e totalmente intransitivo de G. Definimos então o espaço G/H das classes colaterais à esquerda gH e, do mesmo modo, o espaço $H\backslash G$ das classes colaterais à direita Hg: para $g \in {}_yG_x$, gH denota o subconjunto $g({}_xH_x) = \{gh \,|\, h \in {}_xH_x\}$ e Hg denota o subconjunto $({}_yH_y)\,g = \{hg \,|\, h \in {}_yH_y\}$ de ${}_yG_x$. As projeções fonte e alvo são definidas de forma óbvia: $\sigma_{G/H}(gH) = \sigma(g)$, $\tau_{G/H}(gH) = \tau(g)$ e $\sigma_{H\backslash G}(hg) = \sigma(g)$, $\tau_{H\backslash G}(hg) = \tau(g)$. Obviamente, se H for normal, vale $gH = Hg$, e neste caso, podemos definir uma multiplicação em G/H pela fórmula usual,

$$(g_2H)(g_1H) \;=\; (g_2g_1)H \qquad \text{para } (g_2, g_1) \in G^{(2)} \; , \tag{1.47}$$

de modo que pondo

$$(1_{G/H})_x \;=\; (1_G)_x\,H \qquad \text{para } x \in M \; , \tag{1.48}$$

e

$$(gH)^{-1} \;=\; g^{-1}H \qquad \text{para } g \in G \; , \tag{1.49}$$

podemos verificar que G/H é um grupoide sobre M com projeção fonte $\sigma_{G/H}$ e projeção alvo $\tau_{G/H}$ tal que a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é um homomorphismo estrito de grupoides sobre M.

Definição 1.10 Dados um grupoide G sobre um conjunto M com projeção fonte σ_G e projeção alvo τ_G e um subgrupoide normal H de G, o grupoide G/H sobre M com projeção fonte $\sigma_{G/H}$ e projeção alvo $\tau_{G/H}$ assim construído é chamado o **quociente** de G por H.

Observação 1.3 Aqui, optamos por incluir a exigência de que um subgrupoide normal seja totalmente intransitivo já na definição, pois tanto a condição de estabilidade sob conjugação. equação (1.46), como a construção do quociente (ou seja, a definição das classes colaterais) envolvem apenas o seu fibrado de isotropia. Assim, podemos impor essa condição sem perda de generalidade, substituindo um subgrupoide amplo com órbitas não-triviais por seu fibrado de isotropia se necessário.

Teorema 1.1 (Teorema do isomorfismo estrito para grupoides) *Sejam G e H grupoides (abstratos) sobre o mesmo espaço base M com projeções fonte $\sigma_G : G \to M$ e $\sigma_H : H \to M$ e projeções alvo $\tau_G : G \to M$ e $\tau_H : H \to M$, respectivamente, e seja $f : G \to H$ um homomorfismo estrito de grupoides sobre M. Então o núcleo* $\ker f$ *de f, definido por*

$$\ker f \;=\; \bigcup_{x \in M} \ker_x f \quad \text{com} \quad \ker_x f \;=\; \{ g \in {}_xG_x \mid f(g) = 1_x \} \;, \tag{1.50}$$

é um subgrupoide normal de G, enquanto que a imagem de f, definida por

$$\operatorname{im} f \;=\; \bigcup_{x,y \in M} {}_y(\operatorname{im} f)_x \quad \text{com} \quad {}_y(\operatorname{im} f)_x \;=\; \{ h \in {}_yH_x \mid h = f(g) \;\; \textit{para algum} \;\; g \in {}_yG_x \} \;, \tag{1.51}$$

é um subgrupoide amplo de H, e f induz um isomorfismo estrito $\tilde{f} : G/\ker f \to \operatorname{im} f$ de grupoides sobre M.

Observação 1.4 Para homomorfismos de grupoides que não são estritos, a situação é bem mais complicada. De fato, se G é um grupoide sobre M, H é um grupoide sobre N e $f : G \to H$ é um homomorfismo de grupoides sobre $\check{f} : M \to N$, onde podemos supor sem perda de generalidade que a aplicação $\check{f}$ seja sobrejetora,[4] enfrentamos uma série de dificuldades quando $\check{f}$ não é injetora.

- Em geral, a imagem de f deixa de ser um subgrupoide de H, pois nota-se que, para $y \in N$,

  $$ {}_yf(G)_y \;=\; \bigcup_{x \in \check{f}^{-1}(y)} f({}_xG_x) \;, $$

  e a união de subgrupos de ${}_yH_y$ pode muito bem não ser um subgrupo de ${}_yH_y$.
- Em geral, o núcleo de f, que neste caso é definido como a imagem inversa da seção unidade de H,

  $$\ker f \;=\; f^{-1}(\epsilon_H(N)) \;,$$

  deixa de medir se f é injetora, pois mesmo quando ele for trivial no sentido de se reduzir à seção unidade de G,

  $$\ker f \;=\; \epsilon_G(M) \;,$$

  ainda assim f não é injetora pois, para $y \in N$,

  $$f^{-1}(1_y) \;=\; \bigcup_{x \in \check{f}^{-1}(y)} \{1_x\} \;.$$

- Em geral, dividir um grupoide G por um subgrupoide que não é totalmente intransitivo, tendo grupoide de base $R \subset M \times M$ (tal que o núcleo do item anterior, cujo grupoide de base é o do Exemplo 1.4, com ϕ substituído por $\check{f}$), leva a um quociente que é um grupoide não sobre M, mas sobre o conjunto de classes de equivalência M/R, e cuja construção requer hipóteses e dados adicionais. Maiores informações sobre este tema, que não abordaremos aqui, podem ser encontradas em [MK, Chapter 2].

Um método elegante para contornar estes problemas consiste em decompor um homomorfismos que não é estrito na composição de um homomorfismo estrito, ao qual se aplica o teorema anterior, com o levantamento canônico da sua aplicação base, usando para tanto o “pull-back” do grupoide que figura como codomínio.

[4] Caso contrário, substituímos H por sua restrição a $\check{f}(M)$.

1.3 “Pull-Back”

Um procedimento básico para construir fibrados a partir de outros fibrados e que se estende naturalmente a grupoides é o “pull-back” por uma aplicação entre os respectivos espaços base.

Seja G um grupoide (abstrato) sobre um conjunto M com projeção fonte σ_G e projeção alvo τ_G. Dada uma aplicação $\phi : N \to M$ de um outro conjunto N em M, consideremos o conjunto

$$\phi^* G \;=\; \{\, (y, g, x) \in N \times G \times N \mid \phi(x) = \sigma_G(g)\;,\; \phi(y) = \tau_G(g) \,\}\;. \tag{1.52}$$

Denotando a restrição da primeira projeção $\mathrm{pr}_1 : N \times G \times N \to N$ a ϕ^*G por τ_{ϕ^*G}, a da segunda projeção $\mathrm{pr}_2 : N \times G \times N \to G$ a ϕ^*G por $\hat{\phi}$ e a da terceira projeção $\mathrm{pr}_3 : N \times G \times N \to N$ a ϕ^*G por σ_{ϕ^*G}, temos então os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} \phi^*G \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d, "\sigma_{\phi^*G}"'] & G \arrow[d, "\sigma_G"] \\ N \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \phi^*G \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d, "\tau_{\phi^*G}"'] & G \arrow[d, "\tau_G"] \\ N \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd} \tag{1.53}$$

Ademais, temos

$$(\phi^*G)^{(2)} \;=\; \{\, \big((y_2, g_2, x_2), (y_1, g_1, x_1)\big) \in \phi^*G \times \phi^*G \mid x_2 = y_1 \,\}\;, \tag{1.54}$$

e como

$$\big((y_2, g_2, x_2), (y_1, g_1, x_1)\big) \in (\phi^*G)^{(2)} \;\Longrightarrow\; \sigma_G(g_2) = \phi(x_2) = \phi(y_1) = \tau_G(g_1) \;\Longrightarrow\; (g_2, g_1) \in G^{(2)}\;,$$

podemos definir a multiplicação μ_{ϕ^*G} em ϕ^*G a partir da multiplicação μ_G em G, conforme

$$(z, g_2, y)(y, g_1, x) \;=\; (z, g_2 g_1, x) \qquad \text{para } \big((z, g_2, y), (y, g_1, x)\big) \in (\phi^*G)^{(2)}\;, \tag{1.55}$$

de modo que pondo

$$1_x \;=\; (x, 1_{\phi(x)}, x) \qquad \text{para } x \in N\;, \tag{1.56}$$

e

$$(y, g, x)^{-1} \;=\; (x, g^{-1}, y) \qquad \text{para } (y, g, x) \in \phi^*G\;, \tag{1.57}$$

podemos verificar que ϕ^*G é um grupoide sobre N com projeção fonte σ_{ϕ^*G} e projeção alvo τ_{ϕ^*G} e que $\hat{\phi}$ é um homomorfismo de grupoides sobre ϕ.

Definição 1.11 Dados um grupoide G sobre um conjunto M com projeção fonte σ_G e projeção alvo τ_G e uma aplicação $\phi : N \to M$ de um outro conjunto N em M, o grupoide ϕ^*G sobre N com projeção fonte σ_{ϕ^*G} e projeção alvo τ_{ϕ^*G} assim construído é chamado o **pull-back** de G **para** N **via** ϕ, e o homomorfismo de grupoides $\hat{\phi}$ sobre ϕ assim construído é chamado o **levantamento canônico** de ϕ.

A maneira mais concisa e intuitiva (se bem que incompleta) de visualizar essa construção é notar que os diversos tipos de fibras dos dois grupoides são todos idênticos: a mudança do espaço base significa apenas um reetiquetamento dessas fibras:

$$(\phi^*G)_x \;=\; G_{\phi(x)} \;\;,\;\; {}_x(\phi^*G) \;=\; {}_{\phi(x)}G \;\;,\;\; {}_y(\phi^*G)_x \;=\; {}_{\phi(y)}G_{\phi(x)} \qquad \text{para } x, y \in N\;. \tag{1.58}$$

O pull-back de grupoides é caracterizado pela seguinte propriedade universal: dado um homomorfismo $(f,\check{f})$ não estrito de um grupoide $(G,M,\sigma_G,\tau_G,\mu_G)$ em um grupoide $(H,N,\sigma_H,\tau_H,\mu_H)$, podemos sempre fatorizar f, e de maneira única, na composição de um homomorfismo estrito f_s de $(G,M,\sigma_G,\tau_G,\mu_G)$ no pull-back de $(H,N,\sigma_H,\tau_H,\mu_H)$ para M via $\check{f}$, seguido do levantamento canônico de $\check{f}$, conforme os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f_s"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "\sigma_G"'] & \check{f}^*H \arrow[r, "\hat{\check{f}}"] \arrow[d, "\sigma_{\check{f}^*H}"] & H \arrow[d, "\sigma_H"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] & M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "f_s"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "\tau_G"'] & \check{f}^*H \arrow[r, "\hat{\check{f}}"] \arrow[d, "\tau_{\check{f}^*H}"] & H \arrow[d, "\tau_H"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] & M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \tag{1.59}$$

Explicitamente, f_s é definido por

$$f_s(g) \;=\; \big(\tau_G(g), f(g), \sigma_G(g)\big) \qquad \text{para } g \in G\,. \tag{1.60}$$

1.4 Ações de grupoides e grupoides de ação

Da mesma forma que grupos agem em conjuntos, grupoides agem em fibrados (sobre o mesmo espaço base).

Definição 1.12 Um **fibrado (abstrato)** é uma tripla (E,M,π), onde E e M são conjuntos chamados, respectivamente, de **espaço total** e **espaço base** do fibrado, e $\pi : E \to M$ é uma aplicação sobrejetora chamada de **projeção** do fibrado. Por abuso de linguagem, diremos também que E é um fibrado (abstrato) **sobre** M, com projeção π, ou ainda que $E \to M$ é um fibrado (abstrato).

Definição 1.13 Uma **ação**, ou mais exatamente, uma **ação à esquerda**, de um grupoide (abstrato) G sobre M, com projeção fonte σ e projeção alvo τ, em um fibrado E sobre M, com projeção π, é uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times_\sigma E & \longrightarrow & E \\ (g,e) & \longmapsto & g \cdot e \end{array} \tag{1.61}$$

onde $G \times_\sigma E$ denota o produto fibrado de G, em relação à projeção fonte σ, e E sobre M,

$$G \times_\sigma E \;=\; \{\,(g,e) \in G \times E \mid \sigma(g) = \pi(e)\,\} \tag{1.62}$$

tal que

1. Translação por qualquer elemento g de G (que conforme a equação (1.62) é definida apenas na fibra de E sobre $\sigma(g)$) leva a fibra de E sobre $\sigma(g)$ na fibra de E sobre $\tau(g)$:

$$g \cdot E_x \;=\; E_y \qquad \text{para } x,y \in M,\, g \in {}_yG_x\,. \tag{1.63}$$

2. A composição das translações por dois elementos de G é igual à translação pelo produto destes dois elementos:

$$h \cdot (g \cdot e) \;=\; (hg) \cdot e \qquad \text{para } x,y,z \in M,\, g \in {}_yG_x,\, h \in {}_zG_y,\, e \in E_x\,. \tag{1.64}$$

3. A translação pela unidade é a identidade:

$$1_x \cdot e \;=\; e \qquad \text{para } \; x \in M,\, e \in E_x \;. \tag{1.65}$$

Segue então que a translação por qualquer elemento g de G é um isomorfismo da fibra de E sobre $\sigma(g)$ na fibra de E sobre $\tau(g)$, sendo que o seu inverso é a translação pelo elemento g^{-1} de G; note que, tacitamente, já usamos este fato na equação (1.63), escrevendo $g \cdot E_x = E_y$ ao invés de $g \cdot E_x \subset E_y$.

Com isso, podemos generalizar o Exemplo 1.8:

Exemplo 1.15 (Grupoide de ação) Sejam E um fibrado sobre M e G um grupoide sobre M que age em E (à esquerda). Considere $\dot{G} = G \times_\sigma E$ com

$$\dot{\sigma}(g,e) \;=\; e \;\;,\;\; \dot{\tau}(g,e) \;=\; g \cdot e \qquad \text{para } \; g \in G \;\;,\;\; e \in E \;, \tag{1.66}$$

e $\dot{\mu}$ dado por

$$(h, g \cdot e)(g,e) \;=\; (hg,e) \qquad \text{para } \; g,h \in G \;\;,\;\; e \in E \;, \tag{1.67}$$

de modo que, obviamente, $1_e = (1_{\pi(e)}, e)$ e $(g,e)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot e)$. Este grupoide sobre E é chamado o **grupoide de ação** e denotado por $G \lessdot E$.

Índice

Bibliografia

[AM] Abraham, R., Marsden, J. *Foundations of Mechanics*. 2nd edition. Benjamin-Cummings, Reading 1978.

[BL] Bleecker, D. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley, Reading 1981.

[BR] Brandt, W. *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs*. Math. Ann. **96** (1926) 360-366.

[BT] Bott, R., Tu, L.W. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1995.

[DI] Dieudonné, J. *Treatise on Analysis I: Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York 1960.

[FL] Flanders, H. *Differential Forms, with Applications to the Physical Sciences*. Academic Press, New York 1963.

[GS] Göckeler, M., Schücker, T. *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[GHV1] Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. *Connections, Curvature and Cohomology I*. Academic Press, New York 1972.

[GHV2] Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. *Connections, Curvature and Cohomology II*. Academic Press, New York 1973.

[MH] Hirsch, M.W. *Differential Topology*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1997.

[FH] Hirzebruch, F. *Topological Methods in Algebraic Geometry*. 3rd edition. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1995.

[KN1] Kobayashi, S., Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I. Interscience, New York 1963.

[KN2] Kobayashi, S., Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. II. Interscience, New York 1969.

[LA] Lang, S. *Differential and Riemannian Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1995.

[MK] Mackenzie, K.C.H. *General Theory of Lie Groupoids and Lie ALgebroids.* Cambridge University Press, Cambridge 2005.

[MM] Moerdijk, I., Mrčun, J. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids.* Cambridge University Press, Cambridge 2003.

[PR] Pradines, J. *Troisième Théoreme de Lie sur les Grupoides Différentiables.* C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. Paris **267** (1968) 21-23.

[CW] Da Silva, A.C., Weinstein, A. *Geometric Models for Noncommutative Algebras.* Berkeley Mathematical Lecture Notes, Vol. 10, AMS 1999.

[S] Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, New Jersey 1999.

[WA] Warner, F. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1983.

[WE] Weinstein, A. *Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry.* Not. AMS **43** (1996) 743-752