Fibrados, Conexões e Classes Características

Michael Forger
Fernando Antoneli Jr.

– São Paulo, 11 de Agosto de 2011 –

Conteúdo

Introdução: Aspectos Históricos e Motivação

Origem da geometria moderna no 19º século, com a prova da independência do axioma dos paralelos dos demais axiomas da geometria euclideana, através da descoberta de geometrias não-euclideanas (Bolyai, Gauss, Lobachevskii).

Origens da noção de conexão (linear), na forma global (transporte paralelo) assim como na forma infinitesimal (derivada covariante):

- na geometria riemanniana, como objeto secundário – conexão induzida por uma métrica positiva definida (Riemann, Christoffel, Levi-Civita), ainda no 19º século;
- na geometria lorentziana, ainda como objeto secundário – conexão induzida por uma métrica não degenerada mas não positiva definida (Einstein, 1915), em função do desenvolvimento da relatividade geral;
- em geometrias não métricas, como objeto primário (Weyl, 1919 & 1931), iniciando o desenvolvimento das teorias de calibre.

Papel central das teorias de calibre que descrevem 3 das 4 interações fundamentais conhecidas em física (eletromagnética, fraca e forte), sendo que a relatividade geral descreve a outra (gravitacional).

Desenvolvimento paralelo em Física e em Matemática, durante boa parte do 20º século:

- Física:
  1. extensão das teorias de calibre de grupos abelianos (Weyl, 1919 & 1931) a grupos não abelianos (Yang-Mills, 1954; Utiyama, 1956);
  2. surgimento do mecanismo de quebra espontânea de simetria (Higgs et al., 1964);
  3. formulação de uma teoria unificada para as interações eletromagnéticas e fracas (Weinberg, Salam, 1969);
  4. formulação da cromodinâmica para as interações fortes e estabelecimento do modelo padrão das partículas elementares (1973).

- Matemática:
    1. formulação do conceito de fibrado (Hopf, Stiefel, Whitney, Steenrod);
    2. formulação do conceito geral de conexão (Ehresmann, Koszul, Kobayashi-Nomizu);
    3. dedução de invariantes topológicas de variedades e fibrados representadas por formas diferenciais, chamadas de classes características (Chern, Pontryagin, Weil).

Unificação das duas linhas: Em torno de 1975, percebeu-se que

$$\text{teoria das conexões} \quad = \quad \text{teorias de calibre (clássicas)}$$

Algumas consequências em Matemática:

- solução das equações de Yang-Mills auto-duais em 4 dimensões (Atiyah, Hitchin, Drinfeld, Manin & Ward, 1977);
- descoberta de novas invariantes cohomológicas para variedades de dimensão 4 que implicam a existência de uma quantidade não-enumerável de estruturas distintas de variedade suave em $\mathbb{R}^4$ (Donaldson, 1984);
- descoberta de novas invariantes cohomológicas para variedades de dimensão 3 (Floer, 1986?);
- sistematização das invariantes de Jones para laços e nós em variedades de dimensão 3 (Witten, 1986);
- desenvolvimento da noção de teorias quânticas de campos topológicas (Atiyah, 1988).

A ser elaborado com maiores detalhes, inclusive com correções das imprecisões históricas, que neste estágio de desenvolvimento do manuscrito são inevitáveis.

CAPÍTULO 1

Fibrados Vetoriais e Conexões Lineares

1.1 Variedades Diferenciáveis

Começamos este capítulo com uma breve revisão de algumas noções básicas relacionadas com o conceito de variedade, no intuito de fixar a notação que será empregada a seguir e também de facilitar a compreensão da definição do conceito de um fibrado vetorial, por analogia.

Intuitivamente, uma variedade n-dimensional é um "espaço" M que localmente pode ser colocado em correspondência biunívoca com abertos de $\mathbb{R}^n$. Portanto, os pontos de M são parametrizados por **coordenadas** x^μ ($\mu = 1, \ldots, n$) que, conjuntamente, lhes associam pontos em determinados abertos de $\mathbb{R}^n$. Contudo, tal parametrização ou associação está longe de ser única. Além disso, nem sempre é possível encontrar coordenadas para todos os pontos de M ao mesmo tempo, sendo que geralmente, as funções coordenada são definidas apenas sobre subconjuntos de M. No entanto, quando os mesmos pontos de M são descritos em termos de diferentes sistemas de coordenadas locais, digamos x^μ e x'^κ, então deve ser possível expressar as funções x'^κ em termos das funções x^μ e, reciprocamente, as funções x^μ em termos das funções x'^κ, de maneira diferenciável.

Neste contexto e em tudo que segue, entendemos a palavra "diferenciável" como sinônimo de "suave" ou "liso/lisa" ou "de classe C^∞". É possível formular definições análogas usando outras classes C^r de diferenciabilidade; veja os comentários no final da Seção 1.1 deste capítulo.

1.1.1 Definições e Exemplos

1.1 Definição Seja M um conjunto.

1. Uma **carta** (n-dimensional) de M é uma tripla $C = (U, x, \tilde{U})$ consistindo de
   - (i) um subconjunto U de M,
   - (ii) um subconjunto aberto $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$,
   - (iii) uma bijeção

$$\begin{array}{rccc} x: & U & \longrightarrow & \tilde{U} \\ & m & \longmapsto & x(m) = (x^1(m), \ldots, x^n(m)) \end{array} .$$

O subconjunto U de M é chamado o **domínio** da carta $C = (U, x, \tilde{U})$ e, para cada ponto m de U, os números $x^\mu(m)$ ($\mu = 1, \ldots, n$) são chamadas as **coordenadas** de m. Desta forma, uma carta $C = (U, x, \tilde{U})$ de M pode também ser vista como um **sistema de coordenadas** para U ou, quando não queremos especificar U explicitamente, como um **sistema de coordenadas locais** para M. Finalmente, dizemos que $C = (U, x, \tilde{U})$ é uma carta ou um sistema de coordenadas **em torno** de um ponto m_0 de M se

$$m_0 \in U \quad , \quad 0 \in \tilde{U} \qquad \text{e} \qquad x(m_0) = 0 \; .$$

2. Duas cartas $C = (U, x, \tilde{U})$ e $C' = (U', x', \tilde{U}')$ de M são ditas **compatíveis** se $U \cap U' = \emptyset$ ou, quando $U \cap U' \neq \emptyset$, se $x(U \cap U')$ e $x'(U \cap U')$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ e as aplicações

$$x' \circ x^{-1} : \; x(U \cap U') \;\longrightarrow\; x'(U \cap U')$$

e

$$x \circ x'^{-1} : \; x'(U \cap U') \;\longrightarrow\; x(U \cap U')$$

são diferenciáveis. Estas aplicações são chamadas as **funções de transição** entre as duas cartas.

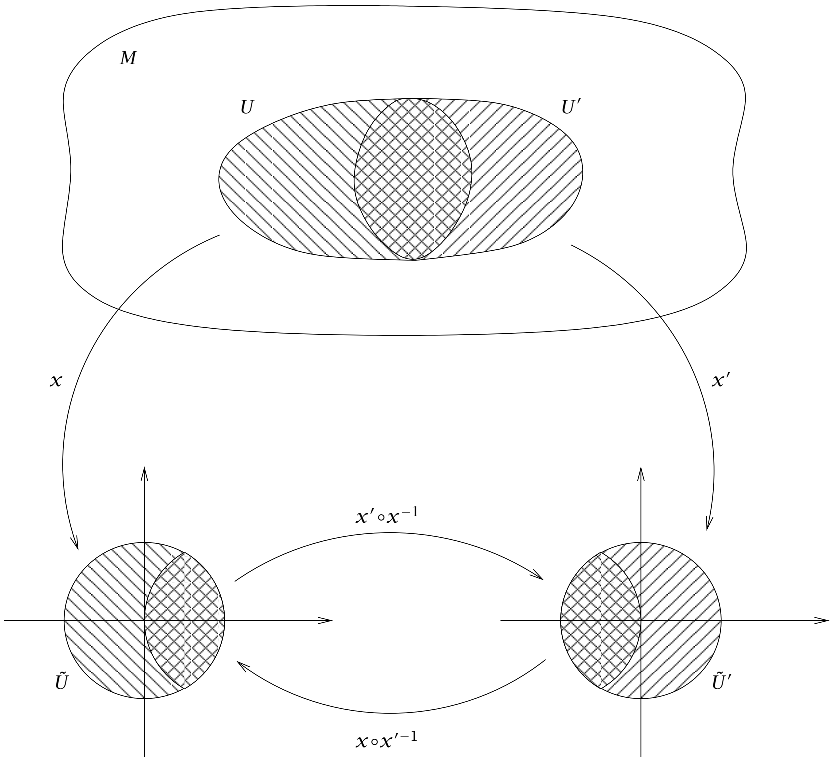


Figura 1.1: Cartas e funções de transição entre cartas para variedades

Obviamente, uma carta $C = (U, x, \tilde{U})$ n-dimensional e uma carta $C' = (U', x', \tilde{U}')$ n'-dimensional só podem ser compatíveis se $U \cap U' = \emptyset$ ou então $n = n'$.

1.2 Definição Seja M um conjunto.

(i) Um conjunto $\mathcal{A} = \{ C_\alpha \mid \alpha \in A \}$ de cartas $C_\alpha = (U_\alpha, x_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ de M é chamado um **atlas** de M se

  (a) os domínios U_α recobrem M, i.e., $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,

  (b) quaisquer duas cartas de $\mathcal{A}$ são compatíveis.

(ii) Dois atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ de M são ditos **equivalentes** se sua união $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ também é um atlas de M, isto é, se todas as cartas de $\mathcal{A}$ são compatíveis com todas as cartas de $\mathcal{A}'$.

(iii) A classe de equivalência $[\mathcal{A}]$ de um atlas $\mathcal{A}$ de M é chamada a **estrutura diferenciável** em M gerada por $\mathcal{A}$.

(iv) O atlas $\bar{\mathcal{A}}$ formado por todas as cartas de M que são compatíveis com as cartas de um dado atlas $\mathcal{A}$ de M é chamado o **atlas maximal** gerado por $\mathcal{A}$ e representa a estrutura diferenciável $[\mathcal{A}]$ em M gerada por $\mathcal{A}$.

Esta definição contém uma afirmação implícita, a saber que a relação entre atlas introduzida no item (ii) realmente é uma relação de equivalência. Reflexividade e simetria desta relação são óbvias, e sua transitividade segue essencialmente da regra da cadeia, junto com o fato de que diferenciabilidade é uma noção local. (Mais exatamente, usa-se o fato de que a composição de aplicações diferenciáveis entre abertos de $\mathbb{R}^n$ é diferenciável e que uma aplicação entre abertos de $\mathbb{R}^n$ já é diferenciável se cada ponto do seu domínio possui uma vizinhança aberta (nele contida) tal que a sua restrição a esta vizinhança é diferenciável.)

1.3 Definição Uma **variedade diferenciável** ou simplesmente **variedade** (n-dimensional) é um conjunto M munido de uma estrutura diferenciável (de cartas n-dimensionais). As cartas do correspondente atlas maximal são chamadas cartas **admissíveis** de M e cada atlas de M contido no correspondente atlas maximal é chamado um atlas **admissível** de M.

Cada variedade M também é um **espaço topológico**, cuja topologia pode ser definida pela seguinte prescrição: um subconjunto N de uma variedade M é chamado **aberto** se para cada carta admissível $(U, x, \tilde{U})$ de M, o conjunto $x(U \cap N)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$; em particular, os domínios das cartas admissíveis de M são abertos de M e de fato geram os abertos de M, ou seja, formam uma base da topologia de M. Assim, em variedades, noções topológicas tais como subconjuntos abertos, fechados e compactos, convergência, continuidade etc. são bem definidas.

Geralmente, a definição do conceito de variedade ainda inclui algumas restrições topológicas: exige-se que variedades sejam **espaços de Hausdorff paracompactos**. (Um espaço topológico é chamado um espaço de Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos sempre possuem vizinhanças abertas disjuntas, e é chamado paracompacto se, além disso, qualquer recobrimento aberto sempre pode ser refinado para um recobrimento aberto localmente finito: para uma definição desta noção, veja a discussão logo abaixo.)

A natureza local do conceito de variedade também se expressa pelo fato de que qualquer subconjunto aberto N de uma variedade M também é, de forma natural, uma variedade. (As cartas admissíveis $(U_N, x_N, \tilde{U}_N)$ de N são obtidas das cartas admissíveis $(U_M, x_M, \tilde{U}_M)$ de M com $U_M \cap N \neq \emptyset$ por restrição, pondo $U_N = U_M \cap N$, $x_N = x_M|_{U_N}$.)

Os exemplos mais simples de variedades n-dimensionais são o espaço $\mathbb{R}^n$ mesmo e a **esfera**

$$S^n = \{ u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |u|^2 = 1 \} . \tag{1.1}$$

No primeiro caso, existe um atlas trivial com uma única carta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}, \mathbb{R}^n)$, enquanto que no segundo caso, precisamos de um atlas com pelo menos duas cartas, por exemplo,

$$(S^n \backslash \{\mathrm{NP}\}, x_{\mathrm{NP}}, \mathbb{R}^n) \qquad \text{e} \qquad (S^n \backslash \{\mathrm{SP}\}, x_{\mathrm{SP}}, \mathbb{R}^n) \ ,$$

onde $\mathrm{NP} = (0, \ldots, 0, +1)$ e $\mathrm{SP} = (0, \ldots, 0, -1)$ denotam, respectivamente, o polo norte e o polo sul da esfera S^n enquanto que x_{NP} e x_{SP} denotam a projeção estereográfica, respectivamente, do polo norte e do polo sul sobre o hiperplano equatorial; explicitamente,

$$x_{\mathrm{NP}}^\mu(u) \;=\; \frac{u^\mu}{1 - u^{n+1}} \quad , \quad x_{\mathrm{SP}}^\mu(u) \;=\; \frac{u^\mu}{1 + u^{n+1}} \qquad (1 \leqslant \mu \leqslant n) \ . \tag{1.2}$$

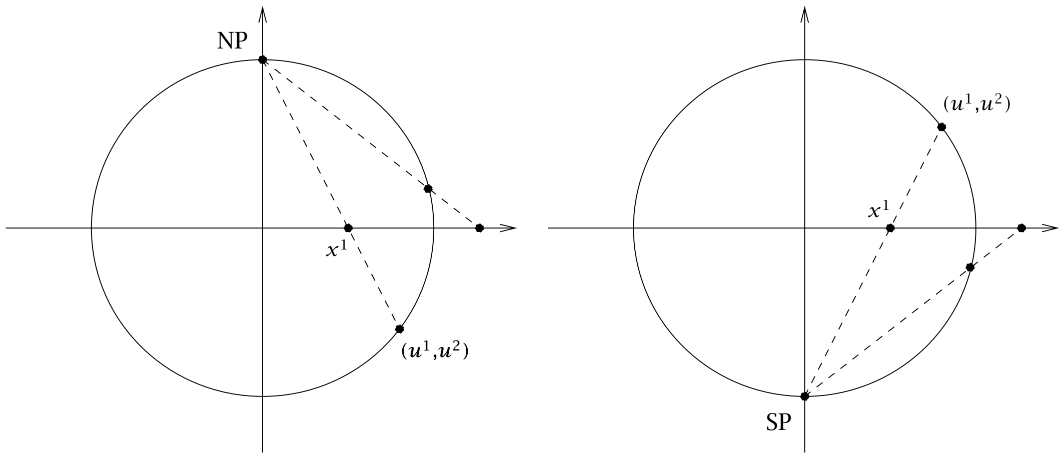


Figura 1.2: Projeções estereográficas como cartas para a esfera S^n $(n = 1)$

É possível mostrar que qualquer atlas da esfera S^n deve conter pelo menos duas cartas.

As aplicações compatíveis com estruturas diferenciáveis são as aplicações diferenciáveis, ou seja, as aplicações que, em termos de coordenadas locais, são representadas por funções diferenciáveis. Mais precisamente, temos:

1.4 Definição Uma aplicação $\phi : M \to N$ de uma variedade m-dimensional M em uma variedade n-dimensional N é chamada **diferenciável** se para quaisquer duas cartas admissíveis $(U, x, \tilde{U})$ de M e $(V, y, \tilde{V})$ de N com $U \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, o conjunto $x(U \cap \phi^{-1}(V))$ é aberto em $\mathbb{R}^m$ e a **representação local** de ϕ nestas cartas, isto é, a aplicação

$$y \circ \phi \circ x^{-1} : \ x(U \cap \phi^{-1}(V)) \ \longrightarrow \ \tilde{V}$$

é diferenciável.

Note que é suficiente verificar esta propriedade somente para as cartas de algum atlas de M e algum atlas de N; ela vale então para todas as cartas admissíveis. Note também que a composta $\psi \circ \phi : M \to P$ de aplicações diferenciáveis $\phi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ é novamente uma aplicação diferenciável.

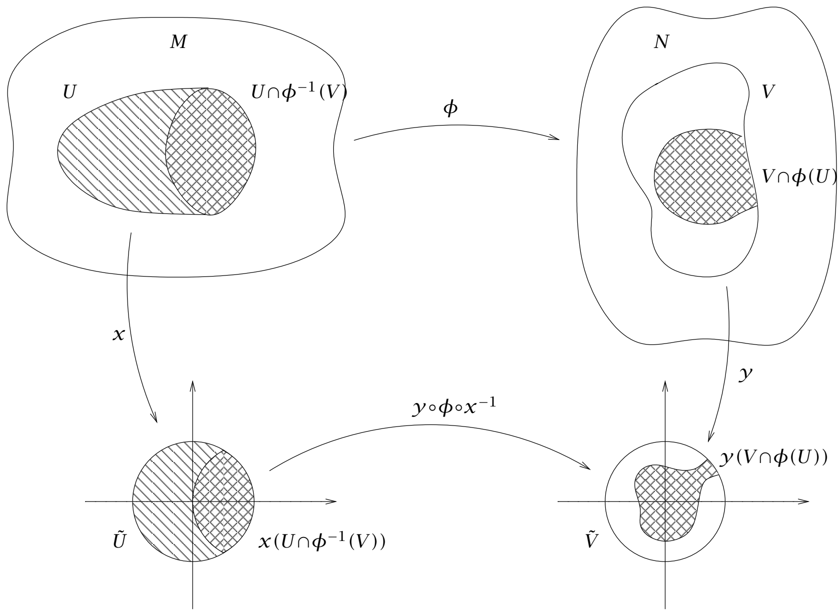


Figura 1.3: Representação local de uma aplicação diferenciável

As mais importantes classes especiais de aplicações diferenciáveis são as seguintes:

a) **Curvas:** são aplicações diferenciáveis $\gamma : I \to M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Dizemos que γ **passa por um ponto** m_0 **de** M se $0 \in I$ e $\gamma(0) = m_0$.

b) **Funções:** são aplicações diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$ ou $f : M \to \mathbb{C}$. Sob adição, multiplicação por escalares e multiplicação, todas definidas pontualmente como de costume, elas formam uma álgebra associativa e comutativa que denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$. Os pontos de M estão em correspondência bijetora com os ideais maximais $\mathfrak{I}_m$ da álgebra $\mathfrak{F}(M)$:

$$\mathfrak{I}_m \;=\; \{\, f \in \mathfrak{F}(M) \mid f(m) = 0 \,\}.$$

c) **Difeomorfismos:** uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é chamada um **difeomorfismo** ou **difeomorfismo global** se é bijetora e se a aplicação inversa $\phi^{-1} : N \to M$ também é diferenciável. Cabe ressaltar que a exigência explícita de que ϕ^{-1} seja diferenciável não pode ser omitida. (Por exemplo, a prescrição $\phi(x) = x^3$ define uma aplicação bijetora e diferenciável da variedade $\mathbb{R}$ em si que não é um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ pois a aplicação inversa ϕ^{-1}, dada por $\phi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, deixa de ser diferenciável em $y = 0$.) Sob composição de aplicações, os difeomorfismos de M formam um grupo que denotaremos por $\mathrm{Diff}(M)$.

d) **Difeomorfismos locais:** dado um ponto m de M, uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é chamada um **difeomorfismo local em** m se existem cartas admissíveis $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m e $(V, y, \tilde{V})$ de N em torno de $\phi(m)$ tais que a representação local de ϕ nestas cartas é (restrição de) um isomorfismo linear (o que implica $\dim M = \dim N$), e ϕ é chamada um **difeomorfismo local** se é um difeomorfismo local em todo ponto de M. (Note que esta definição *não* implica que um difeomorfismo local seja necessariamente bijetor, mas um difeomorfismo local bijetor é um difeomorfismo global.)

e) **Imersões:** dado um ponto m de M, uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é chamada uma **imersão em** m se existem cartas admissíveis $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m e $(V, y, \tilde{V})$ de N em torno de $\phi(m)$ tais que a representação local de ϕ nestas cartas é (restrição de) uma inclusão linear de $\mathbb{R}^{\dim M}$ em $\mathbb{R}^{\dim N}$ (o que implica $\dim M \leqslant \dim N$), e é chamada uma **imersão** se é uma imersão em todo ponto de M. (Note que esta definição *não* implica que uma imersão seja necessariamente injetora.)

f) **Submersões:** dado um ponto m de M, uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é chamada uma **submersão em** m se existem cartas admissíveis $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m e $(V, y, \tilde{V})$ de N em torno de $\phi(m)$ tais que a representação local de ϕ nestas cartas é (restrição de) uma projeção linear de $\mathbb{R}^{\dim M}$ sobre $\mathbb{R}^{\dim N}$ (o que implica $\dim M \geqslant \dim N$), e é chamada uma **submersão** se é uma submersão em todo ponto de M. (Note que esta definição *não* implica que uma submersão seja necessariamente sobrejetora.)

g) **Subimersões:** dado um ponto m de M, uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é chamada uma **subimersão em** m se existem cartas admissíveis $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m e $(V, y, \tilde{V})$ de N em torno de $\phi(m)$ tais que a representação local de ϕ nestas cartas é (restrição de) uma aplicação linear de $\mathbb{R}^{\dim M}$ em $\mathbb{R}^{\dim N}$, e é chamada uma **subimersão** se é uma subimersão em todo ponto de M.

Funções sobre variedades podem ser utilizadas para fins de localização, sendo que a ferramenta adequada para tanto são as chamadas partições da unidade. Para explicar isso, definimos primeiro o **suporte** de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ como o fecho do subconjunto aberto de M onde f não se anula:

$$\operatorname{supp}(f) \;=\; \overline{\{\, m \in M \mid f(m) \neq 0 \,\}}. \tag{1.3}$$

Em outras palavras, o complemento de $\operatorname{supp}(f)$ é o maior aberto de M no qual f se anula. (A abreviação "supp" se refere à palavra "support", em inglês, e é escrita com dois p para evitar confusão com a abreviação "sup" para o supremo.)

1.1 Proposição *Sejam M uma variedade, U um aberto de M e K um compacto com $K \subset U$. Então existe uma* ***funçaõ de corte*** $\chi \in \mathfrak{F}(M)$ *tal que* $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\operatorname{supp}(\chi) \subset U$ *e* $\chi|_K = 1$.

A função χ pode ser vista como uma aproximação de classe C^∞ da função característica de K, dada por

$$\chi_K(m) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{para } m \in K \\ 0 & \text{para } m \notin K \end{cases}$$

A próxima definição introduz o conceito de uma partição da unidade subordinada a um recobrimento aberto localmente finito de uma variedade. Um recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de um espaço topológico M é dito **localmente finito** se todo ponto m de M possui uma vizinhança aberta V_m que intersecta apenas um número finito dos U_α não-trivialmente, i.e., tal que o conjunto $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap V_m \neq \emptyset\}$ é finito. Observe que é suficiente considerar recobrimentos abertos localmente finitos, pois segundo as nossas convenções, variedades são paracompactas, o que significa que todo recobrimento aberto possui um refinamento localmente finito.

1.5 Definição Sejam M uma variedade e $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ um recobrimento aberto localmente finito de M. Uma **partição da unidade subordinada ao recobrimento** $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de funções $\chi_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ tais que $0 \leqslant \chi_\alpha \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha$ para $\alpha \in A$ e tal que

$$\sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha \;\equiv\; 1\;. \tag{1.4}$$

Note que por hipótese, todo ponto m de M possui uma vizinhança aberta V_m na qual quase todas as funções χ_α (i.e., todas a menos de um número finito) se anulam identicamente e assim a expressão no lado esquerdo da equação (1.4), quando restrita a V_m, se reduz a uma soma finita; portanto, esta expressão é bem definida como elemento de $\mathfrak{F}(M)$.

1.1 Teorema *Seja M uma variedade. Todo recobrimento aberto localmente finito de M admite uma partição da unidade a ele subordinada.*

Concluindo, queremos tecer algumas considerações referentes a modificações do conceito de variedade que resultam de mudanças da classe de diferenciabilidade. Geralmente, as funções de transição e todas as aplicações consideradas são de classe C^r, onde r pode assumir os valores $0, 1, \ldots, \infty$ e ω:

- As variedades consideradas aqui e a seguir são as variedades suaves ou lisas ou de classe C^∞.
- A noção mais fraca de variedade é a de uma **variedade topológica** ou variedade de classe C^0.
- A noção mais forte de variedade é a de uma **variedade analítica** ou variedade de classe C^ω.

No entanto, a distinção pelo grau de diferenciabilidade não tem nenhuma importância prática, pois segundo um teorema de H. Whitney, para $r \geqslant 1$, qualquer atlas de classe C^r é C^r-equivalente a um atlas de classe C^ω e, para $s > r$, dois atlas de classe C^s que são C^r-equivalentes já são C^s-equivalentes. Isso significa que existem apenas três tipos de variedades significativamente diferentes: variedades topológicas, variedades diferenciáveis e variedades analíticas. A principal diferença entre os últimos dois tipos decorre do fato que na categoria das variedades analíticas, o supracitado teorema sobre a existência de partições da unidade deixa de ser válido e precisa ser substituído por um princípio de continuação analítica, o que acarreta diferênças substanciais entre os dois tipos de variedades no que diz respeito à relação entre propriedades locais e propriedades globais.

Finalmente, de maneira análoga às variedades reais consideradas até então, podemos também definir variedades complexas, onde as cartas admissíveis $(U, x, \tilde{U})$ são formadas usando subconjuntos abertos $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$ em vez de $\mathbb{R}^n$ e supondo que as funções de transição sejam holomorfas. (Aqui, desde o início já não tem nenhuma diferença entre a classe C^1 e a classe C^ω.) Em particular, variedades complexas n-dimensionais sempre também são variedades reais $2n$-dimensionais.

Resumindo, ressaltamos mais uma vez que nestas notas, todas as variedades consideradas serão variedades reais de classe C^∞ e a palavra "diferenciável" será entendida como sinônimo de "suave" ou "liso/lisa" ou "de classe C^∞".

1.1.2 Vetores Tangentes

Intuitivamente, é óbvio quais vetores do espaço euclideano tridimensional são tangentes a uma curva ou uma superfície nele mergulhada, em qualquer um dos seus pontos. Contudo, essa noção de vetor tangente depende do mergulho da curva ou da superfície em questão, sendo que não existe nenhum mergulho preferido "a priori". (Por exemplo, podemos mergulhar a esfera S^2 no espaço $\mathbb{R}^3$ como "esfera redonda", conforme foi feito na equação (1.1), ou como "esfera deformada" – por exemplo, como elipsoide.) Assim, coloca-se a questão de como conferir ao conceito de vetor tangente a uma variedade, em qualquer um dos seus pontos, um sentido intrínsico, ou seja, definir este conceito sem recorrer a um mergulho da variedade em questão em um espaço ambiente de dimensão superior. Isso requer uma construção mais abstrata, da qual existem várias variantes (que no entanto se mostram equivalentes no final). Aqui, apresentaremos as duas mais importantes.

O método mais intuitivo para definir vetores tangentes usa curvas. Sejam M uma variedade n-dimensional e m um ponto fixo em M. Duas curvas γ_1 e γ_2 em M que passam por m, i.e., que satisfazem a condição $\gamma_1(0) = m = \gamma_2(0)$, são ditas **tangentes** em m se, para alguma carta $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m, as curvas $x \circ \gamma_1$ e $x \circ \gamma_2$ em $\tilde{U}$, que então satisfazem a condição $x(\gamma_1(0)) = 0 = x(\gamma_2(0))$, são tangentes na origem, i.e., se vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(\gamma_1(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(\gamma_2(t)) \Big|_{t=0} . \tag{1.5}$$

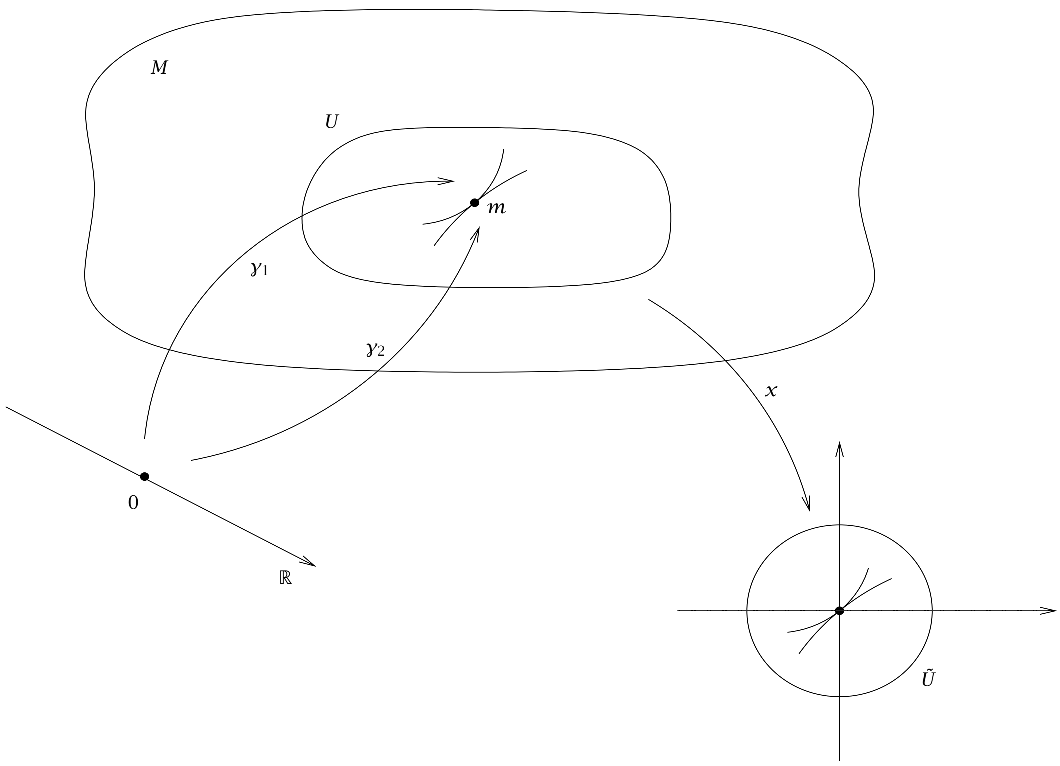


Figura 1.4: Vetores tangentes como classes de equivalência de curvas

Observe que essa propriedade não depende da escolha da carta, pois dada uma curva qualquer γ em M passando por m e qualquer outra carta $(U', x', \tilde{U}')$ de M em torno de m, temos pela regra da cadeia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x'^{\kappa}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}(0) \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^{\mu}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} , \tag{1.6}$$

e portanto a validade da equação (1.5) implica a validade da mesma equação com x^{μ} substituído por x'^{κ}. Obviamente, a relação de tangência entre curvas assim definida é uma relação de equivalência, e a classe de equivalência de uma curva γ passando por m é o **vetor tangente** a γ em m que, sugestivamente, será denotado por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\Big|_{t=0} .$$

O conjunto dos vetores tangentes a todas as possíveis curvas passando por m será denotado por T_mM e é chamado o **espaço tangente** de M em m; portanto, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma(t)\Big|_{t=0} \;\in\; T_mM \qquad \text{onde } \gamma(0) = m \in M\,. \tag{1.7}$$

Para justificar esta terminologia, precisamos mostrar que T_mM é um espaço vetorial, cuja dimensão será igual à dimensão de M. Para tanto, escolhemos alguma carta $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m e introduzimos uma família de curvas $\gamma_{x,w}$ especiais, parametrizadas por vetores $w \in \mathbb{R}^n$, que sob a aplicação de carta x correspondem a (pedaços de) retas passando pela origem:

$$\gamma_{x,w}(t) \;=\; x^{-1}(tw) \qquad \text{para } t \in I_w \subset \mathbb{R}\,.$$

(Aqui, I_w é um intervalo aberto em torno de 0 suficientemente pequeno para que valha $tw \in \tilde{U}$ quando $t \in I_w$.) É fácil verificar que qualquer curva γ em M passando por m é tangente a exatamente uma das curvas $\gamma_{x,w}$, a saber à curva $\gamma_{x,w}$ com

$$w \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(\gamma(t))\Big|_{t=0} .$$

Desta forma obtemos uma bijeção $T_mx : T_mM \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$T_mx\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma(t)\Big|_{t=0}\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(\gamma(t))\Big|_{t=0} . \tag{1.8}$$

Declarando que T_mx seja um isomorfismo linear, transferimos a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ para T_mM. Este procedimento não depende da escolha da carta, pois dada qualquer outra carta $(U', x', \tilde{U}')$ de M em torno de m, a bijeção $T_mx' : T_mM \to \mathbb{R}^n$ também será um isomorfismo linear, pois pela regra da cadeia (veja a equação (1.6)), vale

$$T_mx' \;=\; \mathrm{D}_0(x' \circ x^{-1}) \circ T_mx\,.$$

Observamos também que a escolha de uma carta admissível $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m induz uma base preferida $\{\partial_1|_m, \ldots, \partial_n|_m\}$ de T_mM, chamada a **base coordenada** de T_mM correspondente a este sistema de coordenadas locais, sendo que $\partial_\mu|_m$ é a préimagem do vetor e_μ da base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, definido por

$$e_\mu \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \text{ 1 na } \mu\text{-ésima posição}\,,$$

sob T_mx:

$$\partial_\mu|_m \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x^{-1}(te_\mu)\Big|_{t=0} \qquad \text{onde } m = x^{-1}(0). \tag{1.9}$$

Passando para outra carta admissível $(U', x', \tilde{U}')$ de M em torno de m, esta base coordenada se transforma conforme $\partial_\mu|_m \rightsquigarrow \partial'_\kappa|_m$, onde

$$\partial'_\kappa|_m \;=\; \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}(0)\;\partial_\mu|_m\,.$$

A segunda opção para definir vetores tangentes que abordaremos aqui basea-se no conceito de uma derivada direcional. Uma **derivada direcional** em um ponto m de uma variedade M é uma forma linear derivativa sobre a álgebra $\mathfrak{F}(M)$ das funções sobre M, isto é, uma aplicação $\hat{v}_m : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ que é linear,

$$\hat{v}_m(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha\, \hat{v}_m(f) + \beta\, \hat{v}_m(g) \qquad \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\, f, g \in \mathfrak{F}(M)\;, \tag{1.10}$$

e derivativa, ou seja, que satisfaz a regra de Leibniz,

$$\hat{v}_m(f\,g) \;=\; \hat{v}_m(f)\, g(m) + f(m)\, \hat{v}_m(g) \qquad \text{para } f, g \in \mathfrak{F}(M)\;. \tag{1.11}$$

As seguintes propriedades são de fácil verificação.

a) Derivadas direcionais se anulam sobre funções constantes.

b) Derivadas direcionais são operadores locais:

$$f_1 = f_2 \text{ em uma vizinhança de } m \quad \Longrightarrow \quad \hat{v}_m(f_1) = \hat{v}_m(f_2)\;.$$

Para mostrar isso, note que devido à linearidade de $\hat{v}_m$, basta mostrar que

a) $\hat{v}_m$ se anula sobre a função constante igual a 1. De fato,

$$\hat{v}_m(1) \;=\; \hat{v}_m(1 \cdot 1) \;=\; \hat{v}_m(1) \cdot 1 \;+\; 1 \cdot \hat{v}_m(1) \;=\; 2\, \hat{v}_m(1)\;.$$

b) $\hat{v}_m$ se anula sobre funções que se anulam em alguma vizinhança de m. De fato, seja $(U, x, \tilde{U})$ uma carta admissível de M em torno de m e com U suficientemente pequeno para que $f = 0$ em U. Existe então uma funçao de corte $\chi \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ com $\operatorname{supp}(\chi) \subset U$ e $\chi(m) = 1$. Portanto, $\chi f = 0$ e
$$\hat{v}_m(f) \;=\; \hat{v}_m(\chi)\, f(m) \;+\; \chi(m)\, \hat{v}_m(f) \;=\; \hat{v}_m(\chi f) \;=\; 0\;.$$

Observemos agora que as derivadas direcionais em um ponto m de uma variedade M formam um espaço vetorial que, provisoriamente, será denotado por $\hat{T}_m M$, e consideremos a aplicação linear canônica

$$\begin{array}{ccc} T_m M & \longrightarrow & \hat{T}_m M \\ v_m & \longmapsto & \hat{v}_m \end{array} \tag{1.12}$$

definida da seguinte forma: se γ é uma curva passando por m com

$$v_m \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \gamma(t)\Big|_{t=0}\;, \tag{1.13}$$

então pomos

$$\hat{v}_m(f) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(\gamma(t))\Big|_{t=0} \qquad \text{para } f \in \mathfrak{F}(M)\;. \tag{1.14}$$

Queremos mostar que a aplicação assim definida é um isomorfismo de espaços vetoriais. Para tanto, usamos uma carta admissível $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m, supondo sem perda de generalidade que $\tilde{U}$ seja uma bola em $\mathbb{R}^n$ em torno da origem; então vale

$$T_m x(v_m) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(\gamma(t))\Big|_{t=0}\;,$$

e

$$\hat{v}_m(f) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(f\circ x^{-1})(x(\gamma(t)))\Big|_{t=0} \;=\; \partial_\mu(f\circ x^{-1})(0)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x^\mu(\gamma(t))\Big|_{t=0}\,.$$

Desta fórmula, segue imediatamente que a aplicação $\hat{v}_m : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ definida pela equação (1.14) é de fato uma derivada direcional (ou seja, que ela satisfaz as condições (1.10) e (1.11)), que ela depende apenas da classe de equivalência v_m da curva γ utilizada na sua definição e que a aplicação (1.12) é linear. Para mostrar que ela é um isomorfismo de espaços vetoriais, mostraremos que $\{\hat{\partial}_1|_m, \ldots, \hat{\partial}_n|_m\}$ é uma base de $\hat{T}_m M$. Explicitamente, combinando as equações (1.9), (1.13) e (1.14), vemos que

$$\hat{\partial}_\mu|_m(f) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(f\circ x^{-1})(te_\mu)\Big|_{t=0} \;=\; \partial_\mu(f\circ x^{-1})(0) \qquad \text{para } f\in\mathfrak{F}(M)\,. \tag{1.15}$$

Agora, para uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ dada, a função $f_x = f\circ x^{-1} \in \mathfrak{F}(\tilde{U})$ admite uma representação

$$f_x \;=\; f_x(0) + z^\mu\, h_{x,\mu}$$

onde z^μ denota a μ-ésima função coordenada em $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, com $h_{x,\mu} = h_\mu \circ x^{-1} \in \mathfrak{F}(\tilde{U})$, sendo que

$$h_{x,\mu}(0) \;=\; \partial_\mu f_x(0)\,.$$

De fato, supondo sem perda de generalidade que $\tilde{U}$ é uma bola em $\mathbb{R}^n$, notamos que para $z \in \tilde{U}$, vale

$$f_x(z) \;=\; f_x(0) + \int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,f_x(sz) \;=\; f_x(0) + z^\mu \int_0^1 \mathrm{d}s\;\partial_\mu f_x(sz)\,,$$

de modo que podemos definir $h_{x,\mu}$ por

$$h_{x,\mu}(z) \;=\; \int_0^1 ds\;\partial_\mu f_x(sz)\,.$$

Portanto a função $f|_U \in \mathfrak{F}(U)$ admite uma representação

$$f|_U \;=\; f(m) + x^\mu\, h_\mu,$$

com $h_\mu \in \mathfrak{F}(U)$, sendo que

$$h_\mu(m) \;=\; \hat{\partial}_\mu|_m(f)\,.$$

Escolhemos também uma vizinhança compacta K de m com $K \subset U$ e uma função corte $\chi \in \mathfrak{F}(M)$ com $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\mathrm{supp}(\chi) \subset U$ e $\chi \equiv 1$ sobre K. Com isso, podemos estender as funções x^μ e h_μ sobre U a funções $\tilde{x}^\mu$ e $\tilde{h}_\mu$ sobre M, com

$$\tilde{x}^\mu \;=\; \left\{\begin{array}{ccc} \chi\, x^\mu & \text{sobre} & U \\ 0 & \text{sobre} & M\setminus U \end{array}\right\} \qquad \text{e} \qquad \tilde{h}_\mu \;=\; \left\{\begin{array}{ccc} \chi\, h_\mu & \text{sobre} & U \\ 0 & \text{sobre} & M\setminus U \end{array}\right\}.$$

Assim, concluímos que a função $f\chi^2 \in \mathfrak{F}(M)$ admite uma representação

$$f\chi^2 \;=\; f(m)\,\chi^2 \,+\, \tilde{x}^\mu \tilde{h}_\mu\,,$$

com $\tilde{h}_\mu \in \mathfrak{F}(M)$, sendo que

$$\tilde{h}_\mu(m) \;=\; \hat{\partial}_\mu|_m(f)\,.$$

Como $\chi^2 \equiv 1$ na vizinhança K de m, sabemos que para $\hat{v}_m \in \hat{T}_m M$ qualquer,

$$\hat{v}_m(f\chi^2) = \hat{v}_m(f) \qquad \text{e} \qquad \hat{v}_m(\chi^2) = \hat{v}_m(1) = 0 \,.$$

Logo,

$$\hat{v}_m(f) = \hat{v}_m(f\chi^2) = f(m)\,\hat{v}_m(\chi^2) + \hat{v}_m(\tilde{x}^\mu)\,\tilde{h}_\mu(m) + \tilde{x}^\mu(m)\,\hat{v}_m(\tilde{h}_\mu) = \hat{v}_m(\tilde{x}^\mu)\,\hat{\partial}_\mu|_m(f)$$

e portanto

$$\hat{v}_m = \hat{v}_m(\tilde{x}^\mu)\,\hat{\partial}_\mu|_m \,.$$

Tendo demonstrado a equivalência completa das duas definições de vetores tangentes como classes de equivalência de curvas e como derivadas direcionais, omitiremos de agora em diante o símbolo ˆ e reescrevemos as equações (1.13) e (1.14) na forma

$$v \cdot f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} \qquad \text{para} \quad v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\Big|_{t=0} \in T_m M \quad \text{e} \quad f \in \mathfrak{F}(M)\,, \tag{1.16}$$

e a equação (1.15) na forma

$$\partial_\mu f\,(m) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ x^{-1})(te_\mu)\Big|_{t=0} = \partial_\mu(f \circ x^{-1})(0) \qquad \text{para } f \in \mathfrak{F}(M)\,. \tag{1.17}$$

Finalmente, se $\phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades, definimos, para todo ponto m de M, a **aplicação tangente** a ϕ em m ou simplesmente **derivada** de ϕ em m como a aplicação linear $T_m\phi : T_m M \to T_{\phi(m)} N$ dada por

$$T_m\phi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\Big|_{t=0}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\gamma(t))\Big|_{t=0}\,, \tag{1.18}$$

ou equivalentemente

$$(T_m\phi\,(v)) \cdot f = v \cdot (f \circ \phi) \qquad \text{para } v \in T_m M,\, f \in \mathfrak{F}(N)\,. \tag{1.19}$$

Vale então a **regra da cadeia**: dadas aplicações diferenciáveis $\phi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ entre variedades, a derivada da composta é igual à composta das derivadas:

$$T_m(\psi \circ \phi) = T_{\phi(m)}\psi \circ T_m\phi \,. \tag{1.20}$$

Finalmente, temos o seguinte teorema, que é uma conseqüência direta dos teoremas das funções inversas, das funções implícitas e do posto constante, provindo do cálculo em $\mathbb{R}^n$:

1.2 Teorema *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Então para todo ponto m de M, temos*

- *ϕ é um difeomorfismo local em m se e somente se sua derivada $T_m\phi : T_m M \to T_{\phi(m)} N$ em m é um isomorfismo linear.*
- *ϕ é uma imersão em m se e somente se sua derivada $T_m\phi : T_m M \to T_{\phi(m)} N$ em m é injetora.*
- *ϕ é uma submersão em m se e somente se sua derivada $T_m\phi : T_m M \to T_{\phi(m)} N$ em m é sobrejetora.*
- *ϕ é uma subimersão em m se e somente se sua derivada tem posto constante em torno de m, i.e., se sua derivada $T_{m'}\phi : T_{m'} M \to T_{\phi(m')} N$ nos pontos m' de alguma vizinhança aberta U de m satisfaz $\dim \operatorname{im} T_{m'}\phi = \dim \operatorname{im} T_m\phi$ (e portanto também $\dim \ker T_{m'}\phi = \dim \ker T_m\phi$).*

1.1.3 Produto Cartesiano

Sejam M_1 e M_2 duas variedades e $M_1 \times M_2$ o produto cartesiano de M_1 e M_2 como conjunto. Dadas uma carta admissível $(U_1, x_1, \tilde{U}_1)$ de M_1 e uma carta admissível $(U_2, x_2, \tilde{U}_2)$ de M_2, a tripla $(U_1 \times U_2, x_1 \times x_2, \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2)$ onde

$$\begin{array}{rccc} x_1 \times x_2 : & U_1 \times U_2 & \longrightarrow & \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \\ & (m_1, m_2) & \longmapsto & (x_1(m_1), x_2(m_2)) \end{array}$$

é uma carta de $M_1 \times M_2$, e se $\mathcal{A}_{M_1}$ é um atlas admissível de M_1 e $\mathcal{A}_{M_2}$ é um atlas admissível de M_2, o conjunto

$$\mathcal{A}_{M_1 \times M_2} = \{ (U_1 \times U_2, x_1 \times x_2, \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2) \mid (U_1, x_1, \tilde{U}_1) \in \mathcal{A}_{M_1}, (U_2, x_2, \tilde{U}_2) \in \mathcal{A}_{M_2} \}$$

é um atlas de $M_1 \times M_2$: isto segue do fato de que para aplicações diferenciáveis (difeomorfismos) $\phi_i : U_i \to V_i$ onde U_i e V_i são abertos de $\mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$, a aplicação $\phi_1 \times \phi_2 : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$ definida por $(\phi_1 \times \phi_2)(u_1, u_2) = (\phi_1(u_1), \phi_2(u_2))$ também é diferenciável (um difeomorfismo). O produto cartesiano $M_1 \times M_2$ munido da estrutura diferenciável gerada por este atlas (a qual depende apenas das estruturas diferenciáveis de M_1 e M_2) é uma variedade de dimensão $\dim M_1 + \dim M_2$ chamada a **variedade produto** de M_1 e M_2. Note que a topologia em $M_1 \times M_2$ induzida por esta estrutura diferenciável coincide com a topologia produto. Ademais, os seguintes fatos são de fácil verificação.

(i) as **projeções canônicas** $\mathrm{pr}_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\mathrm{pr}_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ definidas por

$$\mathrm{pr}_1(m_1, m_2) = m_1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{pr}_2(m_1, m_2) = m_2$$

são diferenciáveis (e, de fato, são submersões sobrejetoras);

(ii) se N é uma variedade qualquer, se $\phi_1 : N \to M_1$ e $\phi_2 : N \to M_2$ são aplicações dadas e se $(\phi_1, \phi_2) : N \to M_1 \times M_2$ é a aplicação definida por

$$(\phi_1, \phi_2)(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n))$$

então (ϕ_1, ϕ_2) é diferenciável se e somente se ϕ_1 e ϕ_2 são diferenciáveis.

Também podemos considerar, para cada ponto m_1 de M_1 e cada ponto m_2 de M_2, as **inclusões** $\mathrm{i}_{m_2} : M_1 \to M_1 \times M_2$ e $\mathrm{i}_{m_1} : M_2 \to M_1 \times M_2$ definidas por

$$\mathrm{i}_{m_2}(m_1') = (m_1', m_2) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{i}_{m_1}(m_2') = (m_1, m_2')$$

e observar que estas também são diferenciáveis (e, de fator, são imersões injetoras), de modo que se N é uma variedade qualquer e $\phi : M_1 \times M_2 \to N$ é uma aplicação diferenciável, todas as restrições $\phi(., m_2) : M_1 \to N$ e $\phi(m_1, .) : M_2 \to N$ são diferenciáveis, mas a afirmação recíproca (de que diferenciabilidade de todas estas restrições já implicaria diferenciabilidade de ϕ) não é válida.

Obviamente, a noção do produto cartesiano pode ser estendida para definir o produto $M_1 \times \ldots \times M_k$ de um número arbitrário (finito) de variedades $M_1, \ldots, M_k$, e a menos de difeomeorfismos, este produto é comutativo e associativo: $M_2 \times M_1 \cong M_1 \times M_2$ e $(M_1 \times M_2) \times M_3 \cong M_1 \times (M_2 \times M_3)$.

1.1 Exemplo Como variedade diferenciável, o espaço $\mathbb{R}^n$ é o produto de n cópias da reta real $\mathbb{R}$ e o **toro n-dimensional** $\mathbb{T}^n$ é o produto de n cópias do círculo $\mathbb{T} = S^1$:

$$\mathbb{R}^n \cong \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{vezes}} \quad , \quad \mathbb{T}^n \cong \underbrace{\mathbb{T} \times \ldots \times \mathbb{T}}_{n \text{vezes}} \; .$$

◊

Passando à estrutura tangente, notamos que, para todo ponto (m_1, m_2) de $M_1 \times M_2$, podemos utilizar as derivadas das projeções canônicas para identificar o espaço tangente $T_{(m_1,m_2)}(M_1 \times M_2)$ do produto $M_1 \times M_2$ com a soma direta dos espaços tangentes $T_{m_1}M_1$ e $T_{m_2}M_2$:

$$T_{(m_1,m_2)}(M_1 \times M_2) \;\cong\; T_{m_1}M_1 \oplus T_{m_2}M_2 \;. \tag{1.21}$$

Explicitamente, temos um isomorfismo canônico

$$\begin{array}{ccc} T_{(m_1,m_2)}(M_1 \times M_2) & \longrightarrow & T_{m_1}M_1 \oplus T_{m_2}M_2 \\ v & \longmapsto & v_1 + v_2 \end{array}$$

formalmente definido em termos das derivadas das projeções canônicas,

$$v_1 \;=\; T_{(m_1,m_2)}\,\mathrm{pr}_1(v) \in T_{m_1}M_1 \qquad \text{e} \qquad v_2 \;=\; T_{(m_1,m_2)}\,\mathrm{pr}_2(v) \in T_{m_2}M_2 \;,$$

de modo que

$$T_{m_1}M_1 \;\cong\; \ker(T_{(m_1,m_2)}\,\mathrm{pr}_2) \qquad \text{e} \qquad T_{m_2}M_2 \;\cong\; \ker(T_{(m_1,m_2)}\,\mathrm{pr}_1) \;.$$

1.1.4 Subvariedades

A maior dificuldade associada ao conceito de subvariedade reside no fato de que é necessário distinguir entre duas noções diferentes de subvariedade que não são equivalentes:

- a noção mais forte de uma “subvariedade mergulhada”, e
- a noção mais fraca de uma “subvariedade imersa”.

Aqui, adotaremos a primeira, ou seja: a expressão “subvariedade” sem especificação adicional significará “subvariedade mergulhada”.

Para dar uma construção explícita, adotamos a convenção de que, se $p \leqslant n$, o espaço $\mathbb{R}^p$ será identificado com o subespaço de $\mathbb{R}^n$ definido pela condição de que as últimas $n-p$ coordenadas se anulam. Claramente, dado um subespaço p-dimensional de $\mathbb{R}^n$ qualquer, existe um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$ que o leva no subespaço $\mathbb{R}^p$ assim definido.

Sejam M uma variedade de dimensão n e S um subconjunto de M. Dizemos que S é **localmente plano** em um ponto s de S se existe uma carta admissível $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de s tal que

$$x(U \cap S) \;=\; \tilde{U} \cap \mathbb{R}^p \;. \tag{1.22}$$

Um subconjunto S de M que é localmente plano em todos os seus pontos é chamado uma **subvariedade** de M, e qualquer carta de M com a propriedade (1.22) é chamada de **adaptada** a esta subvariedade.

Para justificar essa terminologia, precisamos mostrar que uma subvariedade realmente é uma variedade no sentido da Definição 1.3. Para tanto, observamos que dada uma carta $(U, x, \tilde{U})$ admissível de M adaptada a S, obtemos uma carta $(U_S, x_S, \tilde{U}_S)$ de S, chamada a **carta induzida**, pondo

$$U_S \;=\; U \cap S \quad , \quad \tilde{U}_S \;=\; \tilde{U} \cap \mathbb{R}^p \quad , \quad x_S \;=\; x|_{U_S} \;, \tag{1.23}$$

pois então $\tilde{U}_S$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$ e, conforme a condição (1.22), x_S é uma bijeção de U_S sobre $\tilde{U}_S$. Além disso, se $(U, x, \tilde{U})$ e $(U', x', \tilde{U}')$ são duas cartas admissíveis (e portanto compatíveis)

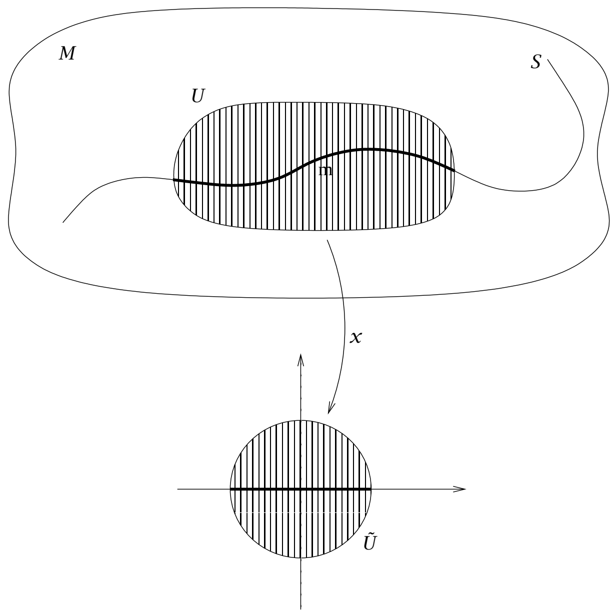


Figura 1.5: Cartas de variedades adaptadas a subvariedades

de M adaptadas a S, as cartas induzidas $(U_S, x_S, \tilde{U}_S)$ e $(U'_S, x'_S, \tilde{U}'_S)$ de S também serão compatíveis, pois

$$x_S(U_S \cap U'_S) \;=\; x(U \cap U') \cap \mathbb{R}^p \qquad \text{e} \qquad x'_S(U_S \cap U'_S) \;=\; x'(U \cap U') \cap \mathbb{R}^p$$

são abertos de $\mathbb{R}^p$ e as aplicações

$$x'_S \circ x_S^{-1} : x_S(U_S \cap U'_S) \;\longrightarrow\; x'_S(U_S \cap U'_S)$$

e

$$x_S \circ x_S'^{-1} : x'_S(U_S \cap U'_S) \;\longrightarrow\; x_S(U_S \cap U'_S)$$

são obtidas a partir das aplicações diferenciáveis

$$x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \;\longrightarrow\; x'(U \cap U')$$

e

$$x \circ x'^{-1} : x'(U \cap U') \;\longrightarrow\; x(U \cap U')$$

por restrição ao subespaço $\mathbb{R}^p$ de $\mathbb{R}^n$ e portanto também são diferenciáveis. Assim, para todo atlas admissível $\mathcal{A}$ de cartas de M adaptadas a S, o conjunto

$$\mathcal{A}_S \;=\; \{\, (U_S, x_S, \tilde{U}_S) \mid (U, x, \tilde{U}) \in \mathcal{A} \,\}$$

é um atlas de S, chamado o **atlas induzido.** Passando a classes de equivalência de atlas, ou atlas maximais, obtemos a **estrutura diferenciável** de S **induzida** pela estrutura diferenciável dada de M, que torna S uma variedade de dimensão p.

O conceito de uma carta de uma variedade adaptada a uma subvariedade pode ser entendido de uma maneira mais intuitiva usando a linguagem de coordenadas locais: se $(U, x, \tilde{U})$ é uma carta de uma variedade M adaptada a uma subvariedade S e $(U_S, x_S, \tilde{U}_S)$ é a carta induzida de S, então o conjunto de funções $x^1, \ldots, x^n$ que constituem as coordenadas da carta $(U, x, \tilde{U})$ se decompõe naturalmente em dois subconjuntos: o conjunto de funções $x^1, \ldots, x^p$ que constituem as coordenadas **tangenciais** à subvariedade S, compondo a carta $(U_S, x_S, \tilde{U}_S)$, e o conjunto de funções $x^{p+1}, \ldots, x^n$ que constituem as coordenadas **transversais** à subvariedade S, no sentido de que $S \cap U$ é o conjunto dos pontos m de U que satisfazem o sistema de equações

$$x^{p+1}(m) \;=\; \ldots \;=\; x^n(m) \;=\; 0\,.$$

Reciprocamente, dado um aberto U de M e um sistema de coordenadas x^μ de M definido no domínio U, mantendo-se as últimas $n-p$ coordenadas fixas define não apenas uma subvariedade S_U de U mas toda uma família de subvariedades $S_U(c_{p+1}, \ldots, c_n)$ de U definidas por

$$S_U(c_{p+1}, \ldots, c_n) \;=\; \{\, m \in U \mid x^{p+1}(m) \;=\; c_{p+1}\,,\, \ldots\,,\, x^n(m) \;=\; c_n \,\}\,,$$

onde $c_{p+1}, \ldots, c_n$ são constantes.

1.2 Exemplo Seja S^{n-1} a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ (veja a equação (1.1)) e, mais geralmente, para $a > 0$,

$$S_a^{n-1} \;=\; \{\, u \in \mathbb{R}^n \mid |u|^2 = a^2 \,\}$$

a esfera de raio a em $\mathbb{R}^n$. Um sistema de coordenadas $(U, x, \tilde{U})$ de $\mathbb{R}^n$, com sistema de coordenadas induzido $(U_S, x_S, \tilde{U}_S)$ de $S = S^{n-1}$ definido conforme a equação (1.23), se chama um **sistema de coordenadas esféricas** se

(i) U é um **cone** aberto em $\mathbb{R}^n$ (isto é, um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $u \in U$ implica $\lambda u \in U$ para todo $\lambda > 0$, de modo que $U \cong U_S \times \mathbb{R}^+$) e $\tilde{U} = \tilde{U}_S \times \mathbb{R}^+$ onde $\tilde{U}_S$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$;

(ii) considerando a aplicação $x : U \to \tilde{U}$, as primeiras $n-1$ coordenadas (tangenciais) são **coordenadas angulares** enquanto que a última coordenada (transversal) é a **coordenada radial**,

$$x^n(u) \;=\; r \;=\; |u| \qquad \text{onde} \qquad r^2 \;\equiv\; |u|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} u_i^2\,;$$

(iii) mediante a aplicação $x^{-1} : \tilde{U} \to U$ e sua restrição $x_S^{-1} : \tilde{U}_S \to U_S$, as coordenadas cartesianas originais $u_1, \ldots, u_n$ dependem linearmente da coordenada radial,

$$u_i \;=\; r\,(x_S^{-1})_i(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)\,.$$

Obviamente, sistemas de coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$ são sistemas de coordenadas adaptadas a todas as esferas S_a^{n-1}, pois fixando-se a coordenada radial igual a uma constante a, obtém-se um sistema de coordenadas para a esfera de raio a. Reciprocamente, um sistema de coordenadas qualquer para a esfera unitária pode ser estendido, de forma única, a um sistema de coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$: um exemplo é dado pondo $\tilde{U}_S =]0, 2\pi[$ com

$$x_S^{-1}(\theta) \;=\; (\cos\theta, \sin\theta)$$

para $n = 2$, e $\tilde{U}_S =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ com

$$x_S^{-1}(\theta, \varphi) \;=\; (\cos\theta\,\cos\varphi\,,\, \cos\theta\,\sin\varphi\,,\, \sin\theta)$$

para $n = 3$. ◊

Dada uma subvariedade S de uma variedade M, podemos considerar a **inclusão** de S em M como uma aplicação

$$i_S : S \longrightarrow M .$$

Então é óbvio pela construção da estrutura de variedade de S descrita acima que i_S é diferenciável e é uma imersão injetora. Mais do que isso: a topologia de S como variedade coincide com a topologia induzida de S pela topologia de M, o que significa que a inclusão de S em M é um mergulho.

1.6 Definição Sejam S e M variedades e $i : S \to M$ uma imersão injetora. Dizemos que i é um **mergulho** se i é um homeomorfismo de S sobre sua imagem $i(S)$ quando esta for munida da topologia induzida pela topologia de M.

Verifica-se então que o conceito de subvariedade como definido aqui corresponde ao de uma **subvariedade mergulhada** e que existe a possibilidade de definir o conceito de uma **subvariedade imersa** como sendo a imagem de uma imersão injetora qualquer. O seguinte exemplo clássico mostra que este é de fato um conceito mais geral.

1.3 Exemplo (fluxo racional e fluxo irracional no toro) Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi_\lambda : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \\ & s & \longmapsto & (e^{\mathrm{i}s}, e^{\mathrm{i}\lambda s}) \end{array}$$

onde λ é um parâmetro real. Obviamente, ϕ_λ é uma imersão, mas suas propriedades geométricas dependem crucialmente de se λ é racional ou irracional.

- Se λ é racional, podemos escrever $\lambda = \pm p/q$ com inteiros $p, q \in \mathbb{N}$ relativamente primos: então a aplicação ϕ_λ é periódica de período pq e portanto não é injetora, mas ela induz uma imersão injetora do círculo $\mathbb{T}$ no toro $\mathbb{T}^2$ que é um mergulho. Neste caso, a imagem de ϕ_λ é uma cópia do círculo realizada como uma curva no toro que é *fechada* em $\mathbb{T}^2$, dando q voltas na primeira direção e p voltas na segunda direção até se fechar em si mesmo.

- Se λ é irracional, a aplicação ϕ_λ é injetora mas é apenas uma imersão injetora, sendo que não existe mergulho da reta real $\mathbb{R}$ no toro $\mathbb{T}^2$, uma vez que o toro é compacto e a reta real não é. Neste caso, a imagem de ϕ_λ é uma cópia da reta real realizada como uma curva no toro que é *densa* em $\mathbb{T}^2$ e nunca se fecha em si mesmo.

Em ambos os casos, a palavra “fluxo” se refere ao fato de que ϕ_λ é solução de uma equação diferencial definida por um campo vetorial invariante sobre o toro $\mathbb{T}^2$ – um aspecto que só se tornará totalmente transparente usando noções básicas da teoria de grupos de Lie. ◊

Passando à estrutura tangente, notamos que para todo ponto s de S, podemos utilizar a derivada $T_s i_S : T_s S \to T_s M$ da inclusão $i_S : S \to M$ para identificar o espaço tangente $T_s S$ da subvariedade S com um subespaço do espaço tangente $T_s M$ da variedade ambiente M (isso vale não apenas para subvariedades mergulhadas mas também para subvariedades imersas). Doravante, sempre suporemos que tal identificação tenha sido efetuada.

1.2 Fibrados Vetoriais

Intuitivamente, um fibrado vetorial E de posto r sobre uma variedade M é obtido associando a cada ponto m de M um espaço vetorial r-dimensional E_m de tal forma que, num sentido a ser especificado, E_m depende diferenciavelmente de m. O primeiro passo para formalizar este conceito consiste em definir o "espaço" E como sendo a união disjunta de todos os espaços vetoriais E_m,

$$E = \bigcup_{m \in M} E_m \, , \tag{1.24}$$

e introduzir a aplicação $\pi : E \to M$ que associa a cada ponto e de E o único ponto m de M tal que $e \in E_m$. Então a idéia de que E_m deve depender diferenciavelmente de m pode ser concretizada pela exigência de que E seja localmente trivial sobre M, i.e., de que para todo subconjunto U aberto de M suficientemente pequeno, a parte $\pi^{-1}(U)$ de E acima de U pode ser representada como o produto cartesiano $U \times \mathbb{E}$ de U com um espaço vetorial r-dimensional fixo $\mathbb{E}$, sendo que a transição de uma tal representação para outra deve ser diferenciável. A formulação exata é análoga ao procedimento adotado na definição de variedades.

1.2.1 Definições e Exemplos

1.7 Definição Sejam E e M dois conjuntos, $\pi : E \to M$ uma aplicação sobrejetora e $\mathbb{E}$ um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão finita.

1. Uma **carta de fibrado vetorial**, ou simplesmente **carta fv**, de E sobre M (relativa a π) é uma quádrupla $C = (U, \Phi, x, \tilde{U})$ consistindo de

   (i) um subconjunto U de M,

   (ii) um subconjunto aberto $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$,

   (iii) uma bijeção
   $$\begin{array}{rccl} x: & U & \longrightarrow & \tilde{U} \\ & m & \longmapsto & x(m) = (x^1(m), \ldots, x^n(m)) \end{array} ,$$

   (iv) uma bijeção
   $$\begin{array}{rccl} \Phi: & \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \tilde{U} \times \mathbb{E} \\ & e & \longmapsto & \Phi(e) = (x(\pi(e)), \Phi_2(e)) \end{array} ,$$

   onde $\Phi_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi$.[1]

   Observe então que uma carta fv $C = (U, \Phi, x, \tilde{U})$ de E sobre M pode ser considerada como a junção de uma carta comum $(U, x, \tilde{U})$ de M e uma carta comum $(\pi^{-1}(U), \Phi, \tilde{U} \times \mathbb{E})$ de E tal que o seguinte diagrama comuta:[1]

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{U} \times \mathbb{E} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "x"] & \tilde{U} \end{tikzcd}$$

[1] Para quaisquer dois conjuntos A_1 e A_2, denotamos por pr_1 e pr_2 as projeções canônicas do produto cartesiano $A_1 \times A_2$ sobre os fatores A_1 e A_2, respectivamente.

2. Duas cartas fv $C = (U, \Phi, x, \tilde{U})$ e $C' = (U', \Phi', x', \tilde{U}')$ de E sobre M são ditas **compatíveis** se $U \cap U' = \emptyset$ ou, quando $U \cap U' \neq \emptyset$, se $x(U \cap U')$ e $x'(U \cap U')$ são abertos de $\mathbb{R}^n$, as aplicações

$$x' \circ x^{-1} : \ x(U \cap U') \ \longrightarrow \ x'(U \cap U')$$

e

$$x \circ x'^{-1} : \ x'(U \cap U') \ \longrightarrow \ x(U \cap U')$$

são diferenciáveis e as aplicações

$$\Phi' \circ \Phi^{-1} : \ x(U \cap U') \times \mathbb{E} \ \longrightarrow \ x'(U \cap U') \times \mathbb{E}$$

e

$$\Phi \circ \Phi'^{-1} : \ x'(U \cap U') \times \mathbb{E} \ \longrightarrow \ x(U \cap U') \times \mathbb{E}$$

podem ser escritas na forma

$$(\Phi' \circ \Phi^{-1})(z, e) \ = \ ((x' \circ x^{-1})(z), \, \tau_{\Phi',\Phi}(z) \cdot e) \qquad \text{para } z \in x(U \cap U'), \, e \in \mathbb{E}$$

e

$$(\Phi \circ \Phi'^{-1})(z', e') \ = \ ((x \circ x'^{-1})(z'), \, \tau_{\Phi,\Phi'}(z') \cdot e') \qquad \text{para } z' \in x'(U \cap U'), \, e' \in \mathbb{E}$$

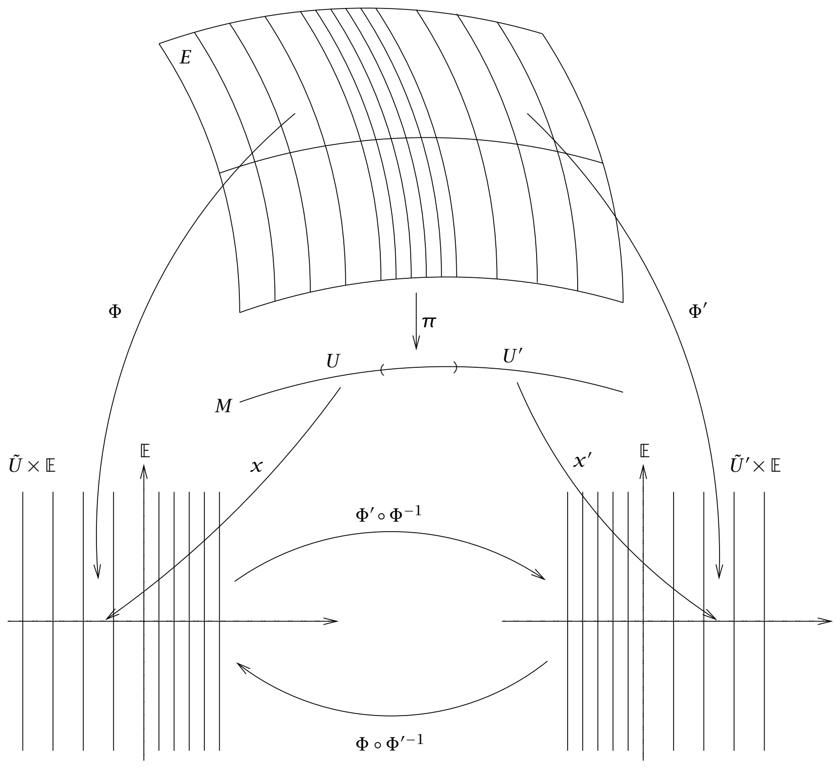


Figura 1.6: Cartas e funções de transição entre cartas para fibrados vetoriais

com aplicações diferenciáveis

$$\tau_{\Phi',\Phi} : \ x(U \cap U') \ \longrightarrow \ \mathrm{GL}(\mathbb{E})$$

e

$$\tau_{\Phi,\Phi'} : x'(U \cap U') \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E})$$

onde $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ é o **grupo geral linear** de $\mathbb{E}$, isto é, o grupo de todas as aplicações lineares inversíveis de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{E}$. Obviamente,

$$\tau_{\Phi,\Phi'}(z') = \tau_{\Phi',\Phi}(z)^{-1}$$

quando $z' = (x' \circ x^{-1})(z)$. As aplicações τ (que assumem valores matriciais quando fixamos uma base de $\mathbb{E}$) são chamadas as **funções de transição** entre as duas cartas fv.

1.8 Definição Sejam E e M dois conjuntos, $\pi : E \to M$ uma aplicação sobrejetora e $\mathbb{E}$ um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão finita.

(i) Um conjunto $\mathcal{A} = \{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de cartas fv $C_\alpha = (U_\alpha, \Phi_\alpha, x_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ de E sobre M é chamado um **atlas de fibrado vetorial**, ou simplesmente **atlas fv**, de E sobre M se:

  (a) os domínios U_α recobrem M, i.e., $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,

  (b) quaisquer duas cartas fv de $\mathcal{A}$ são compatíveis.

(ii) Dois atlas fv $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ de E sobre M são ditos **equivalentes** se sua união $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ também é um atlas fv de E sobre M, isto é, se todas as cartas fv de $\mathcal{A}$ são compatíveis com todas as cartas fv de $\mathcal{A}'$.

(iii) A classe de equivalência $[\mathcal{A}]$ de um atlas fv $\mathcal{A}$ de E sobre M é chamada a **estrutura de fibrado vetorial**, ou simplesmente **estrutura fv**, de E sobre M gerada por $\mathcal{A}$.

(iv) O atlas fv $\bar{\mathcal{A}}$ formado por todas as cartas fv de E sobre M que são compatíveis com as cartas fv de um dado atlas fv $\mathcal{A}$ de E sobre M é chamado o **atlas de fibrado vetorial maximal**, ou simplesmente **atlas fv maximal**, gerado por $\mathcal{A}$ e representa a estrutura fv $[\mathcal{A}]$ de E sobre M gerada por $\mathcal{A}$.

Novamente, esta definição contém uma afirmação implícita, a saber que a relação entre atlas introduzida no item (ii) realmente é uma relação de equivalência.

1.9 Definição Um **fibrado vetorial** (real ou complexo) de posto r é uma quádrupla $(E, M, \pi, \mathbb{E})$ onde E e M são conjuntos, $\pi : E \to M$ é uma aplicação sobrejetora e $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial r-dimensional (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), munido de uma estrutura fv. As cartas fv do correspondente atlas fv maximal são chamadas cartas fv **admissíveis** de E sobre M e cada atlas fv de E sobre M contido no correspondente atlas fv maximal é chamado um atlas fv **admissível** de E sobre M. Quando $r = 1$, dizemos que E é um **fibrado em linhas**.

Para fibrados vetoriais, usa-se a seguinte nomenclatura:

- E é o seu **espaço total.**
- M é o seu **espaço base.**
- π é a sua **projeção.**
- $\mathbb{E}$ é a sua **fibra típica** ou o seu **espaço modelo.**

A seguir, especificaremos um fibrado vetorial $(E, M, \pi, \mathbb{E})$ dizendo que E é um fibrado vetorial sobre M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$. Para todo ponto m de M, $E_m = \pi^{-1}(\{m\})$ é a **fibra de E sobre m**.

Para qualquer fibrado vetorial de posto r, o espaço base M e o espaço total E são variedades, a projeção π é uma submersão sobrejetora e toda fibra E_m possui naturalmente a estrutura de um espaço vetorial r-dimensional, isomorfo a $\mathbb{E}$. Para provar estas afirmações, observe que um atlas fv de cartas fv $(U_\alpha, \Phi_\alpha, x_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ de E sobre M induz um atlas comum de cartas comuns $(U_\alpha, x_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ de M assim como um atlas comum de cartas comuns $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha, \tilde{U}_\alpha \times \mathbb{E})$ de E. Ademais, para todo ponto m de M, a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{E}$ pode ser transferida a E_m declarando que

$$\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_\alpha\big|_{E_m} : E_m \longrightarrow \mathbb{E}$$

seja um isomorfismo linear, onde $(U_\alpha, \Phi_\alpha, x_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ é uma carta fv de E sobre M tal que $m \in U_\alpha$, sendo que esta estrutura não depende da escolha da carta fv utilizada.

Além disso, fibrados vetoriais são “localmente triviais”. Para esclarecer o significado técnico desta afirmação, precisamos introduzir as seguintes noções.

Primeiro, observamos que dado qualquer subconjunto aberto N de uma variedade M, um fibrado vetorial E sobre M com projeção π induz, de forma natural, um fibrado vetorial $E|_N$ sobre N com projeção π_N chamado a **restrição** de E a N, definido por $E|_N = \pi^{-1}(N)$ e $\pi_N = \pi|_{E|_N}$. (As cartas fv admissíveis $(U_N, \Phi_N, x_N, \tilde{U}_N)$ de $E|_N$ são obtidas das cartas fv admissíveis $(U_M, \Phi_M, x_M, \tilde{U}_M)$ de E com $U_M \cap N \neq \emptyset$ por restrição: $U_N = U_M \cap N$, $\Phi_N = \Phi_M|_{\pi^{-1}(U_N)}$, $x_N = x_M|_{U_N}$.) Essa restrição é um caso especial da construção do “pull-back” de um fibrado vetorial a ser apresentada logo adiante.

Segundo, notamos que o exemplo mais simples de um fibrado vetorial sobre uma variedade M é o **fibrado vetorial trivial padrão** definido por

$$E = M \times \mathbb{E} \qquad \text{e} \qquad \pi = \mathrm{pr}_1 \,. \tag{1.25}$$

Terceiro, precisamos esclarecer o significado do conceito de isomorfismo entre fibrados vetoriais, pois para um fibrado vetorial ser chamado de trivial, basta que ele seja apenas isomorfo ao fibrado vetorial padrão. Mais geralmente, é importante especificar quais são as aplicações compatíveis com a estrutura de fibrado vetorial e, como passo inicial, com a estrutura de fibrado em geral:

1.10 Definição Sejam E e F fibrados vetoriais sobre variedades M e N com projeções $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to N$, respectivamente. Um **morfismo** ou **homomorfismo de fibrados** de E em F é um par $(f, \check{f})$ de aplicações diferenciáveis $f : E \to F$ e $\check{f} : M \to N$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \tag{1.26}$$

Um **morfismo** ou **homomorfismo de fibrados vetoriais**, ou simplesmente **morfismo fv** ou **homomorfismo fv**, de E em F é um par $(f, \check{f})$ de aplicações diferenciáveis $f : E \to F$ e $\check{f} : M \to N$ tais que o diagrama (1.26) comuta e tais que para quaisquer duas cartas fv admissíveis $(U, \Phi, x, \tilde{U})$ de E e $(V, \Psi, y, \tilde{V})$ de F com $\check{f}(U) \subset V$ (caso contrário, substituímos o aberto U pelo aberto $U \cap \check{f}^{-1}(V)$, desde que este não seja vazio), a aplicação

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : \tilde{U} \times \mathbb{E} \longrightarrow \tilde{V} \times \mathbb{F} \tag{1.27}$$

pode ser escrita na forma

$$(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})(z,e) \;=\; ((y \circ \check{f} \circ x^{-1})(z),\, \tau_{\Psi,\Phi}(f)(z) \cdot e) \qquad \text{para } z \in \tilde{U},\, e \in \mathbb{E} \tag{1.28}$$

com uma aplicação diferenciável

$$\tau_{\Psi,\Phi}(f) : \tilde{U} \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) \tag{1.29}$$

onde $\mathrm{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ denota o espaço das aplicações lineares de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{F}$. Em ambos os casos, também dizemos que f é um morfismo ou homomorfismo de fibrados **sobre** $\check{f}$ ou que f **recobre** $\check{f}$. Se $M = N$ e $\check{f}$ é a identidade, dizemos que f é um morfismo ou homomorfismo **estrito.**

Mais uma vez, é suficiente verificar esta propriedade somente para as cartas fv de algum atlas fv admissível de E e algum atlas fv admissível de F; ela vale então para todas as cartas fv admissíveis. Note também que a composta $g \circ f : E \to G$ de homomorfismos de fibrados vetoriais $f : E \to F$ e $g : F \to G$ é novamente um homomorfismo de fibrados vetoriais.

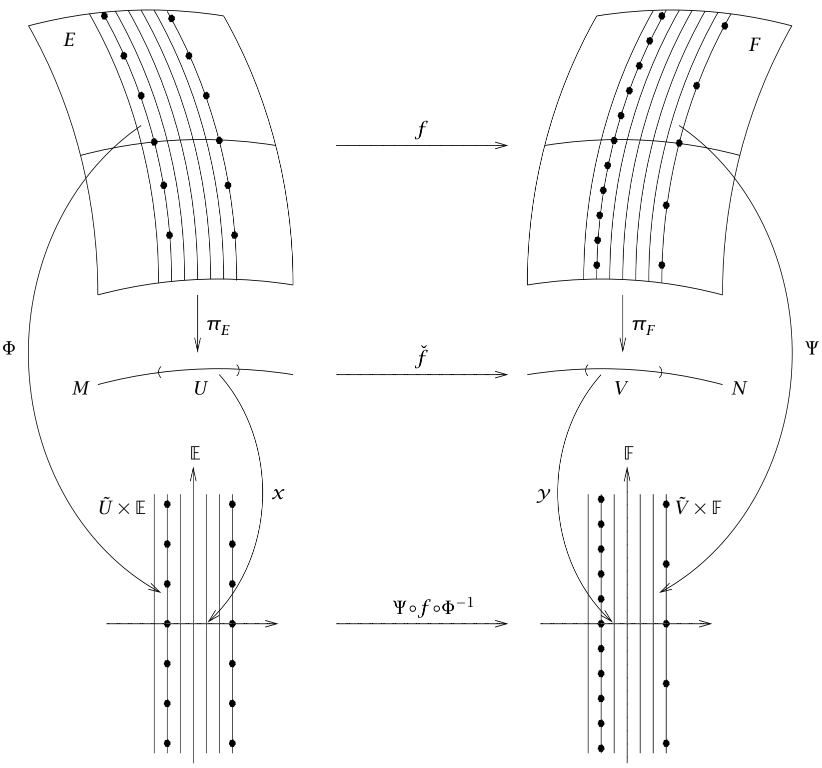


Figura 1.7: Representação local de um homomorfismo de fibrados vetoriais

A primeira parte da definição acima simplesmente afirma que um homomorfismo de fibrados é uma aplicação diferenciável f entre os espaços totais que **preserva fibras**, i.e., tal que para $e_1, e_2 \in E$, vale

$$\pi_E(e_1) \;=\; \pi_E(e_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_F(f(e_1)) \;=\; \pi_F(f(e_2))\,. \tag{1.30}$$

De fato, neste caso, a aplicação $\check{f} : M \to N$ pode ser construída a partir da aplicação $f : E \to F$ pondo

$$\check{f}(\pi_E(e)) \;=\; \pi_F(f(e)) \qquad \text{para } e \in E\,. \tag{1.31}$$

A segunda parte da definição significa então que, para definir um homomorfismo de fibrados vetoriais, a aplicação f deve ser **linear ao longo das fibras.**

Dessa noção de morfismo ou homomorfismo, decorre da forma usual a de **isomorfismo** entre fibrados vetoriais (estrito ou não) e de **automorfismo** de um fibrado vetorial,No caso não estrito, podemos concluir pelo menos que um isomorfismo $f : E \to F$ de fibrados vetoriais induz um difeomorfismo $\check{f} : M \to N$ das respectivas variedades base.

Isso posto, podemos formular o conceito de trivialidade de fibrados vetoriais. Um fibrado vetorial E sobre M é chamado **trivial** se existe um isomorfismo fv estrito $f : E \to M \times \mathbb{E}$ e, para qualquer subconjunto aberto N de M, é chamado **trivial sobre** N se existe um isomorfismo fv estrito $f_N : E|_N \to N \times \mathbb{E}$, sendo que qualquer tal isomorfismo fv estrito é chamado uma **trivialização** de E no primeiro caso e uma **trivialização** de E **sobre** N ou, quando não queremos especificar N explicitamente, uma **trivialização local** de E no segundo caso.

Assim, cartas fv se revelam como sendo o resultado de uma combinação de cartas comuns do espaço base com trivializações locais: uma carta fv $(U, \Phi, x, \tilde{U})$ de E sobre M, como já vimos, induz uma carta comum $(U, x, \tilde{U})$ de M em conjunto com uma trivialização

$$(x^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \circ \Phi : \; E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{E}$$

de E sobre U, de acordo com o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E|_U \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[d, "\pi_U"'] & U \times \mathbb{E} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \tilde{U} \times \mathbb{E} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
U \arrow[r, "\mathrm{id}"] & U \arrow[r, "x"] & \tilde{U}
\end{tikzcd}$$

Podemos resumir esta discussão na afirmação de que poderíamos ter adotado uma definição do conceito de fibrado vetorial diferente, porém equivalente à anterior:

1.11 Definição Um **fibrado vetorial** é uma quádrupla $(E, M, \pi, \mathbb{E})$ composta de

(i) uma variedade E chamada o **espaço total**,

(ii) uma variedade M chamada o **espaço base**,

(iii) uma aplicação diferenciável sobrejetora $\pi : E \to M$ chamada a **projeção**,

(iv) um espaço vetorial $\mathbb{E}$ chamado a **fibra típica** ou o **espaço modelo**,

e satisfazendo o postulado de **trivialidade local**: existem um recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M e uma família $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de difeomorfismos

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{E} \, , \tag{1.32}$$

com $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$ para todo $\alpha \in A$, chamados de **trivializações locais**, tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{E} \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{E} \tag{1.33}$$

é um difeomorfismo, linear no segundo argumento, que pode ser representado por uma função diferenciável

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \,, \tag{1.34}$$

chamada a correspondente **função de transição**, conforme a fórmula

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m,e) \;=\; (m, \tau_{\alpha\beta}(m) \cdot e) \qquad \text{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta \,,\, e \in \mathbb{E} \,. \tag{1.35}$$

A seguir, especificaremos um fibrado vetorial $(E, M, \pi, \mathbb{E})$ dizendo que E é um fibrado vetorial sobre M com projeção π e fibra típica $\mathbb{E}$. Para todo ponto m de M, $E_m = \pi^{-1}(\{m\})$ é a **fibra de** E **sobre** m. Finalmente, uma família $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ com as propriedades enunciadas acima também é chamada um **atlas de trivializações locais** de E, e adotamos a terminologia usual de atlas equivalentes, de atlas maximais e de **trivializações locais admissíveis**, como nas Definições 1.8 e 1.9.

Note que podemos sempre escrever o espaço total de um fibrado vetorial como a união disjunta das suas fibras, o que deixa óbvio qual é a definição da projeção π:

$$E \;=\; \bigcup_{m \in M} E_m \qquad , \qquad \pi(u) = m \;\text{ para }\; u \in E_m \,.$$

Esta decomposição pode ser vista como uma folheação regular de E por espaços vetoriais E_m mergulhados em E como subvariedades e todos isomorfos ao espaço modelo $\mathbb{E}$, sendo que para todo ponto m de M, podemos escolher uma trivialização admissível $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{E}$ de E sobre uma vizinhança aberta U de m em M cuja restrição à fibra E_m proporciona um isomorfismo linear

$$\Phi\big|_{E_m} : E_m \;\longrightarrow\; \mathbb{E} \,.$$

Como acabamos de concluir, qualquer fibrado vetorial é localmente trivial, mas vale enfatizar que, em geral, não é globalmente trivial, como pode ser ilustrado considerando-se o seguinte exemplo.

1.4 Exemplo (cilindro e faixa de Möbius) Tanto o cilindro como a faixa de Möbius são fibrados em linhas (reais) sobre o círculo S^1 cujos espaços totais podem ser formalmente construídos da seguinte maneira: Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, considere a relação de equivalência definida por

$$(s,t) \sim (s',t') \qquad \text{se e somente se} \qquad s' = s + k \quad \text{e} \quad t' = (\pm 1)^k t \quad \text{para algum } \; k \in \mathbb{Z} \,,$$

onde o sinal superior se refere ao cilindro e o sinal inferior à faixa de Möbius. Sejam E o espaço quociente $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\sim$ e

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ & (s,t) & \longmapsto & p(s,t) = [s,t] \end{array}$$

a projeção quociente. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \pi: & E & \longrightarrow & S^1 \\ & [s,t] & \longmapsto & \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} s} \end{array}$$

Pomos $U_1 = S^1 \setminus \{1\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{-1\}$, $\tilde{U}_1 = \,]0,1[$, $\tilde{U}_2 = \,]-1/2, 1/2[$ e observamos que, para $j = 1,2$, a restrição de p a $\tilde{U}_j \times \mathbb{R}$ é uma bijeção sobre $\pi^{-1}(U_j)$ cujo inverso denotaremos por Φ_j:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_j: & \pi^{-1}(U_j) & \longrightarrow & \tilde{U}_j \times \mathbb{R} \\ & [s,t] & \longmapsto & (s,t) \end{array}$$

Também definimos

$$\begin{array}{rccc} x_j : & U_j & \longrightarrow & \tilde{U}_j \\ & e^{2\pi i s} & \longmapsto & s \end{array}$$

e concluímos que $(U_j, \Phi_j, x_j, \tilde{U}_j)$ é uma carta fv de E sobre S^1. Para calcular a função de transição entre as duas, note que

$$x_1(U_1 \cap U_2) \;=\;]0, 1/2[\, \cup \,]1/2, 1[\quad , \quad x_2(U_1 \cap U_2) \;=\;]-1/2, 0[\, \cup \,]0, 1/2[\; .$$

Então

$$(x_2 \circ x_1^{-1})(s) \;=\; \begin{cases} s & \text{para} \quad 0 < s < 1/2 \\ s - 1 & \text{para} \quad 1/2 < s < 1 \end{cases}$$

$$(x_1 \circ x_2^{-1})(s) \;=\; \begin{cases} s & \text{para} \quad 0 < s < 1/2 \\ s + 1 & \text{para} \quad -1/2 < s < 0 \end{cases}$$

e

$$(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})(s, t) \;=\; \begin{cases} (s, t) & \text{para} \quad 0 < s < 1/2 \\ (s - 1, \pm t) & \text{para} \quad 1/2 < s < 1 \end{cases}$$

$$(\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1})(s, t) \;=\; \begin{cases} (s, t) & \text{para} \quad 0 < s < 1/2 \\ (s + 1, \pm t) & \text{para} \quad -1/2 < s < 0 \end{cases}$$

o que significa que a função de transição correspondente vale 1 sobre o semi-círculo superior (onde $0 < s < 1/2$) e ± 1 sobre o semicírculo inferior (onde $1/2 < s < 1$ ou $-1/2 < s < 0$). Assim, segue que $\{(U_j, \Phi_j, x_j, \mathbb{R}) \mid j = 1, 2\}$ é um atlas fv de E. Para o sinal superior, é fácil ver que o espaço total E pode ser identificado com o produto direto $S^1 \times \mathbb{R}$ que representa um cilindro: este fibrado é trivial. Para o sinal inferior, no entanto, o espaço total representa a faixa de Möbius onde a reta inverte sua orientação quando damos uma volta ao longo do círculo: este fibrado é não-trivial. É interessante notar que, a menos de isomorfismos, estes dois são de fato os únicos dois fibrados em linhas reais sobre o círculo: é possível mostrar que qualquer fibrado em linhas real sobre o círculo ou é trivial ou é isomorfo à faixa de Möbius.

A mesma análise pode ser aplicada para construir fibrados em linhas complexos sobre o círculo: basta substituir $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ e o fator ± 1 por $e^{2\pi i/p}$, com $p \in \mathbb{Z}$, isto é, por qualquer raíz primitiva da unidade. Assim, obtém-se uma família de fibrados em linhas complexos sobre o círculo parametrizada pelos inteiros, e é possível mostrar que qualquer fibrado em linhas complexo sobre o círculo é isomorfo a exatamente um deles. $\Diamond$

Também temos um análogo para fibrados vetoriais da definição de subvariedade de uma variedade.

Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi_E : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$. Um subconjunto F de E é chamado um **subfibrado vetorial** de E se existem um subespaço vetorial $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ e, para todo ponto m de M, uma carta fv admissível $(U, \Phi_E, x, \tilde{U})$ de E em torno de m (i.e., com $m \in U$) tal que

$$\Phi_E(\pi_E^{-1}(U) \cap F) \;=\; \tilde{U} \times \mathbf{F} \; , \tag{1.36}$$

ou equivalentemente, uma trivialização local admissível $\Phi_E : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{E}$ de E em torno de m (i.e., com $m \in U$) tal que

$$\Phi_E(\pi_E^{-1}(U) \cap F) \;=\; U \times \mathbf{F} \; . \tag{1.37}$$

Qualquer carta fv admissível de E com a propriedade (1.36) e qualquer trivialização local admissível de E com a propriedade (1.37) é chamada de **adaptada** a este subfibrado vetorial.

Para justificar essa terminologia, precisamos como no caso de subvariedades mostrar que um subfibrado vetorial é realmente um fibrado vetorial no sentido da Definição 1.9 ou 1.11, em relação à projeção $\pi_F : F \to M$ definida como a restrição da projeção $\pi_E : E \to M$ a F, de modo que para todo ponto m de M, temos $F_m = F \cap E_m$. Para tanto, observamos que dada uma carta fv admissível $(U, \Phi_E, x, \tilde{U})$ de E adaptada a F, obtemos uma carta fv $(U, \Phi_F, x, \tilde{U})$ de F, chamada a **carta fv induzida**, definindo Φ_F como sendo a restrição de Φ_E a $\pi_F^{-1}(U) = F \cap \pi_E^{-1}(U)$, e de maneira semelhante, que dada uma trivialização local admissível $\Phi_E : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{E}$ de E adaptada a F, obtemos uma trivialização local $\Phi_F : \pi_F^{-1}(U) \to U \times \mathbb{F}$ de F, chamada a **trivialização local induzida**, definindo Φ_F como sendo a restrição de Φ_E a $\pi_F^{-1}(U) = F \cap \pi_E^{-1}(U)$. É fácil ver que a compatibilidade entre cartas fv e entre trivializações locais é preservada sob tais restrições, de modo que todo atlas fv admissível de cartas fv de E adaptadas a F induz um atlas fv de F, chamado o **atlas fv induzido**, e passando a classes de equivalência de atlas fv, ou atlas fv maximais, obtemos a **estrutura de fibrado vetorial** de F **induzida** pela estrutura de fibrado vetorial dada de E, que torna F um fibrado vetorial sobre M com projeção π_F e fibra típica $\mathbb{F}$ tal que a inclusão de F em E é um homomorfismo estrito de fibrados vetoriais sobre M que, em todo ponto m de M, define a inclusão da fibra F_m como subespaço da fibra E_m.

Finalmente, introduzimos um conceito de importância fundamental.

1.12 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$. Uma **seção** de E é uma aplicação $\varphi : M \to E$ que satisfaz $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$, ou seja,

$$\varphi(m) \in E_m \qquad \text{para } m \in M\,. \tag{1.38}$$

Mais geralmente, uma **seção** de E **sobre** um aberto N de M é uma seção de $E|_N$. Quando não queremos especificar N explicitamente, falamos de uma **seção local** de E ou, se N for vizinhança de um determinado ponto m_0 de M, de uma **seção local** de E **em torno de** m_0.

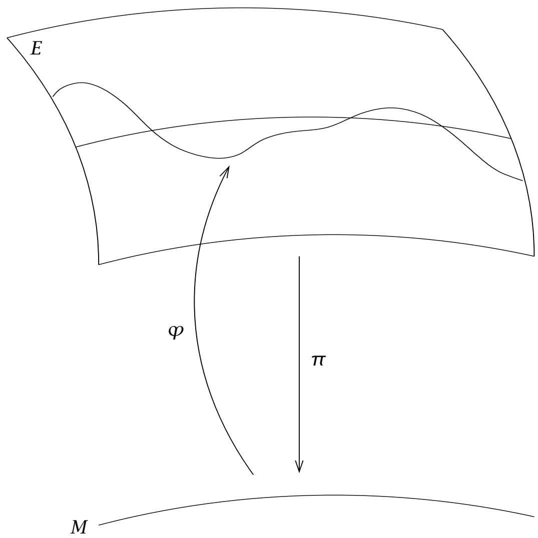


Figura 1.8: Seções de fibrados vetoriais

Note que não impomos nenhuma condição específica "a priori" sobre como $\varphi(m)$ deve depender de m. A condição mais natural é exigir que φ seja diferenciável, mas nada impede considerar outras opções, sendo que seções contínuas, seções quadraticamente integráveis e até seções distribucionais se tornam importantes em muitas aplicações. Em geral, tais seções formam espaços vetoriais sob a adição e a multiplicação por escalares e, mais do que isso, módulos sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$ das funções diferenciáveis sobre M, sendo que todas essas operações são definidas pontualmente, conforme

$$\begin{aligned} (\varphi + \varphi')(m) &= \varphi(m) + \varphi'(m) && \text{para } m \in M \,, \\ (\lambda\,\varphi)(m) &= \lambda\,\varphi(m) && \text{para } m \in M \,, \\ (f\,\varphi)(m) &= f(m)\,\varphi(m) && \text{para } m \in M \,. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Aqui, consideraremos apenas seções de classe C^∞, e denotaremos o espaço vetorial de todas as seções de classe C^∞ de um fibrado vetorial E sobre M por $\Gamma(E)$ ou, quando queremos enfatizar o grau de diferenciabilidade, por $\Gamma^\infty(E)$. Se N é um aberto de M, escrevemos $\Gamma(N,E)$ em vez de $\Gamma(E|_N)$ ou $\Gamma^\infty(N,E)$ em vez de $\Gamma^\infty(E|_N)$.

Quando E é o fibrado vetorial trivial padrão $M \times \mathbb{E}$, podemos escrever $\varphi(m) = (m, f(m))$ e assim estabelecer um isomorfismo linear $\Gamma(M \times \mathbb{E}) \cong C^\infty(M,\mathbb{E})$. Portanto, seções de fibrados vetoriais generalizam funções a valores vetoriais.

Mais geralmente, para um fibrado vetorial E sobre M de posto r cuja restrição a um aberto N de M é trivial, é conveniente introduzir o conceito de uma **base de seções** de E sobre N: é um conjunto $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções de E sobre N tal que para todo ponto m de N, o conjunto $\{e_1(m), \ldots, e_r(m)\}$ é uma base da fibra E_m. Neste caso, qualquer seção φ de E sobre N admite uma única expansão

$$\varphi = \varphi^\alpha\, e_\alpha \tag{1.40}$$

com funções coeficiente $\varphi^\alpha \in \mathfrak{F}(N)$. Obviamente, a escolha de uma tal base de seções de E sobre N equivale à escolha de uma trivialização de E sobre N em conjunto com uma base da fibra típica $\mathbb{E}$. Quando não queremos especificar N explicitamente, falamos de uma **base de seções locais** de E.

Como aplicação deste conceito, podemos formular uma condição equivalente à definição de subfibrado vetorial em termos de bases de seções locais. Um subconjunto F de um fibrado vetorial E sobre uma variedade M é um subfibrado vetorial de E se para todo ponto m de M o conjunto $F_m = F \cap E_m$ é um subespaço do espaço vetorial E_m e se para todo ponto m de M existem uma vizinhança aberta U_m de m em M e uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções de E sobre U_m tal que para todo ponto m' de U_m, o conjunto $\{e_1(m'), \ldots, e_s(m')\}$ é uma base de F_m (assim, E terá posto r e F terá posto s).

1.2.2 Fibrado Tangente

O exemplo mais importante de um fibrado vetorial sobre uma variedade M é o **fibrado tangente** TM de M. Como conjunto, o espaço total TM é simplesmente a união disjunta de todos os espaços tangentes:

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M \,. \tag{1.41}$$

A projeção óbvia será denotada por τ_M:

$$\tau_M : TM \to M \,. \tag{1.42}$$

Para estabelecer a estrutura de fibrado vetorial, observe que toda carta comum $(U, x, \tilde{U})$ de M induz uma carta fv $(U, Tx, x, \tilde{U})$ de TM se definirmos, para todo ponto m de U, a restrição de Tx a T_mM como sendo o isomorfismo linear $T_m x$ introduzido na equação (1.8). Explicitamente, $Tx : \tau_M^{-1}(U) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ é definido exigindo que para toda curva γ passando por algum ponto m de U,

$$Tx\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma(t)\Big|_{t=0} \right) \;=\; \left(x(\gamma(0))\,,\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(\gamma(t))\Big|_{t=0} \right) . \tag{1.43}$$

Ademais, considerando outra carta comum $(U', x', \tilde{U}')$ de M que induz a carta fv $(U', Tx', x', \tilde{U}')$ de TM, temos

$$(Tx' \circ (Tx)^{-1})(z, v) \;=\; ((x' \circ x^{-1})(z), \mathrm{D}_z(x' \circ x^{-1}) \cdot v) \qquad \text{para } z \in x(U \cap U'),\, v \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1.44}$$

ou seja, as funções de transição entre estas cartas fv de TM resultam das funções de transição entre as cartas comuns de M tomando a derivada, ou matriz jacobiana.

Finalmente, se $\phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades, definimos a **aplicação tangente** a ϕ ou simplesmente **derivada** de ϕ como o homomorfismo de fibrados vetoriais $T\phi : TM \to TN$ sobre $\phi : M \to N$ definido pela mesma fórmula que antes, em termos de curvas:

$$T\phi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma(t)\Big|_{t=0} \right) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\phi(\gamma(t))\Big|_{t=0} . \tag{1.45}$$

A **regra da cadeia** fica ainda mais simples: dadas aplicações diferenciáveis $\phi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ entre variedades, a derivada da composta é igual à composta das derivadas:

$$T(\psi \circ \phi) \;=\; T\psi \,\circ\, T\phi\,. \tag{1.46}$$

Esta propriedade, em conjunto com o fato de que a aplicação tangente à identidade de M é a identidade de TM, significa que T é um funtor covariante da categoria das variedades para a categoria dos fibrados vetoriais, o **funtor tangente**, justificando assim a notação empregada.

As seções do fibrado tangente TM de uma variedade M são chamadas de **campos vetoriais** sobre M e o conjunto dos campos vetoriais sobre M (de classe C^∞) será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Cada carta fv $(U, Tx, x, \tilde{U})$ de TM induzida por uma carta comum $(U, x, \tilde{U})$ de M determina uma base $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ de campos vetoriais ∂_μ sobre U chamada a **base coordenada** correspondente; também se usa a notação

$$\partial_\mu \;=\; \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,.$$

Mais geralmente, qualquer carta fv $(U, \Phi, x, \tilde{U})$ de TM também determina uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de campos vetoriais sobre U, chamada de **referencial** para M sobre U ou, quando não queremos especificar U explicitamente, de **referencial local** para M. Os referenciais locais induzidos por coordenadas locais são especiais, pois vale a seguinte

1.2 Proposição *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial local para uma variedade M. Então para todo ponto m de M, existe um sistema de coordenadas locais x^μ em torno de m tal que $e_\mu = \partial_\mu$ $(1 \leqslant \mu \leqslant n)$ se e somente se os e_μ $(1 \leqslant \mu \leqslant n)$ comutam sob o colchete de Lie, i.e., $[e_\mu, e_\nu] = 0$ $(1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n)$. Se esta condição for satisfeita, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é chamado um* ***referencial local holônomo****.*

Demonstração: Inicialmente, recordemos a fórmula para o colchete de Lie $[X, Y]$ de dois campos vetoriais X, Y em termos de um sistema de coordenadas locais x^μ qualquer: escrevendo $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu$ e $[X, Y] = [X, Y]^\mu \partial_\mu$, temos

$$[X, Y]^\mu \;=\; X^\nu\,\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu} \,-\, Y^\nu\,\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\,.$$

A implicação "$\Longrightarrow$" segue então do fato de que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ $(1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n)$. A implicação "$\Longleftarrow$" é uma aplicação do teorema de Frobenius. Mais especificamente, fixemos um ponto m qualquer no domínio do referencial, escolhamos um sistema qualquer de coordenadas locais y^α em torno de m e expandimos os campos vetoriais da correspondente base coordenada em termos dos campos vetoriais e_μ,

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \;=\; e^\mu_\alpha \, e_\mu \;,$$

com uma matriz $(n \times n)$ de funções diferenciáveis e^μ_α definidas sobre uma vizinhança aberta adequada de m. Então, para que exista um sistema de coordenadas locais x^μ tal que $e_\mu = \partial_\mu$ $(1 \leqslant \mu \leqslant n)$, as funções x^μ devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \;=\; e^\mu_\alpha \,. \tag{1.47}$$

Obviamente, as relações de integrabilidade

$$\frac{\partial e^\mu_\alpha}{\partial y^\beta} \;=\; \frac{\partial e^\mu_\beta}{\partial y^\alpha} \,. \tag{1.48}$$

são condições necessárias para a existência de uma solução, sendo que a afirmação central do teorema de Frobenius é que são também suficientes [DIE]. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \left[\frac{\partial}{\partial y^\alpha} , \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right] \;=\; [e^\mu_\alpha \, e_\mu \,, e^\nu_\beta \, e_\nu] \;&=\; e^\mu_\alpha e^\nu_\beta \, [e_\mu, e_\nu] \,+\, e^\mu_\alpha \, (e_\mu \cdot e^\nu_\beta) \, e_\nu \,-\, e^\nu_\beta \, (e_\nu \cdot e^\mu_\alpha) \, e_\mu \\ &=\; e^\mu_\alpha e^\nu_\beta \, [e_\mu, e_\nu] \,+\, \left(\frac{\partial e^\mu_\beta}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial e^\mu_\alpha}{\partial y^\beta} \right) e_\mu \;, \end{aligned}$$

e portanto as relações $[e_\mu, e_\nu] = 0$ $(1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n)$ constituem uma reformulação das condições de integrabilidade do teorema de Frobenius. □

1.2.3 Construções Funtoriais

A partir de um fibrado vetorial ou de vários fibrados vetoriais, todos sobre a mesma variedade base M, podemos construir novos fibrados vetoriais sobre M aplicando certas operações de álgebra linear ou multilinear às fibras. Formalmente, estas operações têm o caracter de funtores diferenciáveis.

Tecnicamente, um **funtor diferenciável** covariante na categoria dos espaços vetoriais com isomorfismos é uma prescrição F que

(a) a cada espaço vetorial $\mathbb{E}$ associa um novo espaço vetorial $\mathsf{F}(\mathbb{E})$, e

(b) a cada isomorfismo $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ de espaços vetoriais associa um novo isomorfismo $\mathsf{F}(f) : \mathsf{F}(\mathbb{E}) \to \mathsf{F}(\mathbb{F})$ de espaços vetoriais tal que

$$\mathsf{F}(g \circ f) \;=\; \mathsf{F}(g) \circ \mathsf{F}(f) \qquad \text{e} \qquad \mathsf{F}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \;=\; \mathrm{id}_{\mathsf{F}(\mathbb{E})} \;, \tag{1.49}$$

com a seguinte propriedade adicional: se U é um aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é uma aplicação $f : U \to \mathrm{Iso}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ diferenciável, então a aplicação $\tilde{\mathsf{F}}(f) : U \to \mathrm{Iso}(\mathsf{F}(\mathbb{E}), \mathsf{F}(\mathbb{F}))$ definida por $\tilde{\mathsf{F}}(f)(u) = \mathsf{F}(f(u))$ para $u \in U$ também é diferenciável.

A seguir, mostraremos que tais funtores podem ser levantados, ou estendidos, de espaços vetoriais para fibrados vetoriais sobre uma variedade base M fixa.

1.3 Teorema (levantamento de funtores) *Seja M uma variedade. Qualquer funtor diferenciável covariante na categoria dos espaços vetoriais com isomorfismos, denotado por F, digamos, induz um funtor correspondente na categoria dos fibrados vetoriais sobre M com isomorfismos estritos, que também denotaremos por F, tal que para todo fibrado vetorial E sobre M, todo isomorfismo estrito $f : E \to F$ de fibrados vetoriais sobre M e todo ponto m de M, vale*

$$\mathsf{F}(E)_m = \mathsf{F}(E_m) \quad , \quad \mathsf{F}(f)\big|_{\mathsf{F}(E)_m} = \mathsf{F}(f\big|_{E_m}) \,. \tag{1.50}$$

Demonstração: Se E e $\mathsf{F}(E)$ são fibrados vetoriais sobre M, temos

$$E = \bigcup_{m \in M} E_m \qquad \text{e} \qquad \mathsf{F}(E) = \bigcup_{m \in M} \mathsf{F}(E)_m \,.$$

Ademais, cada trivialização admissível $\Phi : E|_U \to U \times \mathbb{E}$ de E sobre um aberto U de M induz uma trivialização $\mathsf{F}(\Phi) : \mathsf{F}(E)|_U \to U \times \mathsf{F}(\mathbb{E})$ de $\mathsf{F}(E)$ sobre U definida da maneira óbvia: se, para todo ponto m de U, $\Phi_m : E_m \to \mathbb{E}$ denota a restrição de Φ à fibra E_m de E sobre m e $\mathsf{F}(\Phi)_m : \mathsf{F}(E)_m \to \mathsf{F}(\mathbb{E})$ denota a restrição de $\mathsf{F}(\Phi)$ à fibra $\mathsf{F}(E)_m$ de $\mathsf{F}(E)$ sobre m, então a equação (1.50) exige que

$$\mathsf{F}(E)_m = \mathsf{F}(E_m) \qquad \text{e} \qquad \mathsf{F}(\Phi)_m = \mathsf{F}(\Phi_m) \,.$$

Logo, a função de transição $\tau^E_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ entre duas trivializações admissíveis Φ_α de E sobre U_α e Φ_β de E sobre U_β determina a função de transição $\tau^{\mathsf{F}(E)}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathsf{F}(\mathbb{E}))$ entre as trivializações induzidas $\mathsf{F}(\Phi_\alpha)$ de $\mathsf{F}(E)$ sobre U_α e $\mathsf{F}(\Phi_\beta)$ de $\mathsf{F}(E)$ sobre U_β conforme

$$\tau^{\mathsf{F}(E)}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathsf{F}}(\tau^E_{\alpha\beta}) \,,$$

uma vez que, para todo ponto m de $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\tau^{\mathsf{F}(E)}_{\alpha\beta}(m) = \mathsf{F}(\Phi_\alpha)_m \circ \mathsf{F}(\Phi_\beta)^{-1}_m = \mathsf{F}((\Phi_\alpha)_m) \circ \mathsf{F}((\Phi_\beta)_m)^{-1} = \mathsf{F}\big((\Phi_\alpha)_m \circ (\Phi_\beta)^{-1}_m\big) = \mathsf{F}(\tau^E_{\alpha\beta}(m)) \,.$$

Portanto, como $\tau^E_{\alpha\beta}$ é diferenciável, $\tau^{\mathsf{F}(E)}_{\alpha\beta}$ também é. □

1.5 Exemplos Os exemplos mais importantes de funtores diferenciáveis covariantes na categoria dos espaços vetoriais com isomorfismos são os seguintes.

1. **Dual inverso:** O dual inverso pode ser visto como um funtor que associa a cada espaço vetorial $\mathbb{E}$ seu espaço dual $\mathbb{E}^*$ e a cada aplicação linear inversível $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ sua transposta inversa $f^{*-1} : \mathbb{E}^* \to \mathbb{F}^*$. Este funtor é diferenciável, pois a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\mathbb{E}^*, \mathbb{F}^*) \\ f & \longmapsto & f^{*-1} \end{array}$$

constitui um conjunto de funções racionais e portanto é diferenciável (de classe C^∞).

2. **Potências tensoriais, simétricas e exteriores:** Para $p \geqslant 2$ fixo, a p-ésima potência tensorial, a p-ésima potência simétrica e a p-ésima potência exterior podem ser vistas como funtores que associam, respectivamente, a cada espaço vetorial $\mathbb{E}$ sua p-ésima potência tensorial $\bigotimes^p \mathbb{E}$, sua p-ésima potência simétrica $\bigvee^p \mathbb{E}$ e sua p-ésima potência exterior $\bigwedge^p \mathbb{E}$ e a cada aplicação linear inversível $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ sua p-ésima potência tensorial $\bigotimes^p f : \bigotimes^p \mathbb{E} \to \bigotimes^p \mathbb{F}$, sua p-ésima potência simétrica $\bigvee^p f : \bigvee^p \mathbb{E} \to \bigvee^p \mathbb{F}$ e sua p-ésima potência exterior $\bigwedge^p f : \bigwedge^p \mathbb{E} \to \bigwedge^p \mathbb{F}$. Todos estes funtores são diferenciáveis, pois cada uma das aplicações
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\bigotimes^p \mathbb{E}, \bigotimes^p \mathbb{F}) \\ f & \longmapsto & \bigotimes^p f \end{array},$$
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\bigvee^p \mathbb{E}, \bigvee^p \mathbb{F}) \\ f & \longmapsto & \bigvee^p f \end{array}$$
e
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\bigwedge^p \mathbb{E}, \bigwedge^p \mathbb{F}) \\ f & \longmapsto & \bigwedge^p f \end{array}$$
constitui um conjunto de polinômios (de grau p) e portanto é diferenciável (de classe C^∞). ◊

O procedimento de levantamento de funtores estabelecido pelo teorema acima pode ser aplicado a outros tipos de funtores diferenciáveis. Por exemplo, um funtor diferenciável na categoria completa dos espaços vetoriais (cujos morfismos são todos os homomorfismos, ou seja, todas as aplicações lineares, e não apenas os isomorfismos, ou seja, as aplicações lineares inversíveis), induz, para cada variedade M, um funtor correspondente na categoria dos fibrados vetoriais sobre M com homomorfismos estritos e não apenas com isomorfismos estritos. Notamos que os funtores das potências tensoriais, simétricas e exteriores consideradas acima são deste tipo. Numa outra direção, podemos considerar funtores diferenciáveis contravariantes, tanto na categoria dos espaços vetoriais com isomorfismos como na categoria completa dos espaços vetoriais, que diferem dos funtores covariantes no sentido de "inverter as flechas" e "trocar a ordem na composição": associam a cada espaço vetorial $\mathbb{E}$ um novo espaço vetorial $\mathsf{F}(\mathbb{E})$ e a cada isomorfismo ou homomorfismo $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ de espaços vetoriais um novo isomorfismo ou homomorfismo $\mathsf{F}(f) : \mathsf{F}(\mathbb{F}) \to \mathsf{F}(E)$ de espaços vetoriais de modo que $\mathsf{F}(g \circ f) = \mathsf{F}(f) \circ \mathsf{F}(g)$. Finalmente, podemos também considerar funtores com dois ou mais argumentos. Para todos eles, vale um análogo do teorema de levantamento formulado acima.

1.6 Exemplos Os exemplos mais importantes de funtores diferenciáveis contravariantes ou com mais de um argumento na categoria dos espaços vetoriais são os seguintes.

1. **Dual:** O dual pode ser visto como um funtor que associa a cada espaço vetorial $\mathbb{E}$ seu espaço dual $\mathbb{E}^*$ e a cada aplicação linear $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ sua transposta ou dual $f^* : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*$.
2. **Soma direta:** A soma direta pode ser vista como um funtor que associa a cada par $(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ de espaços vetoriais sua soma direta $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$ e a cada par (f_1, f_2) de aplicações lineares $f_1 : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{F}_1$ e $f_2 : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}_2$ sua soma direta $f_1 \oplus f_2 : \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$.
3. **Produto tensorial:** O produto tensorial pode ser visto como um funtor que associa a cada par $(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ de espaços vetoriais seu produto tensorial $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ e a cada par (f_1, f_2) de aplicações lineares $f_1 : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{F}_1$ e $f_2 : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}_2$ seu produto tensorial $f_1 \otimes f_2 : \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_2$.

O primeiro é um funtor contravariante e os últimos dois são funtores covariantes com dois argumentos. É fácil verificar que todos são diferenciáveis (de classe C^∞). ◊

Considerando os funtores induzidos de dual, de soma direta e de produto tensorial para fibrados vetoriais sobre uma variedade base fixa M, o primeiro associa a cada fibrado vetorial E sobre M seu **dual** E^* e a cada homomorfismo estrito $f : E \to F$ de fibrados vetoriais sobre M seu **dual** $f^* : F^* \to E^*$, enquanto que os últimos dois associam, respectivamente, a cada par (E_1, E_2) de fibrados vetoriais sobre M sua **soma direta** ou **soma de Whitney** $E_1 \oplus E_2$ e o seu **produto tensorial** $E_1 \otimes E_2$ e a cada par (f_1, f_2) de homomorfismos estritos $f_1 : E_1 \to F_1$ e $f_2 : E_2 \to F_2$ de fibrados vetoriais sobre M sua **soma direta** $f_1 \oplus f_2 : E_1 \oplus E_2 \to F_1 \oplus F_2$ e o seu **produto tensorial** $f_1 \otimes f_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$. Outros funtores podem ser obtidos a partir destes por composição e iteração.

Os fibrados vetoriais obtidos a partir de um fibrado vetorial por uma dessas construções funtoriais serão chamados seus **descendentes.** Em particular, podemos aplicar essas construções funtoriais ao fibrado tangente TM de uma variedade M.

- O dual do fibrado tangente TM de M é o **fibrado cotangente** de M, denotado por T^*M.
- O produto tensorial da p-ésima potência tensorial de TM e a q-ésima potência tensorial de T^*M é o **fibrado dos tensores de tipo** (p, q) ou **fibrado dos tensores p vezes contravariantes e q vezes covariantes** sobre M, denotado por $T^p_q M$. Em particular,

$$T^0_0 M = M \times \mathbb{R} \quad , \quad T^1_0 M = TM \quad , \quad T^0_1 M = T^*M \; .$$

- A p-ésima potência exterior de T^*M é o **fibrado das p-formas** sobre M, denotado por $\bigwedge^p T^*M$.
- A p-ésima potência exterior de TM é o **fibrado dos p-multivetores** sobre M, denotado por $\bigwedge^p TM$.

As seções destes fibrados vetoriais recebem nomes especiais:

- Seções de TM são chamadas de **campos vetoriais** sobre M. O espaço dos campos vetoriais de classe C^∞ será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.
- Seções de T^*M são chamadas de **campos covetoriais** ou **formas diferenciais de grau** 1 ou simplesmente 1-**formas** sobre M. O espaço dos campos covetoriais ou 1-formas de classe C^∞ sobre M será denotado por $\mathfrak{X}^*(M)$ ou $\Omega^1(M)$.
- Seções de $T^p_q M$ são chamadas de **campos tensoriais** de tipo (p, q) ou p vezes contravariantes e q vezes covariantes sobre M. O espaço dos campos tensoriais de tipo (p, q) de classe C^∞ sobre M será denotado por $\mathfrak{T}^p_q(M)$.
- Seções de $\bigwedge^p T^*M$ são chamadas de **formas diferenciais de grau** p ou simplesmente p-**formas** sobre M. O espaço das p-formas de classe C^∞ sobre M será denotado por $\Omega^p(M)$.
- Seções de $\bigwedge^p TM$ são chamadas de **campos multivetoriais de grau** p ou simplesmente p-**multivetores** sobre M. O espaço dos p-multivetores de classe C^∞ sobre M será denotado por $\mathfrak{X}^p(M)$.

Finalmente, se E é um fibrado vetorial sobre M, seções do seu produto tensorial com um dos fibrados vetoriais ora mencionados são caracterizados pela expressão “a valores em E” ou “com coeficientes em E”. Em particular, seções de $\bigwedge^p T^*M \otimes E$ são chamadas de **formas diferenciais de grau** p ou simplesmente p-**formas** sobre M **a valores** em E. O espaço das p-formas de classe C^∞ sobre M a valores em E será denotado por $\Omega^p(M, E)$.

1.2.4 Expressões Locais

A seguir, apresentaremos expressões locais para seções do fibrado tangente e de seus descendentes em relação a um sistema de coordenadas locais ou, mais geralmente, em relação a um referencial local para a variedade base, assim como de um fibrado vetorial geral e de seus descendentes em relação a uma base de seções locais.

Consideremos então um sistema de coordenadas locais x^μ em M (definido em um aberto U de M que será fixado de agora em diante) e o referencial local holônomo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ para M por ele induzido. Essa base de campos vetoriais locais ∂_μ induz bases de seções locais em todos os fibrados descendentes do fibrado tangente TM:

1. uma base $\{\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ de 1-formas locais dx^μ sobre M,
2. uma base
$$\{\partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_q} \mid 1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p, \nu_1, \ldots, \nu_q \leqslant n\}$$
de campos tensoriais locais de tipo (p,q) sobre M,
3. uma base
$$\{\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} \mid 1 \leqslant \mu_1 < \ldots < \mu_p \leqslant n\}$$
de p-formas locais sobre M.

A primeira delas é a base dual à base original, definida por

$$\langle \mathrm{d}x^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu \,. \tag{1.51}$$

Mais geralmente, consideremos um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ não necessariamente holônomo para M. Da mesma forma que antes, essa base de campos vetoriais locais e_i induz bases de seções locais em todos os fibrados descendentes do fibrado tangente TM:

1. uma base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de 1-formas locais e^i sobre M,
2. uma base
$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \mid 1 \leqslant i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leqslant n\}$$
de campos tensoriais locais de tipo (p,q) sobre M,
3. uma base
$$\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n\}$$
de p-formas locais sobre M.

A primeira delas é a base dual à base original, definida por

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j \,. \tag{1.52}$$

Nestas condições, um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, um campo covetorial $\xi \in \mathfrak{X}^*(M)$, um campo tensorial $t \in \mathfrak{T}^p_q(M)$ e uma p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ sobre M admitem expansões da forma

$$X = X^\mu \partial_\mu \quad , \quad \xi = \xi_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \,, \tag{1.53}$$

ou

$$X = X^i e_i \quad , \quad \xi = \xi_i \, e^i \,, \tag{1.54}$$

$$t \;=\; t^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}\,\partial_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{\mu_p}\otimes \mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes \mathrm{d}x^{\nu_q} \tag{1.55}$$

ou

$$t \;=\; t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\,e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_q}\;, \tag{1.56}$$

e

$$\omega \;=\; \sum_{1\leqslant\mu_1<\ldots<\mu_p\leqslant n}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p} \;=\; \frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p} \tag{1.57}$$

ou

$$\omega \;=\; \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n}\omega_{i_1\ldots i_p}\,e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p} \;=\; \frac{1}{p!}\,\omega_{i_1\ldots i_p}\,e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}\;, \tag{1.58}$$

onde X^μ, X^i, ξ_μ, ξ_i, $t^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}$, $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, $\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}$ e $\omega_{i_1\ldots i_p}$ são funções sobre M definidas no domínio das coordenadas locais ou dos referenciais locais considerados.

Sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \to x'^\kappa$, as bases dos ∂_μ e dos $\mathrm{d}x^\mu$ se transformam conforme

$$\partial_\mu \;\longrightarrow\; \partial'_\kappa \;=\; \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\,\partial_\mu \quad,\quad \mathrm{d}x^\mu \;\longrightarrow\; \mathrm{d}x'^\kappa \;=\; \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\;, \tag{1.59}$$

enquanto que as funções coeficiente se transformam conforme

$$X^\mu \;\longrightarrow\; X'^\kappa \;=\; \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\,X^\mu \quad,\quad \xi_\mu \;\longrightarrow\; \xi'_\kappa \;=\; \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\,\xi_\mu\;, \tag{1.60}$$

$$t^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q} \;\longrightarrow\; t'^{\kappa_1\ldots\kappa_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_q} \;=\; \frac{\partial x'^{\kappa_1}}{\partial x^{\mu_1}}\ldots\frac{\partial x'^{\kappa_p}}{\partial x^{\mu_p}}\,\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\ldots\frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\lambda_q}}\,t^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}\;, \tag{1.61}$$

e

$$\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} \;\longrightarrow\; \omega'_{\kappa_1\ldots\kappa_p} \;=\; \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\kappa_1}}\ldots\frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial x'^{\kappa_p}}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\;. \tag{1.62}$$

De maneira análoga, sob uma mudança de trivialização local, as bases dos e_i e dos e^i se transformam conforme

$$e_i \;\longrightarrow\; e'_k \;=\; a^i_k\,e_i \quad,\quad e^i \;\longrightarrow\; e'^k \;=\; (a^{-1})^k_i\,e^i\;, \tag{1.63}$$

onde a é uma função a valores no grupo das matrizes inversíveis $n\times n$, enquanto que as funções coeficiente se transformam conforme

$$X^i \;\longrightarrow\; X'^k \;=\; (a^{-1})^k_i\,X^i\;, \quad,\quad \xi_i \;\longrightarrow\; \xi'_k \;=\; a^i_k\,\xi_i\;, \tag{1.64}$$

$$t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \;\longrightarrow\; t'^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} \;=\; (a^{-1})^{k_1}_{i_1}\ldots(a^{-1})^{k_p}_{i_p}\,a^{j_1}_{l_1}\ldots a^{j_q}_{l_q}\,t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\;, \tag{1.65}$$

e

$$\omega_{i_1\ldots i_p} \;\longrightarrow\; \omega'_{k_1\ldots k_p} \;=\; a^{i_1}_{k_1}\ldots a^{i_p}_{k_p}\,\omega_{i_1\ldots i_p}\;. \tag{1.66}$$

Finalmente, voltando ao caso geral de um fibrado vetorial E de posto r sobre M, consideremos uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E. Da mesma forma que antes esta base induz bases de seções locais em todos os fibrados descendentes de E:

1. uma base $\{e^1, \ldots, e^r\}$ de seções locais e^α do fibrado dual E^*,

2. uma base
$$\{ e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_q} \mid 1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \leqslant r \}$$
de seções locais do fibrado tensorial $T^p_q E$,

3. uma base
$$\{ e^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha_p} \mid 1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \leqslant r \}$$
de seções locais do fibrado exterior dual $\bigwedge^p E^*$.

A primeira delas é a base dual à base original, definida por

$$\langle e^\alpha, e_\beta \rangle \;=\; \delta^\alpha_\beta \,. \tag{1.67}$$

Ainda da mesma forma que antes, uma seção local s de E, uma seção local s^* de E^*, uma seção local t de $T^p_q E$ e uma seção local ω de $\bigwedge^p E^*$ admitem expansões da forma

$$s \;=\; s^\alpha e_\alpha \quad , \quad s^* \;=\; s_\alpha e^\alpha \,, \tag{1.68}$$

$$t \;=\; t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \, e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_q} \,, \tag{1.69}$$

e

$$\omega \;=\; \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \leqslant r} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \, e^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha_p} \;=\; \frac{1}{p!} \, \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \, e^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha_p} \,, \tag{1.70}$$

onde s^α, s_α, $t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ e $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ são funções sobre M definidas no domínio comum das bases de seções locais consideradas. Por fim, sob uma mudança de trivialização local, as bases dos e_α e dos e^α se transformam conforme

$$e_\alpha \;\longrightarrow\; e'_\gamma \;=\; g^\alpha_\gamma \, e_\alpha \quad , \quad e^\alpha \;\longrightarrow\; e'^{\,\gamma} \;=\; (g^{-1})^\gamma_\alpha \, e^\alpha \,, \tag{1.71}$$

onde g é uma função a valores no grupo das matrizes inversíveis $r \times r$, enquanto que as funções coeficiente se transformam conforme

$$s^\alpha \;\longrightarrow\; s'^{\,\gamma} \;=\; (g^{-1})^\gamma_\alpha \, s^\alpha \quad , \quad s_\alpha \;\longrightarrow\; s'_\gamma \;=\; g^\alpha_\gamma \, s_\alpha \,, \tag{1.72}$$

$$t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;\longrightarrow\; t'^{\,\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q} \;=\; (g^{-1})^{\gamma_1}_{\alpha_1} \ldots (g^{-1})^{\gamma_p}_{\alpha_p} \, g^{\beta_1}_{\delta_1} \ldots g^{\beta_q}_{\delta_q} \, t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \,, \tag{1.73}$$

e

$$\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \;\longrightarrow\; \omega'_{\gamma_1 \ldots \gamma_p} \;=\; (g^{-1})^{\gamma_1}_{\alpha_1} \ldots (g^{-1})^{\gamma_p}_{\alpha_p} \, \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \,. \tag{1.74}$$

1.2.5 "Pull-Back"

Além das construções funtoriais apresentadas acima, existe outro procedimento básico para construir novos fibrados vetoriais a partir de um fibrado vetorial dado, que é conhecido como o "pull-back" de um fibrado vetorial por uma aplicação entre as respectivas variedades base. (Também se usa a expressão "fibrado vetorial induzido", que infelizmente é pouca específica quanto ao significado da expressão "induzido".) Ao contrário das construções funtoriais que modificam as fibras mas deixam a variedade base inalterada, esta construção substitui a variedade base por outra sem afetar as fibras.

Dados um fibrado vetorial E sobre uma variedade M com projeção $\pi_E : E \to M$ e uma aplicação diferenciável $\phi : N \to M$ de uma outra variedade N em M, consideremos o conjunto

$$\phi^* E \;=\; \{\, (n,e) \in N \times E \mid \phi(n) = \pi_E(e) \,\} \;. \tag{1.75}$$

Denotando a restrição da primeira projeção $\mathrm{pr}_1 : N \times E \to N$ a $\phi^* E$ por $\pi_{\phi^* E}$ e a restrição da segunda projeção $\mathrm{pr}_2 : N \times E \to E$ a $\phi^* E$ por $\hat{\phi}$, temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \phi^* E & \xrightarrow{\hat{\phi}} & E \\ {\scriptstyle \pi_{\phi^* E}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \pi_E} \\ N & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \tag{1.76}$$

Ademais, cada trivialização admissível $\Phi : E|_U \to U \times \mathbb{E}$ de E sobre um aberto U de M induz uma trivialização $\phi^* \Phi : \phi^* E|_{\phi^{-1}(U)} \to \phi^{-1}(U) \times \mathbb{E}$ de $\phi^* E$ sobre o aberto $\phi^{-1}(U)$ de N definida da maneira óbvia: se, para $m \in U$ e $n \in \phi^{-1}(U)$, $\Phi_m : E_m \to \mathbb{E}$ denota a restrição de Φ à fibra E_m de E sobre m e $(\phi^* \Phi)_n : (\phi^* E)_n \to \mathbb{E}$ denota a restrição de $\phi^* \Phi$ à fibra $(\phi^* E)_n$ de $\phi^* E$ sobre n, então

$$(\phi^* E)_n \;=\; E_{\phi(n)} \qquad \text{e} \qquad (\phi^* \Phi)_n \;=\; \Phi_{\phi(n)} \;. \tag{1.77}$$

Logo, a função de transição $\tau^E_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ entre duas trivializações admissíveis Φ_α de E sobre U_α e Φ_β de E sobre U_β determina a função de transição $\tau^{\phi^* E}_{\alpha\beta} : \phi^{-1}(U_\alpha) \cap \phi^{-1}(U_\beta) \to \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ entre as trivializações induzidas $\phi^* \Phi_\alpha$ de $\phi^* E$ sobre $\phi^{-1}(U_\alpha)$ e $\phi^* \Phi_\beta$ de $\phi^* E$ sobre $\phi^{-1}(U_\beta)$ conforme

$$\tau^{\phi^* E}_{\alpha\beta} \;=\; \tau^E_{\alpha\beta} \circ \phi \;. \tag{1.78}$$

Portanto, como $\tau^E_{\alpha\beta}$ e ϕ são diferenciáveis, $\tau^{\phi^* E}_{\alpha\beta}$ também é.

1.13 Definição Dados um fibrado vetorial E sobre uma variedade M com projeção π_E e uma aplicação diferenciável $\phi : N \to M$ de uma outra variedade N em M, o fibrado vetorial $\phi^* E$ sobre N com projeção $\pi_{\phi^* E}$ assim construído é chamado o **pull-back** de E **para** N **via** ϕ, e o homomorfismo de fibrados vetoriais $\hat{\phi}$ sobre ϕ assim construído é chamado o **levantamento canônico** de ϕ (para E).

A maneira mais concisa e intuitiva (se bem que incompleta) de visualizar essa construção é notar que as fibras dos dois fibrados são idênticas: a mudança da variedade base significa apenas um reetiquetamento das fibras:

$$(\phi^* E)_n \;=\; E_{\phi(n)} \qquad \text{para } n \in N \;. \tag{1.79}$$

As seções de $\phi^* E$ são também chamadas **seções de** E **ao longo de** ϕ. Por exemplo, um campo vetorial sobre M ao longo de uma curva γ em M com intervalo de definição I é uma seção do fibrado vetorial $\gamma^* TM$ sobre I.

1.3 Conexões Lineares

O conceito de uma conexão linear, ou derivada covariante, resulta do desejo de generalizar a noção de derivada direcional do $\mathbb{R}^n$ para variedades. A direção em que se pretende diferenciar, em cada ponto da variedade, é dada por um vetor tangente a esta variedade neste ponto e, de forma global, por um campo vetorial. O objeto a ser diferenciado é uma seção de algum fibrado vetorial sobre a referida variedade, sendo que o resultado desta operação deve ser outra seção do mesmo fibrado vetorial.

Em um primeiro momento, pelo menos no caso do fibrado vetorial sob consideração ser o fibrado tangente da variedade base ou algum dos seus descendentes, poderia-se pensar em utilizar a derivada de Lie. No entanto, isso não é uma opção viável, pois observando que para campos vetoriais X, Y e uma função f, vale a fórmula

$$L_{fX}Y \;=\; f L_X Y + (Y \cdot f) X \;\neq\; f L_X Y \;,$$

notamos que não seria adequado interpretar $L_X Y$ como algum tipo de derivada direcional de Y ao longo de X. A noção de derivada covariante corrige este defeito.

1.3.1 Definições e Exemplos

1.14 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M. Uma **conexão linear** ou **derivada covariante** em E é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear

$$\begin{array}{rccc} D: & \Gamma(E) & \longrightarrow & \Omega^1(M,E) \\ & s & \longmapsto & Ds \end{array} \tag{1.80}$$

que satisfaz a regra de Leibniz, isto é, para $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $s \in \Gamma(E)$, vale

$$D(fs) \;=\; \mathrm{d}f \otimes s \,+\, f\,Ds \;. \tag{1.81}$$

Equivalentemente, é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ & (X,s) & \longmapsto & D_X s \end{array} \tag{1.82}$$

que é $\mathfrak{F}(M)$-linear no primeiro argumento e satisfaz a regra de Leibniz no segundo argumento, isto é, para $f \in \mathfrak{F}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(E)$, vale

$$D_{fX} s \;=\; f\,D_X s \;, \tag{1.83}$$

e

$$D_X(fs) \;=\; (X \cdot f)\,s \,+\, f\,D_X s \;. \tag{1.84}$$

Dizemos que Ds é a **derivada covariante de** s e que $D_X s$ é a **derivada covariante de** s **ao longo de** X. Dizemos ainda que s é **covariantemente constante ao longo de** X se $D_X s = 0$ e que s é **covariantemente constante** se $Ds = 0$, i.e., se para todo campo vetorial X sobre M, vale $D_X s = 0$.

A parte não-trivial da afirmação de equivalência contida nesta definição segue do fato de que a aplicação (1.82), sendo $\mathfrak{F}(M)$-linear no primeiro argumento, induz uma família de aplicações $\mathbb{R}$-bilineares

$$\begin{array}{rccc} D_m: & T_m M \times \Gamma(E) & \longrightarrow & E_m \\ & (v,s) & \longmapsto & D_v s \end{array} \tag{1.85}$$

parametrizada pelos pontos m da variedade base M. De fato, dados $m \in M$, $v \in T_m M$ e $s \in \Gamma(E)$, suponha que $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $Z_1(m) = v = Z_2(m)$; então existem funções $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}(M)$ e campos vetoriais $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $f_i(m) = 0$ e $Z_1 - Z_2 = \sum_i f_i X_i$ em uma vizinhança de m, o que implica

$$(D_{Z_1} s)(m) - (D_{Z_2} s)(m) \;=\; \sum_i f_i(m)(D_{X_i} s)(m) \;=\; 0 \;,$$

de modo que podemos definir $D_v s \in E_m$ por $(D_{Z_1} s)(m) = D_v s = (D_{Z_2} s)(m)$.

1.7 Exemplo A **conexão linear padrão** no fibrado vetorial trivial padrão $E = M \times \mathbb{E}$, mediante a identificação entre seções de E e funções sobre M a valores em $\mathbb{E}$ e entre 1-formas sobre M a valores em E e 1-formas sobre M a valores em $\mathbb{E}$ ($\Gamma(E) = C^\infty(M, \mathbb{E})$, $\Omega^1(M, E) = \Omega^1(M, \mathbb{E})$) é definida como a derivada exterior usual

$$\mathrm{d} : C^\infty(M, \mathbb{E}) \longrightarrow \Omega^1(M, \mathbb{E})$$

de funções a valores vetoriais, de modo que se $\{e_1, \ldots, e_r\}$ for uma base qualquer de $\mathbb{E}$, temos

$$s \;=\; s^\alpha e_\alpha \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}s \;=\; \mathrm{d}s^\alpha e_\alpha \;.$$

◊

A partir deste exemplo e usando partições da unidade, pode-se provar que um fibrado vetorial qualquer sobre uma variedade base qualquer sempre admite uma conexão linear; deixaremos a elaboração de uma demonstração detalhada como exercício para o leitor. Por outro lado, é fácil ver que tal conexão linear está longe de ser única. Mais do que isso: podemos determinar exatamente quantas conexões lineares diferentes existem em um fibrado vetorial dado E sobre uma variedade base M dada e qual é a estrutura do conjunto de todas as conexões lineares em E. Para tanto, note que uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-linear

$$\Gamma(E) \quad\longrightarrow\quad \Omega^1(M, E)$$

corresponde biunivocamente a uma 1-forma A sobre M a valores no fibrado vetorial $\mathrm{L}(E)$ das transformações lineares (ou dos endomorfismos) de E ($\mathrm{L}(E) = \mathrm{End}(E) = T^1_1 E = E^* \otimes E$): $A \in \Omega^1(M, \mathrm{L}(E))$. Mas obviamente, no ambiente do espaço vetorial de todas as aplicações $\mathbb{R}$-lineares de $\Gamma(E)$ em $\Omega^1(M, E)$, podemos formar a diferença $D' - D$ de duas conexões lineares D e D', e esta será uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-linear, sendo que, reciprocamente, a soma $D + A$ de uma conexão linear D e uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-linear A é novamente uma conexão linear. Isso significa que o conjunto de todas as conexões lineares em E é um espaço afim (e mais precisamente, um subespaço afim do espaço vetorial de todas as aplicações $\mathbb{R}$-lineares de $\Gamma(E)$ em $\Omega^1(M, E)$) cujo espaço vetorial das diferenças é $\Omega^1(M, \mathrm{L}(E))$.

1.3.2 Construções Funtoriais

Uma propriedade importante de conexões lineares é que elas se comportam naturalmente em relação aos funtores introduzido na Seção 1.2.3. Mais especificamente, temos

1. **Dual:** Dada uma conexão linear D em um fibrado vetorial E sobre M, existe uma única conexão linear D^* no dual E^* de E, chamada a **dual** de D, tal que para $s \in \Gamma(E)$ e $s^* \in \Gamma(E^*)$,

$$\mathrm{d}\,\langle s^*, s\rangle \;=\; \langle D^* s^*, s\rangle + \langle s^*, Ds\rangle \;, \tag{1.86}$$

ou seja, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X \cdot \langle s^*, s\rangle \;=\; \langle D_X^* s^*, s\rangle + \langle s^*, D_X s\rangle \;, \tag{1.87}$$

uma relação que pode ser vista como uma versão da regra de Leibniz para o pareamento bilinear entre seções de E e de E^*. De fato, basta definir $D^* s^*$ por

$$\langle D^* s^*, s\rangle \;=\; \mathrm{d}\,\langle s^*, s\rangle - \langle s^*, Ds\rangle \;.$$

ou seja, basta definir $D_X^* s^*$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, por

$$\langle D_X^* s^*, s\rangle \;=\; X \cdot \langle s^*, s\rangle - \langle s^*, D_X s\rangle \;.$$

2. **Soma direta:** Dadas uma conexão linear D_1 em um fibrado vetorial E_1 sobre M e uma conexão linear D_2 em um fibrado vetorial E_2 sobre M, existe uma única conexão linear $D_1 \oplus D_2$ na soma direta $E_1 \oplus E_2$ de E_1 e E_2, chamada a **soma direta** de D_1 e D_2, tal que para $s_1 \in \Gamma(E_1)$ e $s_2 \in \Gamma(E_2)$,

$$(D_1 \oplus D_2)\,(s_1 \oplus s_2) \;=\; D_1 s_1 \oplus D_2 s_2 \;, \tag{1.88}$$

ou seja, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(D_1 \oplus D_2)_X (s_1 \oplus s_2) \;=\; (D_1)_X\, s_1 \oplus (D_2)_X\, s_2 \;. \tag{1.89}$$

3. **Produto tensorial:** Dadas uma conexão linear D_1 em um fibrado vetorial E_1 sobre M e uma conexão linear D_2 em um fibrado vetorial E_2 sobre M, existe uma única conexão linear $D_1 \otimes D_2$ no produto tensorial $E_1 \otimes E_2$ de E_1 e E_2, chamada o **produto tensorial** de D_1 e D_2, tal que para $s_1 \in \Gamma(E_1)$ e $s_2 \in \Gamma(E_2)$,

$$(D_1 \otimes D_2)\,(s_1 \otimes s_2) \;=\; D_1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes D_2 s_2 \;, \tag{1.90}$$

ou seja, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(D_1 \otimes D_2)_X (s_1 \otimes s_2) \;=\; (D_1)_X\, s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes (D_2)_X\, s_2 \;. \tag{1.91}$$

Em particular, uma conexão linear em um fibrado vetorial induz conexões lineares em todos os seus descendentes, que a seguir serão coletivamente denotadas pela mesma letra, afim de simplificar a notação.

1.3.3 Derivada Exterior Covariante

Do mesmo modo que a derivada comum d em variedades, como operador que leva funções em 1-formas, pode ser estendida a um operador d chamado de derivada exterior que leva p-formas em $(p+1)$-formas, uma conexão linear D em um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M, como operador que leva seções de E em 1-formas a valores em E, pode ser estendida a um operador d_D chamado de **derivada exterior covariante** que leva p-formas a valores em E em $(p+1)$-formas a valores em E. A definição explícita dos operadores

$$\mathrm{d} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

e

$$\mathrm{d}_D : \Omega^p(M,E) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M,E)$$

é praticamente a mesma: basta substituir a fórmula tradicional

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)(X_0,\ldots,X_p) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,X_i\cdot\omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p)\\ &\quad+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j}\,\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p)\end{aligned}\tag{1.92}$$

com $\omega\in\Omega^p(M)$ pela fórmula

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}_D\omega)(X_0,\ldots,X_p) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,D_{X_i}\omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p)\\ &\quad+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j}\,\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p)\end{aligned}\tag{1.93}$$

com $\omega\in\Omega^p(M,E)$, onde $X_0,\ldots,X_p\in\mathfrak{X}(M)$ e o símbolo $\hat{X}$ indica que X deve ser omitido. A diferença principal reside no fato de que a derivada exterior comum satisfaz a condição fundamental $\mathrm{d}^2=0$ e portanto define uma teoria de cohomologia (a cohomologia de de Rham da variedade M), enquanto que, em geral, $\mathrm{d}_D^2\neq 0$; veja as equações (1.137-1.139) abaixo.

1.3.4 Expressões Locais

Dado um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M munido de uma conexão linear D, podemos escolher uma base $\{e_1,\ldots,e_r\}$ de seções locais e_α de E (definida em um aberto U de M que será fixado, como anteriormente) e expandir as derivadas covariantes das seções da base em termos desta mesma base, conforme

$$De_\beta \;=\; A^\alpha_\beta\otimes e_\alpha \qquad\text{ou}\qquad D_Xe_\beta \;=\; A^\alpha_\beta(X)\,e_\alpha \quad\text{para}\;\; X\in\mathfrak{X}(M)\;, \tag{1.94}$$

com coeficientes A^α_β que constituem uma matriz $r\times r$ de 1-formas, ou equivalentemente, uma 1-forma A a valores no espaço das matrizes $r\times r$ (sobre U), chamadas de **formas de conexão locais** ou **potenciais de calibre**, e que determinam completamente a ação do operador de derivada covariante sobre seções do fibrado vetorial E, assim como sobre seções de qualquer um dos seus descendentes, no domínio pertinente. Por exemplo, considerando a base dual $\{e^1,\ldots,e^r\}$ de seções locais e^α de E^*, temos

$$A^\alpha_\beta \;=\; \langle\,e^\alpha\,,\,De_\beta\,\rangle \qquad\text{ou}\qquad A^\alpha_\beta(X) \;=\; \langle\,e^\alpha\,,\,D_Xe_\beta\,\rangle \quad\text{para}\;\; X\in\mathfrak{X}(M)\;, \tag{1.95}$$

e as mesmas formas aparecem como coeficientes na expansão das derivadas covariantes das seções desta base em termos desta mesma base, conforme

$$De^\alpha \;=\; -\,A^\alpha_\beta\otimes e^\beta \qquad\text{ou}\qquad D_Xe^\alpha \;=\; -\,A^\alpha_\beta(X)\,e^\beta \quad\text{para}\;\; X\in\mathfrak{X}(M)\;, \tag{1.96}$$

pois

$$\begin{aligned}\langle De^\alpha,e_\gamma\rangle &= \mathrm{d}\,\langle e^\alpha,e_\gamma\rangle-\langle e^\alpha,De_\gamma\rangle \;=\; \mathrm{d}\,\langle e^\alpha,e_\gamma\rangle-A^\beta_\gamma\,\langle e^\alpha,e_\beta\rangle\\ &= \mathrm{d}(\delta^\alpha_\gamma)-A^\beta_\gamma\,\delta^\alpha_\beta \;=\; -A^\alpha_\gamma \;=\; -A^\alpha_\beta\,\delta^\beta_\gamma \;=\; -A^\alpha_\beta\,\langle e^\beta,e_\gamma\rangle\;.\end{aligned}$$

Por outro lado, fixando um sistema de coordenadas locais x^μ em M (definido no mesmo aberto U de M), denotaremos a derivada covariante ao longo de ∂_μ simplesmente por D_μ, em vez de D_{∂_μ}. Mais geralmente, fixando um referencial local $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ de campos vetoriais locais e_k sobre M (definido no mesmo aberto U de M), denotaremos a derivada covariante ao longo de e_k simplesmente por D_k, em vez de D_{e_k}, e de modo semelhante, a derivada comum (ou de Lie) de uma função f ao longo de e_k simplesmente por $\partial_k f$, em vez de $e_k \cdot f$ – mesmo quando os e_k formam um referencial não holônomo. Assim, as equações (1.94) e (1.96) assumem a forma

$$D_k e_\beta \;=\; A_{k\,\beta}^{\;\alpha}\, e_\alpha \quad , \quad D_k e^\alpha \;=\; -\, A_{k\,\beta}^{\;\alpha}\, e^\beta \;, \tag{1.97}$$

onde

$$A_{k\,\beta}^{\;\alpha} \;=\; A_\beta^\alpha(e_k) \;, \tag{1.98}$$

e portanto

$$A_\beta^\alpha \;=\; A_{k\,\beta}^{\;\alpha}\, e^k \;. \tag{1.99}$$

Então se expandirmos seções s de E, s^* de E^* e t de $T_q^p E$ conforme as equações (1.68) e (1.69), e se usarmos expansões análogas $D_k s \;=\; D_k s^\alpha\, e_\alpha$, $D_k s^* \;=\; D_k s_\beta\, e^\beta$ e

$$D_k t \;=\; D_k t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\; e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_q}$$

para as suas derivadas covariantes, obtemos

$$D_k s^\alpha \;=\; \partial_k s^\alpha + A_{k\,\beta}^{\;\alpha}\, s^\beta \quad , \quad D_k s_\beta \;=\; \partial_k s_\beta - A_{k\,\beta}^{\;\alpha}\, s_\alpha \;, \tag{1.100}$$

e

$$D_k t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;=\; \partial_k t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;+\; \sum_{r=1}^{p} A_{k\,\alpha}^{\;\alpha_r}\; t^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}\,\alpha\,\alpha_{r+1} \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;-\; \sum_{s=1}^{q} A_{k\,\beta_s}^{\;\beta}\; t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_{s-1}\,\beta\,\beta_{s+1} \ldots \beta_q} \;. \tag{1.101}$$

De modo análogo, se expandirmos formas diferenciais ω a valores em E, em E^* e em $T_q^p E$ conforme $\omega \;=\; \omega^\alpha\, e_\alpha$, $\omega \;=\; \omega_\beta\, e^\beta$ e $\omega \;=\; \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\, e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_q}$ com coeficientes ω^α, ω_β e $\omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ que são formas diferenciais comuns, e se usarmos expansões análogas $\mathrm{d}_D \omega \;=\; \mathrm{d}_D \omega^\alpha\, e_\alpha$, $\mathrm{d}_D \omega = \mathrm{d}_D \omega_\beta\, e^\beta$ e

$$\mathrm{d}_D \omega \;=\; \mathrm{d}_D \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\; e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_q}$$

para as suas derivadas exteriores covariantes, obtemos

$$\mathrm{d}_D \omega^\alpha \;=\; \mathrm{d}\omega^\alpha \;+\; A_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta \quad , \quad \mathrm{d}_D \omega_\beta \;=\; \mathrm{d}\omega_\beta \;-\; A_\beta^\alpha \wedge \omega_\alpha \;, \tag{1.102}$$

e

$$\mathrm{d}_D \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;=\; \mathrm{d}\omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;+\; \sum_{r=1}^{p} A_\alpha^{\alpha_r} \wedge \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}\,\alpha\,\alpha_{r+1} \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \;-\; \sum_{s=1}^{q} A_{\beta_s}^{\beta} \wedge \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_{s-1}\,\beta\,\beta_{s+1} \ldots \beta_q} \;. \tag{1.103}$$

Vale ressaltar que quando expressamos a ação do operador D ou d_D em componentes, abdicamos do uso de parênteses, afim de não sobrecarregar a notação, pois não há possibilidade de ambiguidade: por exemplo, a expressão $D_k s^\alpha$ só pode ser lida como $(D_k s)^\alpha$ e nunca como $D_k(s^\alpha)$, já que o operador D_k age sobre seções s de E e não sobre suas componentes s^α, que são funções, e da mesma forma, a expressão $\mathrm{d}_D \omega^\alpha$ só pode ser lida como $(\mathrm{d}_D \omega)^\alpha$ e nunca como $\mathrm{d}_D(\omega^\alpha)$, já que o operador d_D age sobre formas ω a valores em E e não sobre suas componentes ω^α, que são formas comuns.

As formas de conexão locais associadas a uma conexão linear D não estão sujeitas a nenhuma restrição "a priori", o que reforça a afirmação de que, no mesmo fibrado vetorial, há muitas conexões lineares diferentes. No entanto, elas não são as componentes locais de uma seção de algum fibrado vetorial sobre M que seja descendente de E e do fibrado tangente TM de M: isso pode ser deduzido considerando sua lei de transformação sob uma mudança de trivialização local, que equivale à passagem $e_\alpha \to e'_\gamma$, conforme a equação (1.71), da base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E para uma nova base $\{e'_1, \ldots, e'_r\}$ de seções locais e'_γ de E, sendo que a passagem induzida $A^\alpha_\beta \to A'^\gamma_\delta$, ou simplesmente $A \to A'$, pode ser calculada como segue:

$$\begin{aligned} A'^\gamma_\delta \otimes e'_\gamma &= De'_\delta = D(g^\beta_\delta \, e_\beta) = g^\beta_\delta \, De_\beta + \mathrm{d}g^\beta_\delta \otimes e_\beta \\ &= g^\beta_\delta \, A^\alpha_\beta \, (g^{-1})^\gamma_\alpha \otimes e'_\gamma + \mathrm{d}g^\beta_\delta \, (g^{-1})^\gamma_\beta \otimes e'_\gamma \, . \end{aligned}$$

Assim, obtemos a **lei de transformação de potenciais de calibre sob transformações de calibre**, que pode ser expressa de várias formas: ao nível de 1-formas,

$$A^\alpha_\beta \longrightarrow A'^\gamma_\delta = g^\beta_\delta \, A^\alpha_\beta \, (g^{-1})^\gamma_\alpha + \mathrm{d}g^\beta_\delta \, (g^{-1})^\gamma_\beta \, , \tag{1.104}$$

ou em notação matricial, simplesmente

$$A \longrightarrow A' = g \, A \, g^{-1} + \mathrm{d}g \, g^{-1} \, , \tag{1.105}$$

enquanto que ao nível de funções, em relação a um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de campos vetoriais locais e_k, com $A_k{}^\alpha_\beta = A^\alpha_\beta(e_k)$, $A'_k{}^\gamma_\delta = A'^\gamma_\delta(e_k)$, $A_k = A(e_k)$, $A'_k = A'(e_k)$,

$$A_k{}^\alpha_\beta \longrightarrow A'_k{}^\gamma_\delta = g^\beta_\delta \, A_k{}^\alpha_\beta \, (g^{-1})^\gamma_\alpha + \partial_k g^\beta_\delta \, (g^{-1})^\gamma_\beta \, , \tag{1.106}$$

ou em notação matricial, simplesmente

$$A_k \longrightarrow A'_k = g \, A_k \, g^{-1} + \partial_k g \, g^{-1} \, . \tag{1.107}$$

Obviamente, essa é uma lei de transformação afim, ao invés de linear; em particular, é possível ter $A = 0$, enquanto que $A' \neq 0$. Este aspecto deverá ser levado em consideração quando tentamos dar uma definição global do conceito de "forma de conexão", a qual permitiria, por exemplo, escrever fórmulas tais como as equações (1.102) e (1.103) para a derivada exterior covariante na forma compacta $\mathrm{d}_D\omega = \mathrm{d}\omega + A \wedge \omega$ (e então passar a denotar d_D por d_A).

1.3.5 Expressões Locais no Fibrado Tangente

Um papel particularmente importante é desempenhado por conexões lineares no fibrado tangente de uma variedade (e seus descendentes), isto é, pelo conceito de derivada covariante de campos tensoriais sobre variedades. Neste caso, adotamos algumas convenções ligeiramente diferentes, pois costumamos denotar tais derivadas covariantes por ∇, ao invés de D, e as correspondentes formas de conexão locais por Γ, ao invés de A. Mais explicitamente, introduzimos um sistema de coordenadas locais x^μ em M (definido em um aberto U de M que será fixado, como antes), junto com o referencial local holônomo $\{\partial_1, \ldots, partial_n\}$ para M por ele induzido, ou mais geralmente, um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ não necessariamente holônomo para M, e expandimos as derivadas covariantes dos campos vetoriais do referencial em termos destes mesmos campos, conforme

$$\nabla e_j = \Gamma^i_j \otimes e_i \qquad \text{ou} \qquad \nabla_X e_j = \Gamma^i_j(X) \, e_i \quad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M) \, , \tag{1.108}$$

com coeficientes Γ^i_j que constituem uma matriz $n \times n$ de 1-formas, ou equivalentemente, uma 1-forma Γ a valores no espaço das matrizes $n \times n$ (sobre o domínio do referido referencial local), chamadas de **formas de Christoffel.** Assim, considerando o referencial local dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$ para M, temos

$$\Gamma^i_j \;=\; \langle\, e^i\,,\, \nabla e_j\,\rangle \qquad \text{ou} \qquad \Gamma^i_j(X) \;=\; \langle\, e^i\,,\, \nabla_X e_j\,\rangle \quad \text{para} \;\; X \in \mathfrak{X}(M)\;, \tag{1.109}$$

sendo que as mesmas formas de Christoffel aparecem como coeficientes na expansão das derivadas covariantes das 1-formas do referencial dual em termos destas mesmas 1-formas, conforme

$$\nabla e^i \;=\; -\,\Gamma^i_j \otimes e^j \qquad \text{ou} \qquad \nabla_X e^i \;=\; -\,\Gamma^i_j(X)\, e^j \quad \text{para} \;\; X \in \mathfrak{X}(M)\;. \tag{1.110}$$

Ademais, as equações (1.97)–(1.99) assumem a forma

$$\nabla_k\, e_j \;=\; \Gamma_{kj}^{\;i}\, e_i \quad , \quad \nabla_k\, e^i \;=\; -\,\Gamma_{kj}^{\;i}\, e^j\;, \tag{1.111}$$

onde

$$\Gamma_{kj}^{\;i} \;=\; \Gamma^i_j(e_k)\;, \tag{1.112}$$

e portanto

$$\Gamma^i_j \;=\; \Gamma_{kj}^{\;i}\, e^k\;, \tag{1.113}$$

onde as funções $\Gamma_{kj}^{\;i}$ são geralmente conhecidas como **símbolos de Christoffel.** Então se expandirmos campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}(M)$, campos covetoriais $\xi \in \mathfrak{X}^*(M)$ e campos tensoriais $t \in \mathfrak{T}^p_q(M)$ sobre M conforme as equações (1.54) e 1.56), e se usarmos expansões análogas $\nabla_k X \;=\; \nabla_k X^i\, e_i$, $\nabla_k \xi \;=\; \nabla_k \xi_j\, e^j$ e

$$\nabla_k t \;=\; \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$$

para as suas derivadas covariantes, obtemos

$$\nabla_k X^i \;=\; \partial_k X^i + \Gamma_{kj}^{\;i}\, X^j \quad , \quad \nabla_k \xi_j \;=\; \partial_k \xi_j - \Gamma_{kj}^{\;i}\, \xi_i\;, \tag{1.114}$$

e

$$\nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \;=\; \partial_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \;+\; \sum_{r=1}^{p} \Gamma_{ki}^{\;i_r}\, t^{i_1 \ldots i_{r-1}\, i\, i_{r+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \;-\; \sum_{s=1}^{q} \Gamma_{kj_s}^{\;j}\, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{s-1}\, j\, j_{s+1} \ldots j_q}\;. \tag{1.115}$$

De modo análogo, se expandirmos formas diferenciais ω a valores em TM, em T^*M e em $T^p_q M$ conforme $\omega = \omega^i\, e_i$, $\omega = \omega_j\, e^j$ e $\omega = \omega^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ com coeficientes ω^i, ω_j e $\omega^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ que são formas diferenciais comuns, e se usarmos expansões análogas $\mathrm{d}_\nabla \omega = \mathrm{d}_\nabla \omega^i\, e_i$, $\mathrm{d}_\nabla \omega = \mathrm{d}_\nabla \omega_j\, e^j$ e

$$\mathrm{d}_\nabla \omega \;=\; \mathrm{d}_\nabla \omega^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$$

para as suas derivadas exteriores covariantes, obtemos

$$\mathrm{d}_\nabla \omega^i \;=\; \mathrm{d}\omega^i \,+\, \Gamma^i_j \wedge \omega^j \quad , \quad \mathrm{d}_\nabla \omega_j \;=\; \mathrm{d}\omega_j \,-\, \Gamma^i_j \wedge \omega_i\;, \tag{1.116}$$

e

$$\mathrm{d}_\nabla \omega^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \;=\; \mathrm{d}\omega^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \,+\, \sum_{r=1}^{p} \Gamma^{i_r}_i \wedge \omega^{i_1 \ldots i_{r-1}\, i\, i_{r+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \;-\; \sum_{s=1}^{q} \Gamma^j_{j_s} \wedge \omega^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{s-1}\, j\, j_{s+1} \ldots j_q}\;. \tag{1.117}$$

Como antes, observamos que os símbolos de Christoffel não são as componentes de um tensor de tipo $(1,2)$: isso segue, mais uma vez, considerando seus leis de transformação sob uma mudança de trivialização local, que equivale à passagem $e_i \to e'_l$, conforme a equação (1.63), do referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para um novo referencial local $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, sendo que a passagem induzida $\Gamma^i_j \to \Gamma'^l_m$, ou simplesmente $\Gamma \to \Gamma'$, assume a seguinte forma: ao nível de 1-formas,

$$\Gamma^i_j \longrightarrow \Gamma'^l_m = a^j_m \Gamma^i_j (a^{-1})^l_i + \mathrm{d}a^j_m (a^{-1})^l_j , \tag{1.118}$$

ou em notação matricial, simplesmente

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma' = a \Gamma a^{-1} + \mathrm{d}a \, a^{-1} , \tag{1.119}$$

enquanto que, ao nível de funções,

$$\Gamma^{\,i}_{kj} \longrightarrow \Gamma'^{\,l}_{km} = a^j_m \Gamma^i_{kj} (a^{-1})^l_i + \partial_k a^j_m (a^{-1})^l_j , \tag{1.120}$$

ou em notação matricial, simplesmente

$$\Gamma_k \longrightarrow \Gamma'_k = a \Gamma_k a^{-1} + \partial_k a \, a^{-1} . \tag{1.121}$$

Novamente, essa é uma lei de transformação afim, ao invés de linear; em particular, é possível ter $\Gamma = 0$, enquanto que $\Gamma' \neq 0$. Este aspecto deverá ser levado em consideração quando tentamos dar uma definição global do conceito de "símbolos de Christoffel", a qual permitiria, por exemplo, escrever fórmulas tais como as equações (1.116) e (1.117) para a derivada exterior covariante na forma compacta $\mathrm{d}_\nabla \omega = \mathrm{d}\omega + \Gamma \wedge \omega$ (e então passar a denotar d_∇ por d_Γ).

1.3.6 "Pull-Back"

O fato de que conexões lineares são localmente representadas por 1-formas e que formas diferenciais admitem a operação de "pull-back" nos leva a suspeitar que esta operação possa ser estendida a conexões lineares. Isso de fato é o caso.

Sejam E um fibrado vetorial sobre uma variedade M, N uma outra variedade, $\phi : N \to M$ uma aplicação diferenciável e $\phi^* E$ o pull-back de E para N via ϕ. Então podemos estender a bem-conhecida operação do pull-back de funções e de formas diferenciais via ϕ a uma operação de pull-back de seções de E e formas diferenciais sobre M a valores em E via ϕ, que providencia, respectivamente, seções de $\phi^* E$ e formas diferenciais sobre N a valores em $\phi^* E$, sendo que

$$\begin{array}{rccc} \phi^* : & \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(\phi^* E) \\ & s & \longmapsto & \phi^* s \end{array} \tag{1.122}$$

é simplesmente definido por composição, i.e., para $s \in \Gamma(E)$,

$$\phi^* s = s \circ \phi , \tag{1.123}$$

enquanto que

$$\begin{array}{rccc} \phi^* : & \Omega^p(M, E) & \longrightarrow & \Omega^p(N, \phi^* E) \\ & \omega & \longmapsto & \phi^* \omega \end{array} \tag{1.124}$$

é definido pela mesma fórmula que no caso usual, i.e., para $\omega \in \Omega^p(M, E)$,

$$\left. \begin{array}{c} (\phi^* \omega)_n (v_1, \ldots, v_p) = \omega_{\phi(n)} (T_{\phi(n)} \phi \cdot v_1, \ldots, T_{\phi(n)} \phi \cdot v_p) \\ \text{para } n \in N, \, v_1, \ldots, v_p \in T_n N \end{array} \right. . \tag{1.125}$$

Agora, dada uma conexão linear D em E, podemos construir, de forma canônica, uma conexão linear $\phi^* D$ em $\phi^* E$ tal que, para $s \in \Gamma(E)$,

$$(\phi^* D)(\phi^* s) \;=\; \phi^*(Ds)\;. \tag{1.126}$$

Porém, essa prescrição não pode ser utilizada diretamente como definição do operador $\phi^* D$, uma vez que a aplicação linear (1.122), em geral, não é sobrejetora nem injetora. Para contornar esse problema, lançamos mão de representações locais, fazendo uso do fato de que, segundo a definição das trivializações locais de $\phi^* E$ em termos das trivializações locais de E, toda base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E induz uma base $\{e_1 \circ \phi, \ldots, e_r \circ \phi\}$ de seções locais $e_\alpha \circ \phi$ de $\phi^* E$. Nessas bases, a equação (1.126) significa que se os A_α^β são as formas de conexão locais de D, conforme a equação (1.94), então os $\phi^* A_\alpha^\beta$ devem ser as formas de conexão locais de $\phi^* D$:

$$De_\alpha \;=\; A_\alpha^\beta \otimes e_\beta \quad\Longrightarrow\quad (\phi^* D)(e_\alpha \circ \phi) \;=\; (\phi^* A_\alpha^\beta) \otimes (e_\beta \circ \phi)\;. \tag{1.127}$$

Portanto, se expandirmos seções s de E conforme $s = s^\alpha e_\alpha$ e suas derivadas covariantes conforme $Ds = Ds^\alpha \otimes e_\alpha$, assim como seções $\tilde{s}$ de $\phi^* E$ conforme $\tilde{s} = \tilde{s}^\alpha (e_\alpha \circ \phi)$ e suas derivadas covariantes conforme $(\phi^* D)\tilde{s} = (\phi^* D)\tilde{s}^\alpha \otimes (e_\alpha \circ \phi)$, teremos

$$Ds^\alpha \;=\; \mathrm{d}s^\alpha + A_\gamma^\alpha s^\gamma \quad\Longrightarrow\quad (\phi^* D)\tilde{s}^\alpha \;=\; \mathrm{d}\tilde{s}^\alpha + (\phi^* A_\gamma^\alpha)\,\tilde{s}^\gamma\;. \tag{1.128}$$

Essa fórmula pode ser utilizada para definir $\phi^* D$, localmente e em relação à base de seções locais escolhida. Contudo, agora é fácil verificar que a definição independe das escolhas feitas e portanto proporciona o resultado desejado.

1.15 Definição Sejam E um fibrado vetorial sobre uma variedade M, $\phi : N \to M$ uma aplicação diferenciável de uma outra variedade N em M e $\phi^* E$ o pull-back de E para N via ϕ. Dada uma conexão linear D em E, a conexão linear $\phi^* D$ em $\phi^* E$ assim construída é chamada o **pull-back** de D **para** N **via** ϕ.

1.4 Curvatura e Transporte Paralelo

1.4.1 Tensor de Curvatura

Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M munido de uma conexão linear D. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(E)$, defina

$$F(X,Y) \cdot s \;=\; (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})s\;.$$

É fácil verificar que F é $\mathfrak{F}(M)$-trilinear, isto é, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ e $f, g, h \in \mathfrak{F}(M)$, vale

$$F(fX, gY) \cdot (h\,s) \;=\; fgh\,F(X,Y) \cdot s\;,$$

Ademais, é claro que $F(X,Y)$ é antissimétrico em X e Y e portanto F é uma 2-forma sobre M a valores no fibrado vetorial $\mathrm{L}(E) = \mathrm{End}(E) = T_1^1 E = E^* \otimes E$.

1.16 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M munido de uma conexão linear D. A 2-forma $F \in \Omega^2(M, \mathrm{L}(E))$ dada por

$$F(X,Y) \cdot s \;=\; (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})s\;, \tag{1.129}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(E)$, é chamada de **tensor de curvatura** de D.

Em termos de uma base $\{ e_1, \ldots, e_r \}$ de seções locais e_α de E, expandimos a ação de F sobre as seções da base em termos desta mesma base, conforme

$$F \cdot e_\beta \;=\; F^\alpha_\beta \otimes e_\alpha \qquad \text{ou} \qquad F(X,Y) \cdot e_\beta \;=\; F^\alpha_\beta(X,Y)\, e_\alpha \quad \text{para } X,Y \in \mathfrak{X}(M) \;, \tag{1.130}$$

(veja a equação (1.94)), de modo que

$$F^\alpha_\beta \;=\; \langle\, e^\alpha \,,\, F \cdot e_\beta \,\rangle \qquad \text{ou} \qquad F^\alpha_\beta(X,Y) \;=\; \langle\, e^\alpha \,,\, F(X,Y) \cdot e_\beta \,\rangle \quad \text{para } X,Y \in \mathfrak{X}(M) \;, \tag{1.131}$$

(veja a equação (1.95)), e calculamos

$$\begin{aligned}
F^\alpha_\beta(X,Y)\, e_\alpha \;&=\; F(X,Y) \cdot e_\beta \;=\; D_X D_Y e_\beta - D_Y D_X e_\beta - D_{[X,Y]}\, e_\beta \\
&=\; D_X\big(A^\alpha_\beta(Y)\, e_\alpha\big) - D_Y\big(A^\alpha_\beta(X)\, e_\alpha\big) - A^\alpha_\beta([X,Y])\, e_\alpha \\
&=\; \big(X \cdot A^\alpha_\beta(Y) + A^\gamma_\beta(Y)\, A^\alpha_\gamma(X)\big)\, e_\alpha \;-\; \big(Y \cdot A^\alpha_\beta(X) + A^\gamma_\beta(X)\, A^\alpha_\gamma(Y)\big)\, e_\alpha \;-\; A^\alpha_\beta([X,Y])\, e_\alpha \\
&=\; \big(\mathrm{d}A^\alpha_\beta(X,Y) + (A^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta)(X,Y)\big)\, e_\alpha \;,
\end{aligned}$$

obtendo a **equação de estrutura**

$$F^\alpha_\beta \;=\; \mathrm{d}A^\alpha_\beta \;+\; A^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta \;. \tag{1.132}$$

Tomando a derivada exterior, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F^\alpha_\beta \;&=\; \mathrm{d}\big(\mathrm{d}A^\alpha_\beta \;+\; A^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta\big) \;=\; \mathrm{d}A^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta \;-\; A^\alpha_\gamma \wedge \mathrm{d}A^\gamma_\beta \\
&=\; \mathrm{d}A^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta \;+\; A^\alpha_\delta \wedge A^\delta_\gamma \wedge A^\gamma_\beta \;-\; A^\alpha_\gamma \wedge \mathrm{d}A^\gamma_\beta \;-\; A^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\delta \wedge A^\delta_\beta \\
&=\; F^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta \;-\; A^\alpha_\gamma \wedge F^\gamma_\beta \;,
\end{aligned}$$

obtendo a **identidade de Bianchi**

$$\mathrm{d}F^\alpha_\beta \;+\; A^\alpha_\gamma \wedge F^\gamma_\beta \;-\; F^\alpha_\gamma \wedge A^\gamma_\beta \;=\; 0 \;, \tag{1.133}$$

a qual pode ser reescrita em termos da derivada exterior covariante d_D correspondente à conexão linear induzida por D em $\mathrm{L}(E)$:

$$\mathrm{d}_D F \;=\; 0 \;. \tag{1.134}$$

Note que os F^α_β são componentes de uma 2-forma F sobre M a valores em $\mathrm{L}(E)$ e que se os A^α_β fossem componentes de uma 1-forma A sobre M a valores em $\mathrm{L}(E)$, então poderíamos escrever as duas equações (1.132) e (1.133) de forma mais curta e sugestiva: em termos da derivada exterior covariante d_A correspondente à conexão linear induzida por D em $\mathrm{L}(E)$, a equação de estrutura seria

$$F \;=\; \mathrm{d}_A A \;\equiv\; \mathrm{d}A + \tfrac{1}{2}\,[A \overset{\wedge}{,} A] \;, \tag{1.135}$$

e a identidade de Bianchi seria

$$\mathrm{d}_A F \;\equiv\; \mathrm{d}F + [A \overset{\wedge}{,} F] \;=\; 0 \;. \tag{1.136}$$

Veremos no próximo capítulo como atribuir um significado rigoroso a essas fórmulas.

O tensor de curvatura também proporciona uma expressão explícita para o quadrado da derivada exterior covariante para formas diferenciais ω a valores em E, em E^* e em $T^p_q E$, a saber,

$$\mathrm{d}_D^2\, \omega^\alpha \;=\; F^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \quad , \quad \mathrm{d}_D^2\, \omega_\beta \;=\; -\,F^\alpha_\beta \wedge \omega_\alpha \;, \tag{1.137}$$

e

$$\mathrm{d}_D^2\, \omega^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \;=\; \sum_{r=1}^{p} F^{\alpha_r}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}\, \alpha\, \alpha_{r+1} \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \;-\; \sum_{s=1}^{q} F^{\beta}_{\beta_s} \wedge \omega^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{s-1}\, \beta\, \beta_{s+1} \dots \beta_q} \,. \tag{1.138}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_D^2\, \omega^{\alpha} &= \mathrm{d}(\mathrm{d}_D \omega^{\alpha}) + A^{\alpha}_{\beta} \wedge \mathrm{d}_D \omega^{\beta} \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^{\alpha}) + \mathrm{d}(A^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}) + A^{\alpha}_{\beta} \wedge \mathrm{d}\omega^{\beta} + A^{\alpha}_{\beta} \wedge A^{\beta}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma} \\
&= (\mathrm{d}A^{\alpha}_{\beta} + A^{\alpha}_{\gamma} \wedge A^{\gamma}_{\beta}) \wedge \omega^{\beta} \\
&= F^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_D^2\, \omega_{\beta} &= \mathrm{d}(\mathrm{d}_D \omega_{\beta}) - A^{\alpha}_{\beta} \wedge \mathrm{d}_D \omega_{\alpha} \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_{\beta}) - \mathrm{d}(A^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega_{\alpha}) - A^{\alpha}_{\beta} \wedge \mathrm{d}\omega_{\alpha} + A^{\alpha}_{\beta} \wedge A^{\gamma}_{\alpha} \wedge \omega_{\gamma} \\
&= -\, (\mathrm{d}A^{\alpha}_{\beta} + A^{\alpha}_{\gamma} \wedge A^{\gamma}_{\beta}) \wedge \omega_{\alpha} \\
&= -\, F^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega_{\alpha} \,,
\end{aligned}$$

sendo que a demonstração da equação (1.138), que é completamente análoga, será deixada ao leitor como exercício. Podemos resumir todas essas fórmulas de maneira sucinta, escrevendo

$$\mathrm{d}_D^2 \omega \;=\; F \wedge \omega \,. \tag{1.139}$$

1.4.2 Tensor de Curvatura no Fibrado Tangente

Novamente, uma situação particular que requer uma atenção especial é a de conexões lineares no fibrado tangente de uma variedade (e seus descendentes). Neste caso, além de usarmos o símbolo ∇, ao invés de D, para denotar derivadas covariantes e o símbolo Γ, ao invés de A, para denotar formas de conexão locais, ainda seguimos a convenção de usar o símbolo R, ao invés de F, para denotar o tensor de curvatura, que é o campo tensorial de tipo $(1,3)$ sobre M definido por

$$R(X,Y) \cdot Z \;=\; (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}) Z \,, \tag{1.140}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, e chamado de **tensor de (curvatura de) Riemann** de ∇ Ademais, existem neste caso dois outros campos tensoriais importantes sobre M. O primeiro é de tipo $(1,2)$, definido por

$$T(X,Y) \;=\; \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \,, \tag{1.141}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e chamado de **tensor de torção** de ∇ De fato, verifica-se, a partir da definição (1.141), que T é $\mathfrak{F}(M)$-bilinear, isto é, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, vale

$$T(fX, gY) \;=\; fg\; T(X,Y) \,.$$

Ademais, é claro que $T(X,Y)$ é antissimétrico em X e Y e portanto T é uma 2-forma sobre M a valores em TM. O segundo é de tipo $(0,2)$, definido por

$$\mathrm{Ric}(X,Y) \;=\; \mathrm{tr}\big(Z \mapsto R(Z,Y) \cdot X\big) \,, \tag{1.142}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e chamado de **tensor de (curvatura de) Ricci** de ∇

Em termos de um referencial local $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ para M, expandimos a ação de T e de R sobre os campos vetoriais do referencial em termos deste mesmo referencial, conforme

$$\begin{array}{lll} T \;=\; T^i \otimes e_i & \text{ou} \quad T(X,Y) \;=\; T^i(X,Y)\, e_i & \text{para } X,Y \in \mathfrak{X}(M)\,, \\ R \cdot e_j \;=\; R^i{}_j \otimes e_i & \text{ou} \quad R(X,Y)\cdot e_j \;=\; R^i{}_j(X,Y)\, e_i & \text{para } X,Y \in \mathfrak{X}(M)\,, \end{array} \tag{1.143}$$

(veja a equação (1.108)), de modo que

$$\begin{array}{lll} T^i \;=\; \langle\, e^i \,,\, T \,\rangle & \text{ou} \quad T^i(X,Y) \;=\; \langle\, e^i \,,\, T(X,Y) \,\rangle & \text{para } X,Y \in \mathfrak{X}(M)\,, \\ R^i{}_j \;=\; \langle\, e^i \,,\, R \cdot e_j \,\rangle & \text{ou} \quad R^i{}_j(X,Y) \;=\; \langle\, e^i \,,\, R(X,Y)\cdot e_j \,\rangle & \text{para } X,Y \in \mathfrak{X}(M)\,, \end{array} \tag{1.144}$$

(veja a equação (1.109)). Então podemos calcular

$$\begin{aligned} T^i(X,Y) \;&=\; \langle\, e^i \,,\, \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \,\rangle \\ &=\; X \cdot (e^i(Y)) \;-\; \langle \nabla_X e^i, Y\rangle \;-\; Y \cdot (e^i(X)) \;+\; \langle \nabla_Y e^i, X\rangle \;-\; \langle e^i, [X,Y]\rangle \\ &=\; \mathrm{d}e^i(X,Y) \;+\; \Gamma^i_j(X)\, e^j(Y) \;-\; \Gamma^i_j(Y)\, e^j(X)\,, \end{aligned}$$

e, como antes,

$$\begin{aligned} R^i{}_j(X,Y) \;&=\; \langle\, e^i \,,\, \nabla_X \nabla_Y e_j - \nabla_Y \nabla_X e_j - \nabla_{[X,Y]} e_j \,\rangle \\ &=\; \langle\, e^i \,,\, \nabla_X\big(\Gamma^k_j(Y)\, e_k\big) \,\rangle \;-\; \langle\, e^i \,,\, \nabla_Y\big(\Gamma^k_j(X)\, e_k\big) \,\rangle \;-\; \langle\, e^i \,,\, \Gamma^k_j([X,Y])\, e_k \,\rangle \\ &=\; X \cdot \Gamma^i_j(Y) \;+\; \Gamma^k_j(Y)\,\langle\, e^i, \nabla_X e_k \,\rangle \;-\; Y \cdot \Gamma^i_j(X) \;-\; \Gamma^k_j(X)\,\langle\, e^i, \nabla_Y e_k \,\rangle \;-\; \Gamma^i_j([X,Y]) \\ &=\; X \cdot \Gamma^i_j(Y) \;-\; Y \cdot \Gamma^i_j(X) \;-\; \Gamma^i_j([X,Y]) \;+\; \Gamma^i_k(X)\,\Gamma^k_j(Y) \;-\; \Gamma^i_k(Y)\,\Gamma^k_j(X) \\ &=\; \mathrm{d}\Gamma^i_j(X,Y) \;+\; \Gamma^i_k(X)\,\Gamma^k_j(Y) \;-\; \Gamma^i_k(Y)\,\Gamma^k_j(X)\,, \end{aligned}$$

obtendo a **primeira equação de estrutura**

$$T^i \;=\; \mathrm{d}e^i \;+\; \Gamma^i_j \wedge e^j\,, \tag{1.145}$$

e a **segunda equação de estrutura**

$$R^i{}_j \;=\; \mathrm{d}\Gamma^i_j \;+\; \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j\,, \tag{1.146}$$

que é um caso especial da anterior (equação (1.132)). Tomando a derivada exterior, calculamos

$$\mathrm{d}T^i \;=\; \mathrm{d}\Gamma^i_j \wedge e^j \;-\; \Gamma^i_j \wedge \mathrm{d}e^j \;=\; \mathrm{d}\Gamma^i_j \wedge e^j \;-\; \Gamma^i_j \wedge T^j \;+\; \Gamma^i_j \wedge \Gamma^j_k \wedge e^k \;=\; R^i{}_j \wedge e^j \;-\; \Gamma^i_j \wedge T^j\,,$$

e, como antes,

$$\mathrm{d}R^i{}_j \;=\; \mathrm{d}\Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j \;-\; \Gamma^i_k \wedge \mathrm{d}\Gamma^k_j \;=\; R^i{}_k \wedge \Gamma^k_j \;-\; \Gamma^i_l \wedge \Gamma^l_k \wedge \Gamma^k_j \;-\; \Gamma^i_k \wedge R^k{}_j \;+\; \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_l \wedge \Gamma^l_j\,,$$

obtendo a **primeira identidade de Bianchi**

$$\mathrm{d}T^i \;+\; \Gamma^i_j \wedge T^j \;=\; R^i{}_j \wedge e^j\,, \tag{1.147}$$

e a **segunda identidade de Bianchi**

$$\mathrm{d}R^i{}_j \;+\; \Gamma^i_k \wedge R^k{}_j \;-\; R^i{}_k \wedge \Gamma^k_j \;=\; 0\,. \tag{1.148}$$

Novamente, os T^i e os $R^i{}_j$ são componentes de 2-formas T e R sobre M a valores em $T^1_0 M = TM$ e em $T^1_1 M = T^*M \otimes TM$, respectivamente, e se os Γ^i_j fossem componentes de uma 1-forma Γ sobre M a valores em $T^1_1 M = T^*M \otimes TM$, então poderíamos escrever as equações (1.145)–(1.148) de forma mais curta e sugestiva: em termos das derivadas exteriores covariantes d_Γ correspondentes à conexão linear ∇ em $T^1_0 M$ e à conexão linear induzida por ∇ em $T^1_1 M$, respectivamente, as equações de estrutura seriam

$$T \;=\; \mathrm{d}_\Gamma e \;\equiv\; \mathrm{d}e + \Gamma \wedge e \;, \tag{1.149}$$

e

$$R \;=\; \mathrm{d}_\Gamma \Gamma \;\equiv\; \mathrm{d}\Gamma + \tfrac{1}{2}\,[\Gamma \overset{\wedge}{,} \Gamma] \;, \tag{1.150}$$

respectivamente, enquanto que as identidades de Bianchi seriam

$$\mathrm{d}_\Gamma T \;\equiv\; \mathrm{d}T + [\Gamma \overset{\wedge}{,} T] \;=\; R \wedge e \;, \tag{1.151}$$

e

$$\mathrm{d}_\Gamma R \;\equiv\; \mathrm{d}R + [\Gamma \overset{\wedge}{,} R] \;=\; 0 \;, \tag{1.152}$$

respectivamente. Veremos no próximo capítulo como atribuir um significado rigoroso a essas fórmulas.

Mais explicitamente ainda, escrevemos

$$T^i_{kl} \;=\; T^i(e_k, e_l) \;, \tag{1.153}$$

$$R^i{}_{jkl} \;=\; R^i{}_j(e_k, e_l) \;. \tag{1.154}$$

Assim,

$$T \;=\; T^i_{kl}\, e_i \otimes e^k \otimes e^l \qquad \text{e} \qquad T^i \;=\; \tfrac{1}{2}\, T^i_{kl}\, e^k \wedge e^l \;, \tag{1.155}$$

$$R \;=\; R^i{}_{jkl}\, e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l \qquad \text{e} \qquad R^i{}_j \;=\; \tfrac{1}{2}\, R^i{}_{jkl}\, e^k \wedge e^l \;. \tag{1.156}$$

Obviamente, temos as propriedades de antissimetria

$$T^i_{lk} \;=\; -\,T^i_{kl} \;, \tag{1.157}$$

$$R^i{}_{jlk} \;=\; -\,R^i{}_{jkl} \;. \tag{1.158}$$

Então a definição de T e R a partir de ∇ pode ser expressa pelas seguinte fórmulas, que determinam os T^i_{kl} e os $R^i{}_{jkl}$ em termos dos símbolos de Christoffel Γ^i_{kl} e dos coeficientes C^i_{kl} que expressam a falta de holonomicidade do referencial usado, definidos por

$$[e_k, e_l] \;=\; C^i_{kl}\, e_i \;, \tag{1.159}$$

a saber:

$$T^i_{kl} \;=\; \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk} - C^i_{kl} \;, \tag{1.160}$$

$$R^i{}_{jkl} \;=\; \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{mj} C^m_{kl} \;. \tag{1.161}$$

Finalmente, escrevemos

$$R_{kl} \;=\; \mathrm{Ric}(e_k, e_l) \;, \tag{1.162}$$

de modo que

$$\mathrm{Ric} \;=\; R_{kl}\, e^k \otimes e^l \;. \tag{1.163}$$

Assim, a definição do tensor de Ricci em termos do tensor de Riemann assume a forma

$$R_{kl} \;=\; R^i{}_{kil}\;. \tag{1.164}$$

Se usarmos um referencial local holônomo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ induzido por um sistema de coordenadas locais x^μ em M, as fórmulas acima simplificam, pois neste caso, as componentes do tensor de torção são simplesmente a parte antissimétrica dos símbolos de Christoffel, e o último termo na expressão para o tensor de Riemann se anula:

$$T_{\kappa\lambda}^{\,\mu} \;=\; \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu}\;, \tag{1.165}$$

$$R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} \;=\; \partial_\kappa \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} - \partial_\lambda \Gamma_{\kappa\nu}^{\mu} + \Gamma_{\kappa\rho}^{\mu}\,\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}\,\Gamma_{\kappa\nu}^{\rho}\;. \tag{1.166}$$

Entre as conexões lineares no fibrado tangente de uma variedade, as mais importantes e úteis são as de torção zero. Se $T = 0$, a primeira identidade de Bianchi (1.147) implica que $R^i{}_m \wedge e^m = 0$, o que (após avaliação sobre três campos vetoriais e_j, e_k e e_l do referencial) se expressa como uma condição de ciclicidade do tensor de Riemann:

$$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} \;=\; 0\;. \tag{1.167}$$

Ademais, se $T = 0$, podemos expressar a derivada exterior comum de uma forma em termos das derivadas covariantes dos seus coeficientes, em vez das suas derivadas parciais, ou seja, vale

$$\mathrm{d}\omega \;=\; e^i \wedge \nabla_i \omega\;. \tag{1.168}$$

A maneira mais simples de provar isso é por um cálculo explícito em coordenadas locais, usando a simetria dos símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{d} \,-\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \nabla_\mu\Big)\left(\frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}\right) \\
&= \;\frac{1}{p!}\,\Big(\partial_\mu \omega_{\mu_1\ldots\mu_p} - \nabla_\mu \omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\Big)\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} \\
&= \;\frac{1}{p!}\,\left(\sum_{r=1}^{p} \Gamma_{\mu\mu_r}^{\kappa}\,\omega_{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\kappa\mu_{r+1}\ldots\mu_p}\right)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} \\
&= \;0\;.
\end{aligned}$$

Usando este resultado, prova-se que a segunda identidade de Bianchi (1.148) se reduz a uma condição de ciclicidade para as derivadas covariantes do tensor de Riemann:

$$\nabla_m R^i{}_{jkl} + \nabla_k R^i{}_{jlm} + \nabla_l R^i{}_{jmk} \;=\; 0\;. \tag{1.169}$$

Felizmente, existe a possibilidade de “matar a torção” ou, mais geralmente, de “modificar a torção”, que pode ser implementada de diversos modos. O mais simples é o seguinte: dada uma variedade M munida de uma conexão linear ∇ com tensor de torção T, define-se uma nova conexão linear ∇^0 por

$$\nabla^0_X Y \;=\; \nabla_X Y \;-\; \frac{1}{2}\,T(X,Y)\;. \tag{1.170}$$

Mais geralmente, dado um campo tensorial T' sobre M de tipo $(1,2)$ que é uma 2-forma sobre M a valores em TM qualquer, define-se uma nova conexão linear ∇' por

$$\nabla'_X Y \;=\; \nabla_X Y \;-\; \frac{1}{2}\,T(X,Y) \;+\; \frac{1}{2}\,T'(X,Y)\;. \tag{1.171}$$

Então pela definição (1.141), é óbvio que ∇^0 tem torção zero e ∇' tem torção T'.

1.4.3 Transporte Paralelo

Um conceito central, que inclusive motiva e justifica o uso do termo "conexão linear" para operadores de diferenciação covariante em fibrados vetoriais, é o de transporte paralelo (de vetores nas fibras) ao longo de curvas na variedade base.

Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade base M munido de uma conexão linear D, e seja $\gamma : I \to M$ uma curva em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. A seguir, denotaremos a derivada comum de γ por $\dot{\gamma}$ ou $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$ e a derivada covariante de uma seção s_γ de E ao longo de γ por $Ds_\gamma/\mathrm{d}t$, utilizando o pull-back γ^*D de D para I via γ; assim:[2]

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma^*TM) \quad , \quad \frac{Ds_\gamma}{\mathrm{d}t} = (\gamma^*D)s_\gamma \in \Gamma(\gamma^*E) \,.$$

Estamos interessados em estudar a condição de que s_γ seja covariantemente constante, isto é:

$$\frac{Ds_\gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \,. \tag{1.172}$$

Em termos de uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E, definida em um aberto U de M, e supondo que $\gamma(I) \subset U$, esta equação assume a forma

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}(s_\gamma)^\alpha(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_\gamma)^\alpha(t) + A^\alpha_\beta(\gamma(t))\big(\dot{\gamma}(t)\big)\,(s_\gamma)^\beta(t) = 0 \,. \tag{1.173}$$

A equação (1.173) é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e portanto, para todo $t \in I$ e todo vetor $u_t \in E_{\gamma(t)}$, existe uma única solução que estende u_t a uma seção de E ao longo de γ que é covariantemente constante. Dizemos então que os vetores assim gerados nas demais fibras de γ^*E são obtidos a partir de u_t por "transporte paralelo ao longo de γ". Como estes vetores dependem linearmente de u_t, o transporte paralelo define, para todo $t, t' \in I$, uma aplicação linear

$$U_\gamma(t', t) : E_{\gamma(t)} \longrightarrow E_{\gamma(t')} \tag{1.174}$$

chamada de operador de **transporte paralelo** de $\gamma(t)$ para $\gamma(t')$ ao longo de γ e caracterizada pela condição de que para qualquer seção s_γ de E ao longo de γ que é covariantemente constante, vale

$$s_\gamma(t') = U_\gamma(t', t) \cdot s_\gamma(t) \,. \tag{1.175}$$

Nota-se que a família de aplicações lineares assim obtida satisfaz às seguintes propriedades: para todo $t, t', t'' \in I$, vale a regra de composição

$$U_\gamma(t'', t')\, U_\gamma(t', t) = U_\gamma(t'', t) \,, \tag{1.176}$$

que, em conjunto com a identidade óbvia

$$U_\gamma(t, t) = \mathrm{id}_{E_{\gamma(t)}} \,, \tag{1.177}$$

implica que $U_\gamma(t', t)$ é de fato um isomorfismo linear e que vale a regra de inversão

$$U_\gamma(t', t)^{-1} = U_\gamma(t, t') \,. \tag{1.178}$$

[2] Aqui, usamos a identificação canônica $\Omega^1(I, \gamma^*E) \cong \Gamma(\gamma^*E)$ que decorre do fato de que $I \subset \mathbb{R}$.

Ademais, usando a equação (1.175), podemos transformar a equação diferencial (1.173) para seções covariantemente constantes em uma equação diferencial matricial para o operador de transporte paralelo que pode ser escrita na forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U_\gamma(s,t)\Big|_{s=t'} \;=\; -A(\gamma(t'))(\dot\gamma(t'))\, U_\gamma(t',t)\;, \tag{1.179}$$

ou ainda, devido à relação (1.178), na forma equivalente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U_\gamma(t',s)\Big|_{s=t} \;=\; U_\gamma(t',t)\, A(\gamma(t))(\dot\gamma(t))\;, \tag{1.180}$$

onde suprimimos os índices matriciais $\alpha, \beta, \ldots$, para simplificar a notação.

Claramente, essa construção pode ser estendida ao caso em que a imagem de γ não está contida no domínio de alguma trivialização local admissível de E, pois podemos escolher uma partição do intervalo I em subintervalos com essa propriedade e usar o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, em conjunto com a regra de composição (1.176), para construir o transporte paralelo ao longo da curva inteira juntando os transportes paralelos ao longo de cada um dos seus segmentos. Devido à regra de composição (1.176), o resultado não depende da partição escolhida; deixaremos os detalhes deste argumento como exercício para o leitor.

De modo geral, o operador de transporte paralelo entre dois pontos depende da curva γ usada para conectá-los, pois o operador de transporte paralelo ao longo de uma curva fechada não é trivial:

1.8 Exemplo Seja M a esfera unitária S^2, considerada como subvariedade do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ (munido do seu produto escalar padrão), e sejam E o fibrado tangente TM e $E^\perp$ o fibrado normal NM de M, ambos considerados como subfibrados vetoriais do fibrado trivial padrão $M\times\mathbb{R}^3$, de modo que temos a decomposição ortogonal $M\times\mathbb{R}^3 = TM\oplus NM$. Para campos vetoriais X e Y sobre M, definimos

$$\nabla_X Y \;=\; \mathrm{pr}_{\|}(X\cdot Y)\;,$$

onde $\mathrm{pr}_{\|}$ denota a projeção ortogonal de $M\times\mathbb{R}^3$ sobre TM, com núcleo NM, e $X\cdot Y$ é a derivada direcional de Y, como função a valores vetoriais, ao longo de X. Verifica-se que ∇ é uma conexão linear em TM: ela é obtida da conexão linear padrão em $M\times\mathbb{R}^3$ por projeção ortogonal. Considere agora o caminho fechado γ em M que se inicia e termina no polo norte $(0,0,1)$ e é composto dos seguintes três trechos: primeiro, um quarto de círculo no plano xz, do polo norte até o equador, segundo, um quarto de círculo ao longo do equador e terceiro, um quarto de círculo no plano yz, do equador até o polo norte. Explicitamente,

$$\gamma(t) \;=\; \left\{\begin{array}{cc} (\sin(\tfrac{3}{2}\pi t), 0, \cos(\tfrac{3}{2}\pi t)) & (0\leqslant t\leqslant \tfrac{1}{3}) \\ (\cos(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{1}{3})), \sin(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{1}{3})), 0) & (\tfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \tfrac{2}{3}) \\ (0, \cos(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{2}{3})), \sin(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{2}{3}))) & (\tfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1) \end{array}\right\}\;,$$

com $\gamma(0)=(0,0,1)$, $\gamma(\tfrac{1}{3})=(1,0,0)$, $\gamma(\tfrac{2}{3})=(0,1,0)$ e $\gamma(1)=(0,0,1)$. Assim, o transporte paralelo de um vetor tangente $(u,v,0)$ no polo norte ao longo de γ é dado por

$$s_\gamma(t) \;=\; \left\{\begin{array}{cc} (\cos(\tfrac{3}{2}\pi t)u, v, -\sin(\tfrac{3}{2}\pi t)u) & (0\leqslant t\leqslant \tfrac{1}{3}) \\ (-\sin(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{1}{3}))v, \cos(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{1}{3}))v, -u) & (\tfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \tfrac{2}{3}) \\ (-v, \sin(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{2}{3}))u, -\cos(\tfrac{3}{2}\pi(t-\tfrac{2}{3}))u) & (\tfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1) \end{array}\right\}\;,$$

com $s(0) = (u, v, 0)$, $s(\frac{1}{3}) = (0, v, -u)$, $s(\frac{2}{3}) = (-v, 0, -u)$ e $s(1) = (-v, u, 0)$, ou seja, o transporte paralelo ao longo da curva fechada γ inteira efetua uma rotação por 90^0 no espaço tangente no polo norte. $\Diamond$

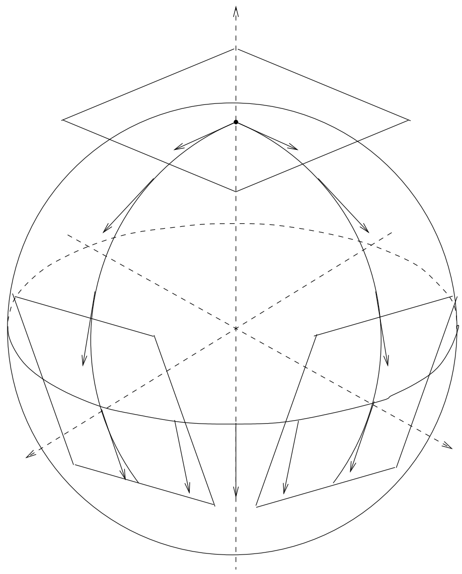


Figura 1.9: Transporte paralelo de vetores tangentes à esfera

A independência do transporte paralelo, entre dois pontos, da curva que os conecta, indica a ausência de curvatura:

1.3 Proposição *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade conexa M, munido de uma conexão linear D. Entre as seguintes afirmações, as primeiras três são equivalentes e implicam a última.*

(a) O transporte paralelo ao longo de qualquer curva depende apenas do seu ponto inicial e do seu ponto final.

(b) Para todo ponto m de M e todo vetor $u \in E_m$, existe uma única seção global s de E que é covariantemente constante e tal que $s(m) = u$.

(c) Existe uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções globais e_α de E que são covariantemente constantes, de modo que as formas de conexão com respeito a esta base se anulam identicamente.

(d) O tensor de curvatura F de D se anula identicamente.

Se M for simplesmente conexa, a última afirmação torna-se equivalente às primeiras três.

De passagem, notamos que as primeiras três afirmações implicam que E, como fibrado vetorial sobre M, deve ser trivial.

Demonstração: A equivalência (a) $\Leftrightarrow$ (b) decorre da equação (1.175), em conjunto com a observação elementar que uma seção s de E é covariantemente constante se e somente se para qualquer curva γ, a seção $s_\gamma = s \circ \gamma$ de γ^*E é covariantemente constante. A equivalência (b) $\Leftrightarrow$ (c) é trivial, assim como a implicação (c) $\Rightarrow$ (d), devido à equação de estrutura (1.132). Assim, a única afirmação a ser provada é a implicação (d) $\Rightarrow$ (c), sob a hipótese adicional de que M seja simplesmente conexa: isso será feito em dois passos. No primeiro passo, consideramos a questão localmente, usando uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E e um sistema de coordenadas locais x^μ em M, junto com o referencial local holônomo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ para M por ele induzido, todos definidos em algum aberto U de M que pelo sistema de coordenadas x^μ é mapeado para um aberto $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$: em termos desses, a condição de uma seção s de E ser covariantemente constante sobre U assume a forma

$$D_\mu s^\alpha \equiv \partial_\mu s^\alpha + A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha} s^\beta = 0 ,$$

ou

$$\partial_\mu s^\alpha = -A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha} s^\beta .$$

Este é um sistema "total" de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem que é dito ser *integrável* quando todo ponto x_0 de $\tilde{U}$ possui uma vizinhança aberta $\tilde{U}_{x_0}$ contida em $\tilde{U}$ tal que, para todo vetor em $\mathbb{R}^r$ com componentes u^α, existe uma única solução s do sistema com componentes s^α tal que $s^\alpha(x_0) = u^\alpha$. Neste caso, diferenciando o referido sistema, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\nu \partial_\mu s^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu s^\alpha = (\partial_\mu A_{\nu\,\beta}^{\;\alpha})\, s^\beta + A_{\nu\,\beta}^{\;\alpha}\, \partial_\mu s^\beta - (\partial_\nu A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha})\, s^\beta - A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha}\, \partial_\nu s^\beta \\ &= (\partial_\mu A_{\nu\,\beta}^{\;\alpha})\, s^\beta - A_{\nu\,\beta}^{\;\alpha} A_{\mu\,\delta}^{\;\beta} s^\delta - (\partial_\nu A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha})\, s^\beta + A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha} A_{\nu\,\delta}^{\;\beta} s^\delta = F_{\mu\nu\,\beta}^{\;\;\alpha} s^\beta , \end{aligned}$$

onde

$$F_{\mu\nu\,\beta}^{\;\;\alpha} = \partial_\mu A_{\nu\,\beta}^{\;\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha} + A_{\mu\,\gamma}^{\;\alpha} A_{\nu\,\beta}^{\;\gamma} - A_{\nu\,\gamma}^{\;\alpha} A_{\mu\,\beta}^{\;\gamma} ,$$

e portanto é claro que uma condição necessária para ele ser integrável é que as funções $F_{\mu\nu\,\beta}^{\;\;\alpha}$ sobre $\tilde{U}$, que são exatamente as componentes do tensor de curvatura da conexão linear D, se anulam. Reciprocamente, o *teorema de Frobenius* [DIE] afirma que essa condição também é suficiente. No segundo passo, vamos globalizar este resultado. Acabamos de provar que a condição $F \equiv 0$ implica que qualquer ponto m de M possui uma vizinhança aberta U_m sobre a qual existe uma base de seções de E que são covariantemente constantes. Seja então $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os abertos U de M com essa propriedade, ou seja: um aberto U de M pertence a $\mathcal{U}$ se e somente se existe uma base de seções de E sobre U que são covariantemente constantes. É claro que $\mathcal{U}$ é parcialmente ordenado por inclusão. Ademais, qualquer cadeia monotonamente crescente de elementos de $\mathcal{U}$ possui um máximo, que é simplesmente a união de todos os membros da cadeia. Portanto, pelo *lema de Zorn*, $\mathcal{U}$ possui elementos maximais. Seja U um tal elemento maximal de $\mathcal{U}$; queremos provar que $U = M$. De fato, suponhamos por absurdo que $U \neq M$ e que $m \in M \setminus U$. Mas mesmo este ponto de M possui uma vizinhança aberta U_m sobre a qual existe uma base de seções de E que são covariantemente constantes, e como $m \notin U$, podemos supor sem perda de generalidade que $U \cap U_m = \emptyset$. Mas então $U \cup U_m \in \mathcal{U}$, contrariando a maximalidade de U. □

1.17 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M munido de uma conexão linear D. Para todo ponto m de M, defina o conjunto dos **laços** em M baseados em m por

$$\Omega(M,m) = \{\, \gamma : I \to M \text{ curva em } M \mid \gamma(0) = m = \gamma(1) \,\} ,$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo $[0,1]$. O **grupo de holonomia** de D em m é o subgrupo do grupo geral linear $\mathrm{GL}(E_m)$ dado por

$$\mathrm{Hol}_m(D) = \{\, U_\gamma(1,0) \mid \gamma \in \Omega(M,m) \,\} .$$

Para quaisquer dois pontos m e m' na mesma componente conexa de M, podemos escolher uma curva $\gamma : I \to M$ qualquer, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo $[0,1]$, tal que $\gamma(0) = m$ e $\gamma(1) = m'$, e considerar o isomorfismo linear

$$U_\gamma(1,0) : E_m \to E_{m'}$$

que induz um isomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E_m) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E_{m'}) \\ A & \longmapsto & U_\gamma(1,0)\, A\, U_\gamma(1,0)^{-1} \end{array}$$

que transforma $\mathrm{Hol}_m(D)$ em $\mathrm{Hol}_{m'}(D)$. Neste sentido, podemos afirmar que os grupos de holonomia em diferentes pontos da (mesma componente conexa da) variedade base são todos conjugados.

Finalmente, como mais um conceito importante, introduzimos uma primeira versão da noção de levantamento horizontal que, entre outras coisas, é importante para entender como a teoria das conexões lineares discutida neste capítulo se enquadra na teoria das conexões gerais, a ser apresentada no próximo.

1.18 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M, com projeção $\pi : E \to M$, munido de uma conexão linear D. Considere o pull-back $\pi^* TM$ do fibrado tangente TM de M para E via π, cujos pontos são pares $(u, v) \in E \times TM$ tais que $u \in E_m$ e $v \in T_m M$ para algum ponto m de M (veja a equação (1.75)), sendo que o diagrama comutativo (1.76) assume a seguinte forma:[3]

$$\begin{tikzcd} \pi^* TM \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & TM \arrow[d, "\tau_M"] \\ E \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd} \tag{1.181}$$

O **levantamento horizontal** associado a D é o homomorfismo estrito $\Gamma_D : \pi^*(TM) \to TE$ de fibrados vetoriais sobre E definido da seguinte forma: para $m \in M$, $u \in E_m$ e $v \in T_m M$, seja $\gamma : I \to M$ uma curva em M passando por m tal que $\dot{\gamma}(0) = v$, e seja s_γ a seção covariantemente constante de E ao longo de γ tal que $s_\gamma(0) = u$; então considerando s_γ como curva em E passando por u, $s_\gamma : I \to E$, pomos $\Gamma_D(u, v) = \dot{s}_\gamma(0)$. Assim, temos os seguintes dois diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} \pi^* TM \arrow[rr, "\Gamma_D"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & TE \arrow[dl, "\tau_E"] \\ & E & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi^* TM \arrow[rr, "\Gamma_D"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & TE \arrow[dl, "T\pi"] \\ & TM & \end{tikzcd} \tag{1.182}$$

Além disso, Γ_D é "homogêneo" no seguinte sentido: se para $s > 0$, denotarmos por $\mu_s : E \to E$ a multiplicação por s nas fibras de E e por $T\mu_s : TE \to TE$ sua aplicação tangente, então vale

$$\Gamma_D(su, v) \;=\; T\mu_s\big(\Gamma_D(u, v)\big)\,. \tag{1.183}$$

[3]Como conjunto, $\pi^* TM$ coincide com a soma direta $E \oplus TM$ de E e TM e, antecipando a terminologia a ser introduzida na Definição 2.6, também com o produto fibrado $E \times_M TM$ de E e TM sobre M. Porém, no contexto da presente discussão, o que importa não é a estrutura de fibrado (vetorial ou geral) sobre M e sim a de fibrado vetorial sobre E, pois é em relação a esta que o levantamento horizontal é linear ao longo das fibras.

Para verificar que o resultado da construção de $\Gamma_D(u,v)$ não depende da curva γ usada para representar o vetor tangente v e que a aplicação Γ_D assim definida é de fato diferenciável, linear no segundo argumento (quando o primeiro for fixo) e ainda satisfaz a condição de homogeneidade (1.183), basta considerar a expressão local de Γ_D em termos de uma base $\{e_1,\ldots,e_r\}$ de seções locais e_α de E e um sistema de coordenadas locais x^μ em M, ambos definidos em algum aberto U de M, que juntos definem um sistema de coordenadas locais (x^μ, y^α) de E, este definido no aberto $\pi^{-1}(U)$ de E: escrevendo

$$\Gamma_D(u,v) \;=\; \Gamma_D(u,v)^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_D(u,v)^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \;,$$

e observando que isso implica que, para $s>0$,

$$T\mu_s(\Gamma_D(u,v)) \;=\; \Gamma_D(u,v)^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + s\,\Gamma_D(u,v)^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \;,$$

temos, devido ao fato de que $\pi \circ s_\gamma = \gamma$,

$$\Gamma_D(u,v)^\mu \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, s_\gamma(t)^\mu \Big|_{t=0} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \gamma(t)^\mu \Big|_{t=0} \;=\; v^\mu \;,$$

enquanto que, devido à equação (1.173),

$$\Gamma_D(u,v)^\alpha \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, s_\gamma(t)^\alpha \Big|_{t=0} \;=\; -\,A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha}(\gamma(t))\,(\dot\gamma(t))\,(s_\gamma)^\beta(t) \Big|_{t=0} \;=\; -\,A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha}(m)\,v^\mu u^\beta \;,$$

de modo que a referida expressão local é a seguinte:

$$\Gamma_D\Big(u^\alpha e_\alpha\,,\, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) \;=\; v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_{\mu\,\beta}^{\;\alpha}\, u^\beta \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) . \tag{1.184}$$

1.4.4 Transporte Paralelo no Fibrado Tangente

Mais uma vez, a situação especial de conexões lineares no fibrado tangente de uma variedade (e seus descendentes) merece uma atenção especial. Neste caso, podemos reformular e complementar os enunciados da Proposição 1.3 como segue.

1.4 Proposição *Seja M uma variedade conexa munida de uma conexão linear ∇. Entre as seguintes afirmações, as primeiras três são equivalentes e implicam a última.*

(a) O transporte paralelo ao longo de qualquer curva depende apenas do seu ponto inicial e do seu ponto final.

(b) Para todo ponto m de M e todo vetor tangente $v_m \in T_mM$, existe um único campo vetorial X sobre M que é covariantemente constante e tal que $X(m) = v_m$.

(c) Existe um referencial $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de campos vetoriais globais e_i sobre M que são covariantemente constantes, de modo que as formas de Christoffel com respeito a este referencial se anulam identicamente.

(d) O tensor de Riemann R de ∇ se anula identicamente.

Além disso, entre as seguintes afirmações, a primeira implica a segunda.

(e) *Existe um sistema de coordenadas globais x^μ para M que são covariantemente constantes, de modo que os símbolos de Christoffel com respeito ao referencial holônomo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ induzido por este sistema de coordenadas se anulam identicamente.*

(f) *O tensor de Riemann R e o tensor de torção T de ∇ se anulam identicamente.*

Se M for simplesmente conexa, as afirmações (a)-(c) tornam-se equivalentes à afirmação (d), e a afirmação (e) torna-se equivalente à afirmação (f).

De passagem, notamos que a afirmação (e) implica que a variedade M deve ser trivial, isto é, difeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$, enquanto que as afirmações (a)-(c) implicam tão somente que o fibrado tangente TM de M, como fibrado vetorial sobre M, deve ser trivial: neste caso, diz-se que a variedade M é **paralelizável.** Para ilustrar que a propriedade de ser paralelizável é substancialmente mais fraca do que a de ser trivial, basta observar que todo grupo de Lie conexo é paralelizável, mas obviamente nem todo grupo de Lie conexo é trivial como variedade (considere, por exemplo, $SU(2) \cong S^3$).

Demonstração: A implicação (e) $\Rightarrow$ (f) é trivial, devido às equações de estrutura (1.145) e (1.146), aplicadas ao referencial holônomo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ e seu referencial dual $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$. Assim, a única afirmação a ser provada é a implicação (f) $\Rightarrow$ (e), sob a hipótese adicional de que M seja simplesmente conexa. Mas já sabemos que neste caso, vale a implicação (d) $\Rightarrow$ (c), afirmando que existe um referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de campos vetoriais globais e_i sobre M, com referencial dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de 1-formas globais e^i sobre M, que são covariantemente constantes, de modo que as formas de Christoffel Γ^i_j com respeito a este referencial se anulam identicamente. Aplicando a primeira equação de estrutura (1.145), concluímos que a hipótese de que o tensor de torção se anule implica $\mathrm{d}e^i = 0$. Mas M sendo simplesmente conexa, vale $\pi_1(M) = \{0\}$ e portanto $H_1(M) = \{0\}$; logo, existem funções globais x^i sobre M tais que $e^i = \mathrm{d}x^i$ e $e_i = \partial/\partial x^i$. □

A escolha de uma conexão linear numa variedade, por si só, permite definir a noção de geodésicas e de campos vetoriais autoparalelos ao longo de curvas (geodésicas ou não). Para isso, lembramos que se M é uma variedade munida de uma conexão linear ∇ e $\gamma : I \to M$ é uma curva em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, podemos considerar o fibrado vetorial $\gamma^* TM$ sobre I que é o pull-back do fibrado tangente TM de M para I via γ e cujas seções são chamadas de campos vetoriais sobre M ao longo de γ, incluindo como exemplo principal a própria derivada $\dot{\gamma}$ de γ, e observamos que ele vem munido da conexão linear $\gamma^*\nabla$ que é o pull-back da conexão linear ∇ em TM para I via γ.

1.19 Definição Seja M uma variedade munida de uma conexão linear ∇, e seja $\gamma : I \to M$ uma curva em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Um campo vetorial ξ sobre M ao longo de γ é chamado **autoparalelo** se é covariantemente constante sob $\gamma^*\nabla$, ou seja, se

$$(\gamma^*\nabla)\xi \;=\; 0\,. \tag{1.185}$$

A curva γ é chamada **geodésica** se a sua derivada $\dot{\gamma}$ é autoparalela, ou seja, se

$$(\gamma^*\nabla)\dot{\gamma} \;=\; 0\,. \tag{1.186}$$

Em termos de um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para M, a equação (1.185) toma a forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\xi^i(t) \;+\; \Gamma^i_{kl}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}^k(t)\,\xi^l(t) \;=\; 0\,, \tag{1.187}$$

que, para uma curva γ fixa, é um sistema linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para as componentes ξ^i de ξ, enquanto que a equação (1.186) toma a forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\dot{\gamma}^i(t) \;+\; \Gamma^i_{kl}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}^k(t)\,\dot{\gamma}^l(t) \;=\; 0\;, \tag{1.188}$$

mas se usarmos um referencial local holônomo $\{\,\partial_1, \ldots, \partial_n\,\}$ induzido por um sistema de coordenadas locais x^μ em M, ela toma a forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma^\mu}{\mathrm{d}t^2}(t) \;+\; \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}(\gamma(t))\,\frac{\mathrm{d}\gamma^\kappa}{\mathrm{d}t}(t)\,\frac{\mathrm{d}\gamma^\lambda}{\mathrm{d}t}(t) \;=\; 0\;, \tag{1.189}$$

que é um sistema quase-linear de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem para as componentes γ^μ de γ. Observe que essa equação mostra que geodésicas independem de torção, no sentido de que a equação geodésica para uma conexão linear ∇ é a mesma que para qualquer uma das conexões lineares ∇' modificadas conforme a equação (1.171).

1.4.5 Fluxo Geodésico e Aplicação Exponencial

Dada uma variedade M munida de uma conexão linear ∇, a expressão (1.189) da equação geodésica em coordenadas locais mostra que se trata de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que, obviamente, pode ser convertido em um sistema maior de equações diferenciais de primeira ordem. Tal conversão pode de fato ser efetuada de maneira global, levando à introdução de um certo campo vetorial X_∇ sobre o fibrado tangente TM de M e à reinterpretação das soluções da equação geodésica como projeções, de TM para M, das curvas integrais de X_∇.

Para exibir a definição de X_∇, introduzimos o **fibrado tangente de segunda ordem** de M, denotado por T^2M, que pode ser definido de duas maneiras: ou por iteração, i.e., em termos do fibrado tangente iterado $T(TM)$ de M, ou diretamente, usando classes de equivalência de curvas tangentes até segunda ordem, sendo que esta pode ser generalizada de forma imediata para construir o **fibrado tangente de ordem** k de M, denotado por T^kM, onde k é qualquer inteiro.

A primeira alternativa consiste em definir T^2M como o subfibrado do fibrado tangente iterado $T(TM)$ de M dado por

$$T^2M \;=\; \{\,u \in T(TM) \mid T\tau_M(u) = \tau_{TM}(u)\,\}\;, \tag{1.190}$$

onde $\tau_M : TM \to M$ é a projeção tangente canônica para M, $T\tau_M : T(TM) \to TM$ é sua aplicação tangente e $\tau_{TM} : T(TM) \to TM$ é a projeção tangente canônica para TM. Denotando a restrição comum de $T\tau_M$ e de τ_{TM} a T^2M por τ_M^2, podemos representar a situação pelo famoso diagrama do losango do fibrado tangente duplo e seu "colapso":

$$\begin{tikzcd}
& T(TM) \arrow[dl, "\tau_{TM}"'] \arrow[dr, "T\tau_M"] & & \supset & T^2M \arrow[d, "\tau_M^2"'] \\
TM \arrow[dr, "\tau_M"'] & & TM \arrow[dl, "\tau_M"] & = & TM \arrow[d, "\tau_M"'] \\
& M & & = & M
\end{tikzcd} \tag{1.191}$$

Então dizemos que um campo vetorial sobre TM que toma valores em T^2M define uma *equação diferencial de segunda ordem* em M, porque esta é a condição necessária e suficiente para garantir que suas curvas integrais em TM são obtidas como derivadas $\dot{\gamma}$ de curvas γ em M. (Isso segue do fato de que se $\beta : I \to TM$ é uma curva em TM, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e se $\gamma : I \to M$ é sua projeção para M, $\gamma = \tau_M \circ \beta$; então denotando por $\dot{\beta} : I \to T(TM)$ e $\dot{\gamma} : I \to TM$ suas respectivas derivadas, temos $\tau_{TM} \circ \dot{\beta} = \beta$ e $T\tau_M \circ \dot{\beta} = \dot{\gamma}$.)

A construção direta de $T^k M$, para qualquer inteiro k, procede da seguinte forma. Se M é uma variedade n-dimensional e m é um ponto fixo de M, duas curvas γ_1 e γ_2 que passam por m, i.e., que satisfazem a condição $\gamma_1(0) = m = \gamma_2(0)$, são ditas **tangentes até ordem** k em m se, para alguma carta $(U, x, \tilde{U})$ de M em torno de m, as curvas $x \circ \gamma_1$ e $x \circ \gamma_2$ em $\tilde{U}$, que então satisfazem a condição $x(\gamma_1(0)) = 0 = x(\gamma_2(0))$, são tangentes até ordem k na origem, i.e, se vale

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(\gamma_1(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(\gamma_2(t)) \Big|_{t=0} \qquad \text{para } 1 \leqslant l \leqslant k \,. \tag{1.192}$$

Como no caso $k = 1$, essa propriedade não depende da escolha da carta, pois aplicando a regra da cadeia em conjunto com a regra do produto, podemos mostrar por indução que, dada uma curva qualquer γ em M passando por m e qualquer outra carta $(U', x', \tilde{U}')$ de M em torno de m, as derivadas das funções $x'^{\kappa} \circ \gamma$ de qualquer ordem k em $t = 0$ são somas de produtos das derivadas das funções $x^{\mu} \circ \gamma$ de ordem $\leqslant k$ em $t = 0$, com coeficientes que são combinações numéricas das derivadas parciais das variáveis x'^{κ} em relação às variáveis x^{μ} de ordem $\leqslant k$ na origem de $\mathbb{R}^n$, e portanto a validade da equação (1.192) implica a validade da mesma equação com x^{μ} substituído por x'^{κ}. Explicitamente, temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x'^{\kappa}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}(0) \, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x^{\mu}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \\ &\quad + \frac{\partial^2 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}(0) \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^{\mu}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^{\nu}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \,. \end{aligned} \tag{1.193}$$

Obviamente, a relação de tangência entre curvas até ordem k assim definida é uma relação de equivalência, e denotamos por $T^k M$ o conjunto de classes de equivalência assim definido, com a projeção óbvia $\tau_M^k : T^k M \to M$. Porém, para $k > 1$, não é adequado chamar as correspondentes classes de equivalência de "vetores tangentes de ordem k", uma vez que – ao contrário da lei de transformação (1.5) – a lei de transformação para derivadas superiores (veja, por exemplo, a equação (1.193)) não é linear e portanto não é possível introduzir uma estrutura de espaço vetorial no conjunto dessas classes de equivalência que seja independente da escolha do sistema de coordenadas locais. Isso significa que, para $k > 1$, $T^k M$ – ao contrário de TM – não é um fibrado vetorial sobre M e portanto sua estrutura como fibrado só pode ser entendida por completo no contexto da teoria de fibrados gerais a ser desenvolvida no próximo capítulo.

1.20 Definição Seja M uma variedade munida de uma conexão linear ∇. O **campo geodésico** associado a ∇ é o campo vetorial X_{∇} sobre TM obtido como a composição da aplicação diagonal

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & \tau_M^* TM \\ v & \longmapsto & (v, v) \end{array}$$

com o levantamento horizontal $\Gamma_{\nabla} : \tau_M^* TM \to T(TM)$ associado a ∇, introduzido na Definição 1.18, e o **fluxo geodésico** associado a ∇ é a aplicação diferenciável $F_{X_{\nabla}} : \mathcal{D}_{X_{\nabla}} \to M$ obtida como a composição do fluxo $Fl_{X_{\nabla}} : \mathcal{D}_{X_{\nabla}} \to TM$ de X_{∇} no sentido usual com a projeção $\tau_M : TM \to M$, sendo que $\mathcal{D}_{X_{\nabla}}$ denota o domínio maximal de ambos – um aberto de $\mathbb{R} \times TM$ contendo $\{0\} \times TM$.

Falar no fluxo geodésico na variedade M, e não no fibrado tangente TM de M, se justifica pelo fato de que combinando os dois diagramas comutativos na equação (1.182), segue que o campo geodésico toma valores em T^2M,

$$\tau_{TM} \circ X_\nabla \;=\; T\tau_M \circ X_\nabla \;, \tag{1.194}$$

e portanto ele define uma equação diferencial de segunda ordem em M, que é justamente a equação geodésica (1.186). Em outras palavras, como vimos acima, as curvas integrais β de X_∇ em TM satisfazem $\beta = \dot{\gamma}$ onde $\gamma = \tau_M \circ \beta$, o que significa que o fluxo Fl_{X_∇} pode ser reconstruído a partir do fluxo F_{X_∇}:

$$Fl_{X_\nabla}(t,v) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{X_\nabla}(s,v)\Big|_{s=t} \;. \tag{1.195}$$

Além disso, a condição de homogeneidade (1.183), em conjunto com a linearidade de Γ_∇ na segunda variável, implica que o campo geodésico satisfaz a seguinte condição de homogeneidade:

$$X_\nabla(sv) \;=\; s\,T\mu_s\big(X_\nabla(v)\big) \;. \tag{1.196}$$

A importância desta propriedade reside no fato de que ela constitui a condição necessária e suficiente para a invariância do fluxo geodésico sob reparametrizações constantes, ou seja, a afirmação de que para qualquer curva $\gamma : I \to M$ em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e todo $s > 0$, a curva reparametrizada $\gamma_s : I_s \to M$, onde $I_s = s^{-1}I = \{\, t \in \mathbb{R} \mid st \in I \,\}$ e $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ para $t \in I_s$, é curva integral de X_∇ se e somente se γ for curva integral de X_∇, e então, obviamente, vale $\dot{\gamma}_s(t) = s\,\dot{\gamma}(st)$.[4] Em termos do fluxo geodésico, isso significa que

$$(st,v) \in \mathcal{D}_{X_\nabla} \iff (t,sv) \in \mathcal{D}_{X_\nabla} \qquad \text{e neste caso} \qquad F_{X_\nabla}(st,v) \;=\; F_{X_\nabla}(t,sv) \;. \tag{1.197}$$

Portanto, é conveniente introduzir um aberto $\mathcal{D}_\nabla$ de TM pondo

$$\mathcal{D}_\nabla \;=\; \{\, v \in TM \mid (1,v) \in \mathcal{D}_{X_\nabla} \,\} \;, \tag{1.198}$$

ou seja: $\mathcal{D}_\nabla$ é o aberto[5] de TM formado pelos vetores tangentes v tais que a geodésica passando por $m = \tau_m(v)$ e com velocidade inicial v é bem definida até (pelo menos) o valor 1 do seu parâmetro, e portanto podemos definir uma aplicação diferenciável $\exp_\nabla : \mathcal{D}_\nabla \to M$ por

$$\exp_\nabla(v) \;=\; F_{X_\nabla}(1,v) \qquad \text{para } v \in \mathcal{D}_\nabla \;. \tag{1.199}$$

Reciprocamente, a partir de $\mathcal{D}_\nabla$ e $\exp_\nabla$, recuperamos $\mathcal{D}_{X_\nabla}$ e F_{X_∇}, usando a equação (1.197), pois

$$\mathcal{D}_{X_\nabla} \;=\; \{\, (t,v) \in \mathbb{R} \times TM \mid tv \in \mathcal{D}_\nabla \,\} \;, \tag{1.200}$$

e

$$F_{X_\nabla}(t,v) \;=\; \exp_\nabla(tv) \qquad \text{para } (t,v) \in \mathcal{D}_{X_\nabla} \;. \tag{1.201}$$

1.21 Definição Seja M uma variedade munida de uma conexão linear ∇. A **exponencial** associada a ∇ é a aplicação diferenciável $\exp_\nabla : \mathcal{D}_\nabla \to M$ construído acima, com domínio maximal $\mathcal{D}_\nabla$ que é uma vizinhança aberta da seção zero em TM. Dizemos que M é **geodesicamente completa** se $\mathcal{D}_\nabla = TM$, i.e., qualquer geodésica é definida para qualquer valor do seu parâmetro.

[4]Notamos, de passagem, que um campo vetorial sobre TM satisfazendo as duas condições (1.194) e (1.196) é chamado de "spray", e portanto também se usa a expressão "spray geodésico", ao invés de "campo geodésico".

[5]Reescrevendo a definição de $\mathcal{D}_\nabla$ na forma $\mathcal{D}_\nabla = i_1^{-1}(\mathcal{D}_{X_\nabla})$, onde $i_1 : TM \to \mathbb{R} \times TM$ é a inclusão dada por $i_1(v) = (1,v)$, que é contínua, concluímos que $\mathcal{D}_\nabla$ é aberto em TM, pois $\mathcal{D}_{X_\nabla}$ é aberto em $\mathbb{R} \times TM$.

1.5 Conexões Pseudo-Riemannianas

1.5.1 Métricas Pseudo-Riemannianas

1.22 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M. Uma **métrica nas fibras** de E, ou simplesmente **métrica** em E, é uma seção g do fibrado vetorial $\bigvee^2 E^*$ sobre M que é não-degenerada, isto é, para todo ponto m de M, o valor de g em m, que denotaremos por g_m, é uma forma bilinear simétrica sobre E_m que é não-degenerada no sentido usual:

$$g_m(u_m, u'_m) = 0 \quad \text{para todo} \quad u'_m \in E_m \qquad \Longrightarrow \qquad u_m = 0 \,. \tag{1.202}$$

Uma **métrica** em M é uma métrica no fibrado tangente TM de M.

1.5.1 Observação Infelizmente, nas áreas de geometria e topologia, a palavra "métrica" costuma ser usada em dois sentidos diferentes. Portanto, quando há perigo de confusão, podemos substituir o termo "métrica" como definido acima pela expressão "**tensor métrico**" e o termo "métrica" como usado na definição de um "espaço métrico" pela expressão "**função distância**".

Em qualquer ponto m de M e em relação a qualquer base do espaço vetorial E_m, a forma bilinear simétrica g_m será representada por uma matriz simétrica não-singular que, conforme o *teorema de Sylvester*, pode através de uma mudança de base ser colocada na sua forma padrão

$$\eta = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}, \tag{1.203}$$

onde 1_k denota a matriz identidade $(k \times k)$. Obviamente, se a variedade base M for conexa, os números p e q, além de serem sujeitos à condição $p + q = r$ onde r é o posto de E, não dependem de m, pois por hipótese são funções contínuas de m a valores inteiros. Assim, o par (p, q) é um invariante da métrica g, chamado a sua **assinatura**, e dizemos que g é

- **pseudo-riemanniana**[6] no caso geral de assinatura (p, q) qualquer;
- **riemanniana** quando $p=0, q=r$ ou $p=r, q=0$;
- **lorentziana** quando $p=1, q=r-1$ ou $p=r-1, q=1$.

Vetores $u_m \in E_m$ tais que $g_m(u_m, u_m) = 0$, mas $u_m \neq 0$, são chamados de **tipo luz**. Obviamente, no caso riemanniano, tais vetores não existem. No caso lorentziano, ainda dizemos que vetores $u_m \in E_m$ são **tipo tempo** se $g_m(u_m, u_m) > 0$ (caso $p=1, q=r-1$) ou $g_m(u_m, u_m) < 0$ (caso $p=r-1, q=1$), são **tipo espaço** se $g_m(u_m, u_m) < 0$ (caso $p=1, q=r-1$) ou $g_m(u_m, u_m) > 0$ (caso $p=r-1, q=1$) e são **causais** se $g_m(u_m, u_m) \geqslant 0$ (caso $p=1, q=r-1$) ou $g_m(u_m, u_m) \leqslant 0$ (caso $p=r-1, q=1$), ou seja, se não são tipo espaço.

[6] Alguns autores preferem o prefixo "semi-", em vez de "pseudo-". Nós não seguimos essa convenção, tendo em vista que o prefixo "semi-" já é amplamente usado num contexto diferente, por exemplo em análise funcional, onde indica funções que ainda são positivas (ou negativas), porém possivelmente degeneradas, como acontece no caso do conceito fundamental de uma seminorma.

Notamos que, devido à sua não-degenerescência, uma métrica g em E induz um isomorfismo estrito de fibrados vetoriais entre E e o seu dual E^*, que será denotado por

$$.^\flat : E \longrightarrow E^* . \tag{1.204}$$

Explicitamente. ele é definido por

$$u_m^\flat = g_m(u_m, .) \quad \text{para } u_m \in E_m , \tag{1.205}$$

ou mais explicitamente ainda, por

$$\langle u_m^\flat , u'_m \rangle = g_m(u_m, u'_m) \quad \text{para } u_m, u'_m \in E_m , \tag{1.206}$$

e seu inverso será denotado por

$$.^\sharp : E^* \longrightarrow E . \tag{1.207}$$

A mesma notação será usada para os isomorfismos correspondentes entre espaços de seções de E e de E^* (como módulos sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$ das funções diferenciáveis sobre M):

$$.^\flat : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E^*) . \tag{1.208}$$

$$.^\sharp : \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E) . \tag{1.209}$$

Segue que existe uma única métrica em E^*, que novamente será denotada por g, tal que $.^\flat$ e $.^\sharp$ são isométricos. Mais geralmente, notamos que, assim como conexões lineares, métricas se comportam naturalmente em relação aos funtores introduzidos na Seção 1.2.3. Em particular, uma métrica em um fibrado vetorial induz métricas em todos os seus descendentes, que a seguir serão coletivamente denotadas pela mesma letra, afim de simplificar a notação.

A maneira mais fácil de descrever essa construção é em termos de expressões locais, retomando a abordagem adotada na Seção 1.3.4. Por exemplo, se expandirmos a métrica g em E em termos de uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E, conforme a equação (1.69) com $(p,q) = (0,2)$, ou seja, se escrevermos

$$g = g_{\alpha\beta}\, e^\alpha \otimes e^\beta \quad \text{com} \quad g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta) , \tag{1.210}$$

então concluímos que

$$e_\alpha^\flat = g_{\alpha\beta}\, e^\beta , \tag{1.211}$$

e mais geralmente, que para as componentes s^α de uma seção local s de E qualquer e as componentes s_α da seção local correspondente $s^\flat$ de E^*, ambas definidos conforme a equação (1.68), vale o mesmo tipo de fórmula,

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\, s^\beta , \tag{1.212}$$

pois para todo γ,

$$\langle e_\alpha^\flat, e_\gamma \rangle = g(e_\alpha, e_\gamma) = g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}\, \delta^\beta_\gamma = g_{\alpha\beta}\, \langle e^\beta, e_\gamma \rangle = \langle g_{\alpha\beta}\, e^\beta, e_\gamma \rangle ,$$

e de modo análogo,

$$s_\alpha = s_\beta\, \delta^\beta_\alpha = s_\beta\, \langle e^\beta, e_\alpha \rangle = \langle s^\flat, e_\alpha \rangle = g(s, e_\alpha) = s^\beta\, g(e_\beta, e_\alpha) = g_{\alpha\beta}\, s^\beta .$$

Portanto, se expandirmos a métrica g em E^* em termos da base dual $\{e^1, \ldots, e^r\}$ de seções locais e^α de E^*, conforme a equação (1.69) com $(p,q) = (2,0)$, ou seja, se escrevermos

$$g = g^{\alpha\beta}\, e_\alpha \otimes e_\beta \quad \text{com} \quad g^{\alpha\beta} = g(e^\alpha, e^\beta) , \tag{1.213}$$

então concluímos que a matriz $(g^{\alpha\beta})$ é a inversa da matriz $(g_{\alpha\beta})$, pois a métrica em E^* é definida por $g(s^\flat, s'^\flat) = g(s,s')$, implicando que

$$g_{\alpha\beta} \;=\; g(e_\alpha, e_\beta) \;=\; g(e_\alpha^\flat, e_\beta^\flat) \;=\; g\big(g_{\alpha\gamma}\, e^\gamma, g_{\beta\delta}\, e^\delta\big) \;=\; g_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\delta}\, g_{\delta\beta}\;.$$

Assim, concluímos que

$$(e^\alpha)^\sharp \;=\; g^{\alpha\beta}\, e_\beta\;, \tag{1.214}$$

e mais geralmente, que para as componentes s_α de uma seção local s^* de E^* qualquer e as componentes s^α da seção local correspondente $(s^*)^\sharp$ de E, ambas definidos conforme a equação (1.68), vale o mesmo tipo de fórmula,

$$s^\alpha \;=\; g^{\alpha\beta}\, s_\beta\;. \tag{1.215}$$

Agora se expandirmos seções locais s, s' de E, $s^*, s^{*\prime}$ de E^*, t, t' de $T^p_q E$ e ω, ω' de $\bigwedge^p E^*$ conforme as equações (1.68)–(1.70), obtemos as seguintes expressões para as funções locais obtidas como produto escalar entre elas:[7]

$$g(s,s') \;=\; g_{\alpha\beta}\, s^\alpha\, s'^\beta \quad , \quad g(s^*, s^{*\prime}) \;=\; g^{\alpha\beta}\, s_\alpha\, s'_\beta\;, \tag{1.216}$$

$$g(t,t') \;=\; g_{\alpha_1\gamma_1} \ldots\, g_{\alpha_p\gamma_p}\, g^{\beta_1\delta_1} \ldots\, g^{\beta_q\delta_q}\; t^{\alpha_1\ldots\,\alpha_p}_{\beta_1\ldots\,\beta_q}\; t'^{\gamma_1\ldots\,\gamma_p}_{\delta_1\ldots\,\delta_q}\;, \tag{1.217}$$

e

$$g(\omega,\omega') \;=\; \left(\frac{1}{p!}\right)^2 g^{\alpha_1\beta_1} \ldots\, g^{\alpha_p\beta_p}\; \omega_{\alpha_1\ldots\,\alpha_p}\; \omega'_{\beta_1\ldots\,\beta_p}\;. \tag{1.218}$$

As equações (1.211), (1.212), (1.214) e (1.215) proporcionam a motivação para chamar os isomorfismos (1.204), (1.207), (1.208) e (1.209) de **isomorfismos musicais**, sendo que $.^\flat$ abaixa índices e $.^\sharp$ levanta índices.

Em particular, no caso de uma métrica g em uma variedade M, podemos expandir a métrica em TM e a métrica dual em T^*M em termos de um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e do referencial local dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$ para M, escrevendo

$$g \;=\; g_{ij}\, e^i \otimes e^j \quad \text{com} \quad g_{ij} \;=\; g(e_i, e_j)\;, \tag{1.219}$$

e

$$g \;=\; g^{ij}\, e_i \otimes e_j \quad \text{com} \quad g^{ij} \;=\; g(e^i, e^j)\;, \tag{1.220}$$

sendo que (g^{ij}) é a matriz inversa a (g_{ij}). Se usarmos o referencial local holonômo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ e o referencial local holônomo dual $\{\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ induzidos por um sistema de coordenadas locais x^μ em M, essas expansões assumem a forma

$$g \;=\; g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu \quad \text{com} \quad g_{\mu\nu} \;=\; g(\partial_\mu, \partial_\nu)\;, \tag{1.221}$$

e

$$g \;=\; g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \otimes \partial_\nu \quad \text{com} \quad g^{\mu\nu} \;=\; g(dx^\mu, dx^\nu)\;, \tag{1.222}$$

sendo que $(g^{\mu\nu})$ é a matriz inversa a $(g_{\mu\nu})$. A adaptação das fórmulas (1.211)–(1.212) e (1.214)–(1.218) a essa notação será utilizada sem menção explícita.

[7] Os índices p e q neste contexto não têm nada a ver com os números p e q que caracterizam a assinatura (p,q) da métrica g. Na prática, este uso ambivalente não costuma acarretar confusão.

Dado um fibrado vetorial E sobre uma variedade M munido de uma métrica pseudo-riemanniana, existe uma classe especial de bases de seções locais de E, a saber, as bases ortonormais. Dizemos que uma base $\{ e_1, \ldots, e_r \}$ de seções locais e_α de E é **ortonormal** se a correspondente matriz $(g_{\alpha\beta})$, em qualquer ponto do seu domínio, tiver a forma padrão

$$(\eta_{\alpha\beta}) \;=\; \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} . \tag{1.223}$$

Uma condição mais fraca é que ela seja **ortogonal**, o que significa que a correspondente matriz $(g_{\alpha\beta})$, em qualquer ponto do seu domínio, deve satisfazer $g_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Obviamente, devido à condição de não-degenerescência da métrica, as seções locais de uma base ortogonal não podem definir vetores de tipo luz em nenhum ponto do seu domínio, e portanto é fácil passar a uma base ortonormal: basta efetuar uma permutação entre as seções locais e_α da base ortogonal original para garantir que as seções locais e_α com $g_{\alpha\alpha} > 0$ venham antes das seções locias e_α com $g_{\alpha\alpha} < 0$, e dividir cada e_α por $\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}$.

Quanto à construção de bases ortogonais, existe o método de **ortogonalização de Gram-Schmidt** que, em qualquer espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto escalar, permite passar de uma base qualquer para uma base ortogonal. Porém, na sua versão original, este método funciona apenas para um produto escalar positivo definido. Além disso, é preciso verificar que a construção transforma uma base qualquer que depende diferenciavelmente de certos parâmetros em uma base ortogonal que também depende diferenciavelmente destes mesmos parâmetros.

1.1 Lema (ortogonalização de Gram-Schmidt) *Seja $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ uma base qualquer de um espaço vetorial real V munido de um produto escalar $(.\,,.)$ de assinatura (p,q). Então existe uma base ortogonal $\{ \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \}$ de V, obtida da base original por um processo iterativo de ortogonalização, de modo que os vetores $\tilde{v}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) são combinações lineares dos vetores v_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares (v_i, v_j) ($1 \leqslant i, j \leqslant n$).*

Demonstração: Inicialmente, observamos que a não-degenerescência do produto escalar $(.\,,.)$ implica que para cada vetor da base dada que é de tipo luz, existe pelo menos um outro vetor da mesma base (de tipo luz ou não) que não é ortogonal a ele. Portanto, efetuando uma permutação entre os vetores da base, podemos agrupá-los de tal forma que cada vetor da base que é de tipo luz venha seguido de outro vetor da base (de tipo luz ou não) que tenha produto escalar $\neq 0$ com ele, formando um par. Agora, se (v_i, v_{i+1}) for qualquer um destes pares, com $(v_i, v_i) = 0$ e $(v_i, v_{i+1}) \neq 0$, defina um novo par $(\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1})$ de vetores por

$$\tilde{v}_i \;=\; \Big(1 - \frac{(v_{i+1}, v_{i+1})}{2\,(v_i, v_{i+1})}\Big)\, v_i + v_{i+1} \quad , \quad \tilde{v}_{i+1} \;=\; \Big(1 + \frac{(v_{i+1}, v_{i+1})}{2\,(v_i, v_{i+1})}\Big)\, v_i - v_{i+1} \, .$$

Então $\tilde{v}_i$ e $\tilde{v}_{i+1}$ geram o mesmo subespaço bidimensional de V que v_i e v_{i+1}, formando uma base ortogonal deste subespaço, pois usando que $(v_i, v_i) = 0$, obtemos

$$(\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1}) \;=\; -\Big(1 - \frac{(v_{i+1}, v_{i+1})}{2\,(v_i, v_{i+1})}\Big)\,(v_i, v_{i+1}) + \Big(1 + \frac{(v_{i+1}, v_{i+1})}{2\,(v_i, v_{i+1})}\Big)\,(v_{i+1}, v_i) - (v_{i+1}, v_{i+1}) \;=\; 0 \, ,$$

$$(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \;=\; \Big(1 - \frac{(v_{i+1}, v_{i+1})}{2\,(v_i, v_{i+1})}\Big)\, 2\,(v_i, v_{i+1}) + (v_{i+1}, v_{i+1}) \;=\; 2\,(v_i, v_{i+1}) \, ,$$

$$(\tilde{v}_{i+1}, \tilde{v}_{i+1}) \;=\; -\Big(1 + \frac{(v_{i+1}, v_{i+1})}{2\,(v_i, v_{i+1})}\Big)\, 2\,(v_i, v_{i+1}) + (v_{i+1}, v_{i+1}) \;=\; -\,2\,(v_i, v_{i+1}) \, .$$

Posto isso, podemos completar a demonstração por indução sobre a dimensão de V:
Caso (a): Se $(v_1, v_1) \neq 0$, pomos $\tilde{v}_1 = v_1$ e definimos vetores $w_2, \ldots, w_n$ por

$$w_i = v_i - \frac{(v_1, v_i)}{(v_1, v_1)} v_1 \qquad \text{para } 2 \leqslant i \leqslant n ,$$

de modo que $\{w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base do complemento ortogonal do subespaço unidimensional de V gerado por v_1. Como este complemento ortogonal é um subespaço de V de dimensão $n-1$, podemos, pela hipótese de indução, aplicar o lema para encontrar uma base ortogonal $\{\tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n\}$ desse subespaço cujos vetores $\tilde{v}_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$ são combinações lineares dos vetores w_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares (w_i, w_j) $(2 \leqslant i, j \leqslant n)$. Mas então $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n\}$ é uma base ortogonal de V cujos vetores $\tilde{v}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ são combinações lineares dos vetores v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares (v_i, v_j) $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$.
Caso (b): Se $(v_1, v_1) \neq 0$ e portanto $(v_1, v_2) \neq 0$, definimos $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ como acima, i.e.,

$$\tilde{v}_1 = \Big(1 - \frac{(v_2, v_2)}{2\,(v_1, v_2)}\Big)\, v_1 + v_2 \quad , \quad \tilde{v}_2 = \Big(1 + \frac{(v_2, v_2)}{2\,(v_1, v_2)}\Big)\, v_1 - v_2 ,$$

e definimos vetores $w_3, \ldots, w_n$ por

$$w_i = v_i - \frac{(\tilde{v}_1, v_i)}{(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)} \tilde{v}_1 - \frac{(\tilde{v}_2, v_i)}{(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)} \tilde{v}_2 \qquad \text{para } 3 \leqslant i \leqslant n ,$$

ou seja,

$$w_i = v_i + \frac{(v_2, v_2)(v_1, v_i) - (v_1, v_2)(v_2, v_i)}{(v_1, v_2)^2}\, v_1 - \frac{(v_1, v_i)}{(v_1, v_2)}\, v_2 \qquad \text{para } 3 \leqslant i \leqslant n ,$$

de modo que $\{w_3, \ldots, w_n\}$ é uma base do complemento ortogonal do subespaço bidimensional de V gerado por v_1 e v_2. Como este complemento ortogonal é um subespaço de V de dimensão $n-2$, podemos, pela hipótese de indução, aplicar o lema para encontrar uma base ortogonal $\{\tilde{v}_3, \ldots, \tilde{v}_n\}$ desse subespaço cujos vetores $\tilde{v}_i$ $(3 \leqslant i \leqslant n)$ são combinações lineares dos vetores w_i $(3 \leqslant i \leqslant n)$ com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares (w_i, w_j) $(3 \leqslant i, j \leqslant n)$. Mas então $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \ldots, \tilde{v}_n\}$ é uma base ortogonal de V cujos vetores $\tilde{v}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ são combinações lineares dos vetores v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares (v_i, v_j) $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. □

Como consequência, temos

1.5 Proposição *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M munido de uma métrica pseudo-riemanniana g. Então E sempre admite bases ortonormais de seções locais.*

Demonstração: Dada uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções e_α de E sobre um aberto U (correspondente à escolha de uma trivialização admissível de E sobre U em conjunto com uma base da fibra típica $\mathbb{E}$ de E), podemos para cada ponto m de U ordenar essa base de tal forma que cada seção da base cujo valor no ponto m é um vetor de tipo luz venha seguida de outra seção da base cujo valor no ponto m tenha produto escalar $\neq 0$ com ele. Então é claro que este mesmo ordenamento é válido sobre toda uma vizinhança aberta V_m de m (contida em U), na qual nenhum dos referidos produtos escalares se anula, e que existe uma vizinhança U_m de m (contida em V_m) tal que o método de ortogonalização de Gram-Schmidt descrito na demonstração do lema anterior proporciona uma base ortogonal $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r\}$ de seções $\tilde{e}_\alpha$ de E sobre U_m. □

Dado um fibrado vetorial E de posto r sobre uma variedade M munido de uma métrica pseudo-riemanniana de assinatura (p,q), introduzimos o **grupo pseudo-ortogonal** $\mathrm{O}(p,q)$ de todas as transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^r$ que preservam a forma η e a **álgebra pseudo-ortogonal** $\mathfrak{so}(p,q)$ de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^r$ que preservam a forma η em nível infinitesimal. Explicitamente, em termos de matrizes reais $r \times r$, com $r = p + q$, e usando o símbolo $.^{\mathsf{T}}$ para denotar a transposição,

$$\mathrm{O}(p,q) \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \mid A^{\mathsf{T}}\eta\, A = \eta \,\} \;, \tag{1.224}$$

e

$$\mathfrak{so}(p,q) \;=\; \{\, X \in \mathfrak{gl}(r,\mathbb{R}) \mid X^{\mathsf{T}}\eta + \eta\, X = 0 \,\} \;. \tag{1.225}$$

De modo análogo, considerando a fibra E_m de E em cada ponto m de M, podemos definir

$$\mathrm{O}(E_m) \;=\; \{\, A_m \in \mathrm{GL}(E_m) \mid A_m^{\mathsf{T}}\, g_m\, A_m = g_m \,\} \;, \tag{1.226}$$

e

$$\mathfrak{so}(E_m) \;=\; \{\, X_m \in \mathfrak{gl}(E_m) \mid X_m^{\mathsf{T}}\, g_m + g_m\, X_m = 0 \,\} \;. \tag{1.227}$$

Então é claro que as funções de transição $\tau_{\alpha\beta}$ entre duas trivializações locais admissíveis Φ_α e Φ_β de E que correspondem a bases ortonormais de seções locais (veja as equações (1.33)–(1.35)) tomam valores no grupo pseudo-ortogonal $\mathrm{O}(p,q)$.

Passando à discussão de conexões lineares em fibrados vetoriais munidos de uma métrica pseudo-riemanniana, temos a seguinte

1.23 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M munido de uma métrica pseudo-riemanniana g. Uma conexão linear D em E é chamada **compatível** com a métrica g em E se, para todo campo vetorial X sobre M, vale

$$D_X g \;=\; 0 \;, \tag{1.228}$$

i.e., se g for covariantemente constante em relação à conexão linear induzida no fibrado vetorial $\bigvee^2 E^*$ (que, conforme convenção mencionada no final da Seção 1.3.2, também é denotada por D). Explicitamente, isto significa que para todo campo vetorial X sobre M e quaisquer duas seções s_1 e s_2 de E, vale[8]

$$X \cdot g(s_1,s_2) \;=\; g(D_X s_1, s_2) + g(s_1, D_X s_2) \;. \tag{1.229}$$

Neste caso, dependendo da assinatura de g, diz-se também que D é uma conexão **pseudo-riemanniana** ou **riemanniana** ou **lorentziana**.

Se expandirmos a conexão linear D em E em termos de uma base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_r\}$ de seções locais e_α de E e observarmos que a condição de ortonormalidade dessa base implica que as componentes do tensor métrico em relação à correspondente base induzida de seções locais de T_2^0E ou de T_0^2E devem ser funções constantes, podemos aplicar as equações

$$\begin{aligned} D_X g_{\alpha\beta} \;&=\; X \cdot g_{\alpha\beta} - A_\alpha^\gamma(X) g_{\gamma\beta} - A_\beta^\gamma(X) g_{\alpha\gamma} \;, \\ D_X g^{\alpha\beta} \;&=\; X \cdot g^{\alpha\beta} - A_\gamma^\alpha(X) g^{\gamma\beta} - A_\gamma^\beta(X) g^{\alpha\gamma} \;, \end{aligned} \tag{1.230}$$

ou, em termos de um referencial local $\{e_1,\ldots,e_n\}$ para M,

$$\begin{aligned} D_k g_{\alpha\beta} \;&=\; \partial_k g_{\alpha\beta} \;-\; A_{k\,\alpha}^{\;\gamma}\, g_{\gamma\beta} \;-\; A_{k\,\beta}^{\;\gamma}\, g_{\alpha\gamma} \;, \\ D_k g^{\alpha\beta} \;&=\; \partial_k g^{\alpha\beta} \;+\; A_{k\,\gamma}^{\;\alpha}\, g^{\gamma\beta} \;+\; A_{k\,\gamma}^{\;\beta}\, g^{\alpha\gamma} \;, \end{aligned} \tag{1.231}$$

[8] A equivalência das condições (1.228) e (1.229) segue combinando as equações (1.87) e (1.91).

que são casos especiais da equação (1.101), já que as equações (1.210) e (1.213) são casos especiais da equação (1.69), para concluir que a conexão linear D é compatível com a métrica g se e somente se a 1-forma A a valores matriciais constituída pelas suas formas de conexão locais A^{α}_{β} em relação a qualquer base ortonormal de seções locais toma valores na álgebra pseudo-ortogonal $\mathfrak{so}(p,q)$. Neste caso, segue da equação de estrutura (1.132) que a 2-forma F a valores matriciais constituída pelas correspondentes formas de curvatura locais F^{α}_{β} também toma valores na álgebra pseudo-ortogonal $\mathfrak{so}(p,q)$. Escrevendo

$$A_{\alpha\beta}(X) \;=\; g_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\beta}(X) \quad , \quad F_{\alpha\beta}(X,Y) \;=\; g_{\alpha\gamma}F^{\gamma}_{\beta}(X,Y)\;, \tag{1.232}$$

podemos expressar essa propriedade como uma simples condição de antissimetria:

$$A_{\alpha\beta}(X) + A_{\beta\alpha}(X) \;=\; 0 \quad , \quad F_{\alpha\beta}(X,Y) + F_{\beta\alpha}(X,Y) \;=\; 0\;. \tag{1.233}$$

Independentemente da escolha de bases ortonormais, temos

1.6 Proposição *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M munido de uma métrica pseudo-riemanniana g e de uma conexão linear pseudo-riemanniana D.*

1. *O tensor de curvatura F de D é uma 2-forma a valores no fibrado de álgebras de Lie pseudo-ortogonais $\mathfrak{so}(E)$,[9] i.e., para todo ponto m de M e quaisquer dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale*
$$F(X,Y)_m \in \mathfrak{so}(E_m)\;. \tag{1.234}$$

2. *O transporte paralelo em relação a D preserva a métrica, i.e., para toda curva $\gamma : I \to M$ em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e para $t, t' \in I$, o operador $U_\gamma(t',t) : E_{\gamma(t)} \to E_{\gamma(t')}$ é uma isometria. Em particular, para todo ponto m de M, o grupo de holonomia $\mathrm{Hol}_m(D)$ de D em m é um subgrupo do grupo pseudo-ortogonal:*
$$\mathrm{Hol}_m(D) \subset \mathrm{O}(E_m)\;. \tag{1.235}$$

1.5.2 Conexão de Levi-Civita

Inicialmente, esclarecemos que uma **variedade pseudo-riemanniana** ou **variedade riemanniana / variedade de Riemann** ou **variedade lorentziana / variedade de Lorentz** é simplesmente uma variedade M munida de uma métrica pseudo-riemanniana ou riemanniana ou lorentziana no seu fibrado tangente. Nossa meta nesta seção é formular e provar o primeiro teorema fundamental da geometria pseudo-riemanniana:

1.4 Teorema *Seja M uma variedade pseudo-riemanniana com métrica g. Então existe uma única conexão linear ∇ em M, chamada a* ***conexão de Levi-Civita*** *associada a g, tal que*

1. *∇ é pseudo-riemanniana, i.e., vale*
$$\nabla g \;=\; 0\;, \tag{1.236}$$
ou mais explicitamente, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,
$$Z \cdot g(X,Y) \;=\; g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)\;. \tag{1.237}$$

[9] O conceito de um fibrado de álgebras de Lie será definido formalmente na próxima seção, no Exemplo 1.12.

2. *∇ tem torção nula, i.., vale*

$$T = 0 \,, \tag{1.238}$$

ou mais explicitamente, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \,. \tag{1.239}$$

Demonstração: Primeiro, sob a hipótese de que ∇ existe, vamos calcular, para quaisquer três campos vetoriais $Z, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a função $g(\nabla_Z X, Y)$, pois isso determina, para quaisquer dois campos vetoriais $Z, X \in \mathfrak{X}(M)$, o campo vetorial $\nabla_Z X$, uma vez que a métrica g é não-degenerada: Da equação (1.237), segue que

$$\begin{aligned} & Z \cdot g(X, Y) + X \cdot g(Z, Y) - Y \cdot g(Z, X) \\ & \quad = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + g(\nabla_X Z, Y) + g(Z, \nabla_X Y) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) \\ & \quad = 2\, g(\nabla_Z X, Y) - g(Y, \nabla_Z X - \nabla_X Z) + g(X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + g(Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X) \,. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (1.239) implica a fórmula

$$\begin{aligned} 2\, g(\nabla_Z X, Y) \; = \; & Z \cdot g(X, Y) + X \cdot g(Z, Y) - Y \cdot g(Z, X) \\ & - g(Z, [X, Y]) - g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) \,, \end{aligned} \tag{1.240}$$

que, obviamente, determina $g(\nabla_Z X, Y)$ por completo, demonstrando a unicidade de ∇. A mesma fórmula pode ser usada para demonstrar a existência de ∇: basta usá-la para definir ∇. Para tanto, precisamos mostrar primeiro que ela realmente associa a quaisquer dois campos vetoriais $Z, X \in \mathfrak{X}(M)$ um novo campo vetorial $\nabla_Z X \in \mathfrak{X}(M)$, o que segue mostrando que a expressão que consta do lado direito da equação (1.240) é $\mathfrak{F}(M)$-linear em Y, ou seja, que para toda função $f \in \mathfrak{F}(M)$ e todo campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$, a expressão

$$\begin{aligned} & Z \cdot g(X, fY) + X \cdot g(Z, fY) - (fY) \cdot g(Z, X) - g(Z, [X, fY]) - g(X, [Z, fY]) + g(fY, [Z, X]) \\ & - fZ \cdot g(X, Y) - fX \cdot g(Z, Y) + fY \cdot g(Z, X) - f\, g(Z, [X, Y]) + f\, g(X, [Z, Y]) - f\, g(Y, [Z, X]) \end{aligned}$$

se anula. Mas isso é óbvio, pois após cancelamento dos termos opostos, resta apenas

$$(Z \cdot f)\, g(X, Y) + (X \cdot f)\, g(Z, Y) - g\big(Z, (X \cdot f) Y\big) - g\big(X, (Z \cdot f) Y\big) = 0 \,.$$

Segundo, mostra-se da mesma forma que a expressão que consta do lado direito da equação (1.240) é $\mathfrak{F}(M)$-linear em Z e satisfaz a regra de Leibniz exigida de uma conexão linear (veja a equação (1.84)), i.e., que vale

$$2\, g(\nabla_{fZ} X, Y) - 2f\, g(\nabla_Z X, Y) = 0 \,,$$

e

$$2\, g(\nabla_Z (fX), Y) - 2f\, g(\nabla_Z X, Y) - 2(Z \cdot f)\, g(X, Y) = 0 \,.$$

Deixaremos os detalhes desta verificação para o leitor. □

Em termos de um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para M, as condições que caracterizam a conexão de Levi-Civita são que as derivadas covariantes da métrica,

$$\begin{aligned} \nabla_k g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^{l}\, g_{lj} - \Gamma_{kj}^{l}\, g_{il} \,, \\ \nabla_k g^{ij} &= \partial_k g^{ij} + \Gamma_{kl}^{i}\, g^{lj} + \Gamma_{kl}^{j}\, g^{il} \,, \end{aligned} \tag{1.241}$$

(veja a equação (1.231)) se anulam e que

$$\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk} = C^i_{kl} \,, \tag{1.242}$$

onde

$$[e_k, e_l] = C^i_{kl} \, e_i \,, \tag{1.243}$$

(veja as equações (1.159) e (1.160)). Escrevendo

$$\Gamma_{i,kl} = g_{ij} \Gamma^j_{kl} \quad , \quad C_{i,kl} = g_{ij} C^j_{kl} \,, \tag{1.244}$$

obtemos o correspondente da equação (1.240),

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(\partial_k g_{li} + \partial_l g_{ki} - \partial_i g_{kl} - C_{k,li} - C_{l,ki} + C_{i,kl} \right) , \tag{1.245}$$

ou ainda,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\partial_k g_{lj} + \partial_l g_{kj} - \partial_j g_{kl} - C_{k,lj} - C_{l,kj} + C_{j,kl} \right) . \tag{1.246}$$

Há duas situações importantes em que essa fórmula é substancialmente simplificada: Se usarmos um referencial local holônomo $\{ \partial_1, \ldots, \partial_n \}$ induzido por um sistema de coordenadas locais x^μ em M, temos

$$\Gamma_{\mu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2} \left(\partial_\kappa g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda g_{\kappa\mu} - \partial_\mu g_{\kappa\lambda} \right) , \tag{1.247}$$

ou ainda,

$$\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\kappa g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\kappa\lambda} \right) , \tag{1.248}$$

com a proprieda de simetria $\Gamma_{\mu,\kappa\lambda} = \Gamma_{\mu,\lambda\kappa}$, expressando a propriedade da conexão de Levi-Civita de ter torção nula, enquanto que se usarmos um referencial local ortonormal, temos

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(C_{i,kl} - C_{k,li} - C_{l,ki} \right) , \tag{1.249}$$

ou ainda,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(C_{j,kl} - C_{k,lj} - C_{l,kj} \right) , \tag{1.250}$$

com a propriedade de antissimetria $\Gamma_{i,kl} = -\Gamma_{l,ki}$, expressando a propriedade da conexão de Levi-Civita de preservar a métrica.

1.5.3 Tensores de Curvatura de Riemann, Ricci, Einstein e Weyl

Seja M uma variedade pseudo-riemanniana com métrica g e seja ∇ a conexão de Levi-Civita associada a g. Usando a métrica g, podemos definir vários novos tensores de curvatura, além dos tensores de Riemann e de Ricci já introduzidos na Seção 1.4.2 (veja as equações (1.140) e (1.142)). Por exemplo, podemos definir um **tensor de (curvatura de) Riemann** totalmente covariante, ou seja, de tipo $(0,4)$, que também denotaremos por R, pondo

$$R(U,V;X,Y) = g(U, R(X,Y) \cdot V) \,, \tag{1.251}$$

onde $U, V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Este tensor tem a vantagem de possuir propriedades de simetria simples:

- Antissimetria nos primeiros dois argumentos:

$$R(U,V;X,Y) + R(V,U;X,Y) \ = \ 0\,. \tag{1.252}$$

- Antissimetria nos últimos dois argumentos:

$$R(U,V;X,Y) + R(U,V;Y,X) \ = \ 0\,. \tag{1.253}$$

- Simetria sob troca de blocos:

$$R(U,V;X,Y) \ = \ R(X,Y;U,V)\,. \tag{1.254}$$

- Ausência da parte totalmente antissimétrica:

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma R(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}; X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}) \ = \ 0\,. \tag{1.255}$$

- Ciclicidade em relação a quaisquer três dos argumentos, por exemplo,

$$R(U,Z;X,Y) + R(U,X;Y,Z) + R(U,Y;Z,X) \ = \ 0\,. \tag{1.256}$$

Todas essas propriedades de simetria podem ser resumidas constatando que o tensor de Riemann totalmente covariante pertence a uma representação irredutível do grupo de permutações S_4, caracterizada pelo diagrama de Young

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \end{array}\ ,$$

tendo $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ componentes independentes (número igual à dimensão da representação correspondente de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$).

Demonstração: A equação (1.251) segue do fato de que a conexão de Levi-Civita preserva a métrica. De fato, aplicando a equação (1.237) várias vezes, obtemos, para $U,V,X,Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
& g\big(U, R(X,Y)\cdot V\big) \ + \ g\big(R(X,Y)\cdot U, V\big) \\
&\quad = \ g\big(U\,,\, \nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_{[X,Y]}V\big) \ + \ g\big(\nabla_X\nabla_Y U - \nabla_Y\nabla_X U - \nabla_{[X,Y]}U\,,\, V\big) \\
&\quad = \ X\cdot g(U,\nabla_Y V) - g(\nabla_X U, \nabla_Y V) - Y\cdot g(U,\nabla_X V) + g(\nabla_Y U, \nabla_X V) \\
&\qquad\ + X\cdot g(\nabla_Y U, V) - g(\nabla_Y U, \nabla_X V) - Y\cdot g(\nabla_X U, V) + g(\nabla_X U, \nabla_Y V) \\
&\qquad\ - [X,Y]\cdot g(U,V) \\
&\quad = \ X\cdot\big(Y\cdot g(U,V)\big) - Y\cdot\big(X\cdot g(U,V)\big) - [X,Y]\cdot g(U,V) \\
&\quad = \ 0\,.
\end{aligned}$$

A equação (1.252) é trivial. A equação (1.255) (que coincide com a equação (1.167)) segue do fato de que a conexão de Levi-Civita tem torção zero, em conjunto com a identidade de Jacobi para o colchete de Lie entre campos vetoriais. De fato, aplicando a equação (1.239) várias vezes, obtemos, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)\cdot Z + R(Y,Z)\cdot X + R(Z,X)\cdot Y \\
&\quad= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&\quad= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&\quad= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&\quad= 0\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, as condições de antissimetria (1.251) e (1.252) implicam que a condição de ciclicidade (1.255) torna-se equivalente ao conjunto das duas condições de simetria (1.253) e (1.254). De fato, (1.251), (1.252) e (1.255) implicam (1.253): basta observar que, para $U, V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$\begin{aligned}
R(U,V;X,Y) &= \tfrac{1}{2}R(U,V;X,Y) - \tfrac{1}{2}R(V,U;X,Y) \\
&= -\tfrac{1}{2}\big(R(U,X;Y,V) + R(U,Y;V,X)\big) + \tfrac{1}{2}\big(R(V,X;Y,U) + R(V,Y;U,X)\big) \\
&= -\tfrac{1}{2}\big(R(X,U;V,Y) + R(X,V;Y,U)\big) + \tfrac{1}{2}\big(R(Y,U;V,X) + R(Y,V;X,U)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}R(X,Y;U,V) - \tfrac{1}{2}R(Y,X;U,V) \\
&= R(X,Y;U,V)\,.
\end{aligned}$$

Mas então também implicam (1.254), pois (1.251), (1.252) e (1.253) garantem que o lado esquerdo de (1.255) é totalmente antissimétrico em U, Z, X, Y. O mesmo argumento mostra que, reciprocamente, (1.251), (1.252), (1.253) e (1.254) implicam (1.255). □

Outra variante é o **tensor de (curvatura de) Riemann** como endomorfismo de bivetores, ou seja, de tipo $(2,2)$, que mais uma vez denotaremos por R, pondo

$$g\big(U\wedge V, R(X\wedge Y)\big) = g\big(U, R(X,Y)\cdot V\big)\,, \tag{1.257}$$

onde $U, V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (sendo que, nesta equação, a métrica g que consta do lado direito é a métrica original no fibrado tangente TM, enquanto que a métrica g que consta do lado esquerdo é a métrica induzida no fibrado dos bivetores $\bigwedge^2 TM$). Este tensor é bem definido em função das propriedades de simetria (1.252) e (1.253), enquanto que a propriedade de simetria (1.254) expressa o fato de que para todo ponto m de M, seu valor R_m em m constitui uma transformação linear de $\bigwedge^2 T_mM$ em $\bigwedge^2 T_mM$ que é simétrica (em relação ao produto escalar induzido g_m) e portanto é diagonalizável: assim, o tensor de curvatura no ponto m é completamente caracterizado, a menos de transformações de coordenadas ou, mais geralmente, de mudanças de referenciais, pelos seus $n(n-1)/2$ autovalores. Em particular, vale mencionar que é nesta caracterização que se basea a classificação de Bianchi.

Para efetuar cálculos, a maneira mais eficiente de trabalhar com os diversos tipos de tensores de curvatura que aparecem na geometria pseudo-riemanniana é em termos de um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para M. Por exemplo, as definições do tensor de Riemann de tipo $(0,4)$ e de tipo $(2,2)$, equações (1.251) e (1.257), tornam-se

$$R_{ijkl} = g_{im}R^m{}_{jkl}\,, \tag{1.258}$$

e

$$R^{ij}{}_{kl} \;=\; g^{jm}\, R^i{}_{mkl} \;, \tag{1.259}$$

respectivamente, enquanto que as propriedades de simetria (1.252)–(1.255) e de ciclicidade (1.256) para o primeiro assumem a forma

$$R_{ijkl} + R_{jikl} \;=\; 0 \quad , \quad R_{ijkl} + R_{ijlk} \;=\; 0 \quad , \quad R_{ijkl} \;=\; R_{klij} \quad , \quad R_{[ijkl]} \;=\; 0 \;, \tag{1.260}$$

e

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} \;=\; 0 \;. \tag{1.261}$$

Reescrevendo a definição do tensor de Ricci, equação (1.164), em termos do tensor de Riemann totalmente covariante, obtemos

$$R_{kl} \;=\; g^{ij}\, R_{ikjl} \;, \tag{1.262}$$

mostrando que o tensor de Ricci é simétrico:

$$R_{kl} \;=\; R_{lk} \;. \tag{1.263}$$

Definem-se ainda a **curvatura escalar** por

$$R \;=\; g^{kl}\, R_{kl} \;, \tag{1.264}$$

e, para $n > 2$, o **tensor de (curvatura de) Einstein** por

$$G_{kl} \;=\; R_{kl} - \tfrac{1}{2}\, g_{kl}\, R \;, \tag{1.265}$$

assim como, para $n > 3$, o **tensor de (curvatura de) Weyl** por

$$\begin{aligned} W_{ijkl} \;=\; R_{ijkl} \,&-\, \frac{1}{n-2}\, \Big(g_{ik}\, R_{jl} - g_{jk}\, R_{il} - g_{il}\, R_{jk} + g_{jl}\, R_{ik} \Big) \\ &+\, \frac{1}{(n-1)(n-2)}\, \Big(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk} \Big)\, R \;. \end{aligned} \tag{1.266}$$

Note que o tensor de Einstein – exceto no caso especial $n=2$ onde ele se anula identicamente – não é igual à parte do tensor de Ricci sem traço, que seria a expressão

$$R_{kl} - \tfrac{1}{n}\, g_{kl}\, R \;.$$

De fato, os dois tensores contêm a mesma informação, pois a fórmula (1.265) pode ser invertida para expressar o tensor de Ricci em termos do tensor de Einstein: definindo

$$G \;=\; g^{kl}\, G_{kl} \;,$$

obtemos

$$2G \;=\; -(n-2)R \;,$$

e portanto

$$R_{kl} \;=\; G_{kl} - \tfrac{1}{n-2}\, g_{kl}\, G \;.$$

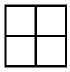
A propriedade especial do tensor de Einstein, que justifica a escolha do fator $\frac{1}{2}$, ao invés do fator $\frac{1}{n}$, como coeficiente do segundo termo na definição (1.265), é que ele é covariantemente conservado, i.e., que sua divergência covariante se anula:

$$g^{ik}\, \nabla_i G_{kl} \;=\; 0 \;. \tag{1.267}$$

Isso decorre da segunda identidade de Bianchi (1.148), pois essa implica

$$\begin{aligned} 2\,g^{ik}\,\nabla_i R_{kl} &= 2\,g^{ik}\,\nabla_i R^j{}_{kjl} \;=\; g^{ik}\,\nabla_i R^j{}_{kjl} - g^{ik}\,\nabla_j R^j{}_{kli} - g^{ik}\,\nabla_l R^j{}_{kij} \\ &= \nabla_i (g^{ik} g^{jm}\, R_{jkml}) - \nabla_j (g^{ik} g^{jm}\, R_{mkli}) + \nabla_l (g^{ik}\, R_{ki}) \\ &= \nabla_i (g^{im} g^{jk}\, R_{jmkl}) - \nabla_i (g^{jk} g^{im}\, R_{mklj}) + \nabla_l R \\ &= \nabla_l R\,. \end{aligned}$$

Quanto ao tensor de Weyl, notamos que ele é definido de modo que, além de satisfazer as mesmas propriedades de simetria que o tensor de Riemann, enunciadas nas equações (1.260) e (1.261), todos os seus traços parciais se anulam, i.e., vale $g^{ik} W_{ijkl} = 0$ (os demais traços parciais se anulam trivialmente). Em outras palavras, ele pertence à mesma representação irredutível do grupo de permutações S_4, caracterizada pelo diagrama de Young

 ,

mas tem apenas $\frac{1}{12} n^2 (n^2-1) - \frac{1}{2} (n+1) n = \frac{1}{12} (n+2)(n+1) n (n-3)$ componentes independentes. Em particular, no caso especial $n=3$, o tensor de Weyl se anula identicamente, ou seja: o tensor de Riemann é completamente determinado pelo tensor de Ricci. Finalmente, o tensor de Weyl é conformemente invariante, i.e., invariante sob reescalonamento da métrica, que em coordenadas locais x^μ assume a forma

$$g_{\mu\nu} \;\to\; \exp(2\omega)\, g_{\mu\nu} \quad , \quad g^{\mu\nu} \;\to\; \exp(-2\omega)\, g^{\mu\nu}\;, \tag{1.268}$$

onde σ denota uma função qualquer (diferenciável) sobre M. De fato, esta lei de transformação para o tensor métrico implica as seguintes leis de transformação: para os símbolos de Christoffel (veja as equações (1.246) e (1.248)),

$$\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \;\to\; \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} + \Big(\delta^\mu_\lambda\, \partial_\kappa \omega + \delta^\mu_\kappa\, \partial_\lambda \omega - g_{\kappa\lambda}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \omega \Big)\;, \tag{1.269}$$

para o tensor de Riemann (veja as equações (1.161) e (1.166)),

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} \;\;\to\;\; & R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} - (\delta^\mu_\kappa\, \nabla_\lambda \partial_\nu \omega - \delta^\mu_\lambda\, \nabla_\kappa \partial_\nu \omega) + (g_{\nu\kappa}\, g^{\mu\rho}\, \nabla_\lambda \partial_\rho \omega - g_{\nu\lambda}\, g^{\mu\rho}\, \nabla_\kappa \partial_\rho \omega) \\ & + (\delta^\mu_\kappa\, \partial_\lambda \omega\; \partial_\nu \omega - \delta^\mu_\lambda\, \partial_\kappa \omega\; \partial_\nu \omega) - (g_{\nu\kappa}\, g^{\mu\rho}\, \partial_\lambda \omega\; \partial_\rho \omega - g_{\nu\lambda}\, g^{\mu\rho}\, \partial_\kappa \omega\; \partial_\rho \omega) \\ & - (\delta^\mu_\kappa\, g_{\lambda\nu} - \delta^\mu_\lambda\, g_{\kappa\nu})\, (\partial\omega)^2\,. \end{aligned} \tag{1.270}$$

para o tensor de Ricci (veja as equações (1.164) e (1.262)),

$$R_{\kappa\lambda} \;\to\; R_{\kappa\lambda} - (n-2)\, \nabla_\lambda \partial_\kappa \omega - g_{\kappa\lambda}\, \Box\, \omega + (n-2)\, \partial_\lambda \omega\; \partial_\kappa \omega - (n-2)\, g_{\kappa\lambda}\, (\partial\omega)^2\;, \tag{1.271}$$

para a curvatura escalar (veja a equação (1.264)),

$$R \;\to\; \exp(-2\omega)\, \Big(R - 2\,(n-1)\, \Box\, \omega - (n-1)(n-2)\, (\partial\, \omega)^2 \Big)\,. \tag{1.272}$$

e para o tensor de Weyl (veja a equação (1.266)),

$$W^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} \;\to\; W^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}\,. \tag{1.273}$$

1.5.4 Variedades Riemannianas e Lorentzianas

As áreas mais importantes da geometria pseudo-riemanniana são a geometria riemanniana e a geometria lorentziana. Como vimos acima, existe uma parte inicial da teoria que é compartilhada por ambas, com várias noções importantes ligadas à conexão de Levi-Civita, cuja definição não depende da assinatura da métrica. Porém, há também diferenças marcantes, que começam a aparecer assim que passamos a considerar a noção de comprimento de arco. De modo geral, dada uma curva $\gamma : I \to M$ em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, podemos definir seu **comprimento de arco** entre t_1 e t_2, onde $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 < t_2$, como a integral

$$l_\gamma(t_1, t_2) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left| g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \right|^{1/2} . \tag{1.274}$$

Na geometria riemanniana, a métrica no sentido de "tensor métrico" define uma métrica no sentido de "função distância": basta definir a distância entre dois pontos m_1 e m_2 de M (mais exatamente, na mesma componente conexa de M) como sendo o ínfimo dos comprimentos de arco de todas as curvas γ que ligam m_1 e m_2:[10]

$$d(m_1, m_2) \;=\; \inf \left\{ l_\gamma(t_1, t_2) \;\middle|\; \begin{array}{c} \gamma : I \to M \text{ é curva com } t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2, \\ \gamma(t_1) = m_1 \text{ e } \gamma(t_2) = m_2 \end{array} \right\} . \tag{1.275}$$

Esta definição é ponto de partida de uma teoria rica, culminando no famoso *teorema de Hopf-Rinow*, segundo o qual uma variedade riemanniana é completa como espaço métrico se e somente se ela for geodesicamente completa (em relação à conexão de Levi-Civita).

Na geometria lorentziana, a noção central e a de "estrutura causal", começando pela distinção entre curvas tipo tempo, tipo espaço e tipo luz. Diz-se que uma curva $\gamma : I \to M$ em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é uma **curva tipo luz**, uma **curva tipo tempo**, uma **curva tipo espaço** ou uma **curva causal** se e somente se, em qualquer um dos seus pontos, o seu vetor tangente é, respectivamente, um vetor tipo luz, tipo tempo, tipo espaço ou causal. Nota-se que, em princípio, existem curvas γ que não são de nenhum tipo fixo, pois nada impede que a função $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$ possa se anular ou mudar de sinal quando variamos t; porém, isso não pode ocorrer quando γ for uma geodésica, e de modo geral, tais curvas são descartadas, por serem consideradas patológicas.

> Na prática, as únicas curvas que aparecem em relatividade geral, pois correspondem a linhas universo de partículas observadas na natureza, são (a) curvas tipo tempo (para partículas com massa de repouso $m > 0$), que podem ser geodésicas (descrevendo partículas em queda livre) ou não (descrevendo partículas sujeitas a forças externas não gravitacionais), e (b) geodésicas tipo luz (para partículas com massa de repouso $m = 0$). Em particular, curvas tipo luz que não sejam geodésicas não são realizadas na natureza, ou em outras palavras: não há como acelerar ou decelerar fótons, sendo que a única maneira de alterar a trajetória de um fóton é aniquilá-lo (absorção) e criar outro (emissão).

O próximo passo consiste em exigir que a variedade lorentziana sob consideração seja orientável, e de fato orientada, no tempo,[11] o que permite distinguir, para curvas causais (em particular, para curvas

[10] Nesta definição, a propriedade do tensor métrico ser (positivo ou negativo) definido é essencial, pois quando não for, podem existir curvas com comprimento de arco zero ligando pontos distintos.

[11] No âmbito da relatividade geral, variedades lorentzianas não orientáveis no tempo devem ser descartadas como modelos de um espaço-tempo realístico: são substituídas por um recobrimento duplo apropriado, chamado de "recobrimento de orientação".

tipo tempo ou tipo luz), entre curvas direcionadas ao futuro e curvas direcionadas ao passado. Novamente, essas definições são ponto de partida de uma teoria rica, culminando no conceito de *variedades lorentzianas globalmente hiperbólicas*, que têm se mostrado a arena adequada tanto para a relatividade geral como para o estudo da teoria de campos em espaços-tempos curvos.

1.6 Estruturas Adicionais

A seguir, introduzimos um método geral para descrever estruturas adicionais em fibrados vetoriais e definimos o conceito de uma conexão linear compatível com tal estrutura.[12] Essa construção generaliza a discussão da seção anterior, pois como no caso de uma métrica pseudo-riemanniana, tal estrutura adicional em um fibrado vetorial é dada pela escolha de uma seção de um dos seus descendentes, ou mais geralmente de uma família finita de seções de seus descendentes.

1.6.1 Fibrados Vetoriais com Estruturas Adicionais

1.24 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$. Uma **estrutura adicional** (algébrica ou geométrica) em E é uma família finita $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ de seções $\sigma_i \in \Gamma(T^{p_i}_{q_i}E)$ em conjunto com uma família finita $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k\}$ de tensores $\boldsymbol{\sigma}_i \in T^{p_i}_{q_i}\mathbb{E}$ satisfazendo o postulado de **trivialidade local**: existem um recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M e uma família $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de trivializações locais admissíveis $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{E}$ de E tais que para qualquer $\alpha \in A$, qualquer $m \in U_\alpha$ e qualquer $1 \leqslant i \leqslant k$, o isomorfismo linear $T^{p_i}_{q_i}(\Phi_\alpha)_m : T^{p_i}_{q_i}E_m \to T^{p_i}_{q_i}\mathbb{E}$ induzido pelo isomorfismo linear $(\Phi_\alpha)_m : E_m \to \mathbb{E}$ leva $\sigma_i(m)$ em $\boldsymbol{\sigma}_i$:

$$T^{p_i}_{q_i}(\Phi_\alpha)_m \cdot \sigma_i(m) \;=\; \boldsymbol{\sigma}_i \qquad \text{para } m \in U_\alpha,\, 1 \leqslant i \leqslant k\,. \tag{1.276}$$

Trivializações locais admissíveis que satisfazem esta condição, assim como as correspondentes bases de seções locais, são chamadas de **compatíveis** com a estrutura.

Dado um fibrado vetorial sobre uma variedade M com fibra típica $\mathbb{E}$ munido de uma estrutura adicional $(\Sigma, \boldsymbol{\Sigma})$ como na Definição 1.24, introduzimos o correspondente **grupo estrutural** $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ de todas as transformações lineares inversíveis de $\mathbb{E}$ que preservam os tensores $\boldsymbol{\sigma}_i$ e a correspondente **álgebra estrutural** $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ de todas as transformações lineares de $\mathbb{E}$ que preservam os tensores $\boldsymbol{\sigma}_i$ em nível infinitesimal. Explicitamente,

$$G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E}) \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid T^{p_i}_{q_i}A \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k \,\}\,, \tag{1.277}$$

onde

$$T^p_q A \;=\; \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{p \text{ vezes}} \otimes \underbrace{A^{*-1} \otimes \ldots \otimes A^{*-1}}_{q \text{ vezes}}\,, \tag{1.278}$$

e

$$\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E}) \;=\; \{\, X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{E}) \mid D^{p_i}_{q_i}(X) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = 0 \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k \,\}\,, \tag{1.279}$$

[12] Existe uma dúvida se as estruturas em questão deveriam ser chamadas de algébricas ou de geométricas: são estruturas algébricas em cada fibra, mas são geométricas no sentido de serem parametrizadas pelos pontos da variedade base.

onde

$$\begin{aligned} D_q^p(X) \;&=\; \sum_{r=1}^{p} (\underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{r-1 \text{ vezes}}\otimes X\otimes \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{p-r \text{ vezes}})\otimes(\underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{q \text{ vezes}}) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{q} (\underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{q \text{ vezes}})\otimes(\underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{s-1 \text{ vezes}}\otimes X^*\otimes \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{q-s \text{ vezes}})\;. \end{aligned} \tag{1.280}$$

Note que para $A,B\in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$,

$$T_q^p(AB) \;=\; T_q^p A\; T_q^p B\;,$$

enquanto que para $X,Y\in \mathfrak{gl}(\mathbb{E})$,

$$D_q^p([X,Y]) \;=\; [D_q^p(X), D_q^p(Y)]\;,$$

mostrando que $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ é realmente um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ e que $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ é realmente uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathbb{E})$. De modo análogo, considerando a fibra E_m de E em cada ponto m de M, podemos definir

$$G_{\Sigma}(E_m) \;=\; \{\, A_m\in \mathrm{GL}(E_m)\mid T_{q_i}^{p_i}A_m\cdot\sigma_i(m)=\sigma_i(m) \quad \text{para } 1\leqslant i\leqslant k\,\}\;, \tag{1.281}$$

e

$$\mathfrak{g}_{\Sigma}(E_m) \;=\; \{\, X_m\in \mathfrak{gl}(E_m)\mid D_{q_i}^{p_i}(X_m)\cdot\sigma_i(m)=0 \quad \text{para } 1\leqslant i\leqslant k\,\}\;, \tag{1.282}$$

Então é claro que as funções de transição $\tau_{\alpha\beta}$ entre duas trivializações locais compatíveis Φ_α e Φ_β de E (veja as equações (1.33)–(1.35)) tomam valores no grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$.

Para ilustrar a riqueza e abrangência do conceito, apresentamos alguns exemplos.

1.9 Exemplo Seja E um fibrado vetorial real de posto r [13] e seja $k=1$, $p_1=0$, $q_1=2$, o que corresponde a uma estrutura dada por um único campo σ de tensores covariantes de grau 2:

(a) Se o tensor σ for simétrico e não-degenerado (e tiver assinatura (p,q), digamos, com $p+q=r$),[14] com forma padrão $\boldsymbol{\sigma}$ dada pela matriz

$$\eta \;=\; \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}\,,$$

ele define uma **métrica nas fibras** de E (de assinatura (p,q)); neste caso, escrevemos g ao invés de σ. Essa situação já foi investigada na seção anterior. O grupo estrutural é o grupo pseudo-ortogonal $\mathrm{O}(p,q)$. Notamos que uma trivialização local de E compatível com uma métrica g nas fibras de E, em conjunto com uma base ortonormal da fibra típica $\mathbb{E}$, corresponde exatamente a uma base ortonormal de seções locais de E, em que a métrica g assume a sua forma padrão. Para uma métrica nas fibras qualquer, a existência de tais trivializações locais compatíveis é garantida pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (veja a Proposição 1.5 ou [AM, Proposition 3.1.2, pp. 162-164]).

(b) Se o tensor σ for antissimétrico e não-degenerado (o que requer que r seja par), com forma padrão $\boldsymbol{\sigma}$ dada pela matriz

$$\mathbb{J} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1_{r/2} \\ -1_{r/2} & 0 \end{pmatrix}\,.$$

[13] Neste exemplo, identificamos a fibra típica $\mathbb{E}$ com $\mathbb{R}^r$ e o grupo geral linear $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ com o grupo de matrizes $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$.
[14] Neste exemplo, reaproveitamos as letras p e q, já que os seus valores no sentido empregado anteriormente, i.e., como índices de covariância, estão fixados como sendo iguais a 0 e 2, respectivamente.

ele define uma **forma simplética nas fibras** de E; neste caso, escrevemos ω ao invés de σ. O grupo estrutural é o grupo simplético $\mathrm{Sp}(r,\mathbb{R})$. Notamos que uma trivialização local de E compatível com uma forma simplética ω nas fibras de E, em conjunto com uma base canônica da fibra típica $\mathbb{E}$, corresponde exatamente a uma base canônica de seções locais de E, em que a forma simplética ω assume a sua forma padrão. Para uma forma simplética nas fibras qualquer, a existência de tais trivializações locais compatíveis pode ser garantida por um análogo do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (veja [AM, Proposition 3.1.2, pp. 162-164]).

No caso especial em que $E = TM$, onde ω é uma 2-forma, dizemos que ω é uma **forma quase simplética** sobre M e que é uma **forma simplética** sobre M se ela for fechada, i.e., se satisfizer a condição de integrabilidade[15] $d\omega = 0$. ◊

1.10 Exemplo Seja E um fibrado vetorial real de posto r [13] e seja $k=1$, $p_1=0$, $q_1=r$, o que corresponde a uma estrutura dada por um único campo σ de tensores covariantes de grau r. Se o tensor σ for antissimétrico e não-nulo, ele define uma **forma de volume nas fibras** de E; neste caso, escrevemos ω ao invés de σ. O grupo estrutural é o grupo especial linear $\mathrm{SL}(r,\mathbb{R})$. No caso especial em que $E = TM$, onde ω é uma n-forma, dizemos que ω é uma **forma de volume** sobre M.

1.11 Exemplo Seja E um fibrado vetorial real de posto r [13] e seja $k=1$, $p_1=1$, $q_1=1$, o que corresponde a uma estrutura dada por um único campo σ de tensores mistos de tipo $(1,1)$, ou seja, um campo σ de transformações lineares (ou de endomorfismos) de E. Neste caso, a questão é qual será a equação mínima satisfeita por σ_m em cada fibra E_m de E, a qual, devido ao postulado de trivialidade local, independe de m, pois é igual à equação mínima satisfeita pela forma padrão $\boldsymbol{\sigma}$ na fibra típica $\mathbb{E}$ de E. Em particular, temos que σ_m é semisimples para todo ponto m de M se e somente se $\boldsymbol{\sigma}$ for semisimples: neste caso, dizemos também que σ é semisimples.

(a) Se σ for uma involução (e tiver autovalor $+1$ com multiplicidade p e autovalor -1 com multiplicidade q, digamos, com $p+q = r$),[16] escrevemos I ao invés de σ e dizemos que I é uma **involução nas fibras** de E (de assinatura (p,q)), sendo que a forma padrão $\boldsymbol{\sigma}$ é dada pela mesma matriz η do exemplo anterior, e a equação mínima é $I^2 = 1$. O grupo estrutural é o produto cartesiano de dois grupos gerais lineares reais, $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$. Uma estrutura deste tipo corresponde a uma decomposição de E em soma direta de dois subfibrados vetoriais E^+, de posto p, e E^-, de posto q, definidos por $E^\pm = \{\, u\in E \mid Iu = \pm u\,\}$:

$$E = E^+ \oplus E^- \,.$$

De fato, para uma seção I suave de $\mathrm{L}(E) = \mathrm{End}(E) = T^1_1 E = E^*\otimes E$ satisfazendo $I^2 = 1$, a existência de trivializações locais compatíveis é equivalente ao requerimento de que E^+ e E^- sejam subfibrados vetoriais de E.

(b) Se σ for uma antiinvolução (o que requer que r seja par), escrevemos J ao invés de σ e dizemos que J é uma **antiinvolução nas fibras** de E, sendo que a forma padrão $\boldsymbol{\sigma}$ é dada pela mesma matriz $\mathbb{J}$ do exemplo anterior, e a equação mínima é $J^2 = -1$. O grupo estrutural é o grupo geral linear complexo $\mathrm{GL}(r/2,\mathbb{C})$. Uma estrutura deste tipo corresponde a uma estrutura de fibrado vetorial complexo em E e portanto é chamada de **estrutura complexa nas fibras** de E. Ela ainda induz uma decomposição da complexificação E^c de E em soma direta de dois subfibrados vetoriais $E^{(1,0)}$ e $E^{(0,1)}$

[15]Uma abordagem sistemática à questão da integrabilidade de estruturas adicionais em fibrados tangentes de variedades e, mais geralmente, de G-estruturas em variedades encontra-se na Seção 4.4 do Capítulo 2.

[16]Mais uma vez, reaproveitamos as letras p e q, já que os seus valores no sentido empregado anteriormente, i.e., como índices de covariância, estão fixados como sendo iguais a 1 e 1, respectivamente.

de E^c, o subfibrado $E^{(1,0)}$ dos **vetores holomorfos**e o subfibrado $E^{(0,1)}$ dos **vetores antiholomorfos**, definidos por $E^{(1,0)} = \{ u \in E^c \mid J^c u = iu \}$ e $E^{(0,1)} = \{ u \in E^c \mid J^c u = -iu \}$, onde J^c denota a complexificação de J:

$$E^c \;=\; E^{(1,0)} \oplus E^{(0,1)} \;.$$

De fato, para uma seção J suave de $\mathrm{L}(E) = \mathrm{End}(E) = T_1^1 E = E^* \otimes E$ satisfazendo $J^2 = -1$, a existência de trivializações locais compatíveis é equivalente ao requerimento de que E admita trivializações locais no sentido de fibrados vetoriais complexos, ou ainda, ao requerimento de que $E^{(1,0)}$ e $E^{(0,1)}$ sejam subfibrados vetoriais de E^c.

No caso especial em que $E = TM$, dizemos que J é uma **estrutura quase complexa** sobre M e que é uma **estrutura complexa** sobre M se ela satisfizer a condição de integrabilidade[15] $N(J) = 0$, onde $N(J)$ é o tensor de torção de Nijenhuis de J (cuja definição se encontra no próximo item).

(c) Mais geralmente, se σ for semisimples, escrevemos R ao invés de σ, e a equação mínima é

$$(R - \lambda_1) \ldots (R - \lambda_k)(R^2 + \mu_1^2) \ldots (R^2 + \mu_l^2) \;=\; 0 \;, \tag{1.283}$$

onde os λ_j são os autovalores reais de R e os $\pm i\mu_j$ os autovalores imaginários de R, sendo que estes últimos formam pares complex conjugados (para eliminar qualquer ambiguidade, podemos adotar a convenção de que $\mu_j > 0$); denotaremos as multiplicidades correspondentes por m_j. O grupo estrutural é um produto cartesiano de grupos gerais lineares reais $\mathrm{GL}(m_j, \mathbb{R})$ para os autovalores reais λ_j e de grupos gerais lineares complexos $\mathrm{GL}(m_j, \mathbb{C})$ para os pares de autovalores imaginários $\pm i\mu_j$. Uma estrutura deste tipo induz uma decomposição da complexificação E^c de E em soma direta de subfibrados vetoriais $\hat{E}_j$ e $\hat{E}_j^{\pm}$ de E^c, de posto m_j, definidos por $\hat{E}_j = \ker(R^c - \lambda_j 1)$ para os autovalores reais λ_j e por $\hat{E}_j^{\pm} = \ker(R^c \mp i\mu_j 1)$ para os pares de autovalores imaginários $\pm i\mu_j$, onde R^c denota a complexificação de R, sendo que no caso dos autovalores reais, $\hat{E}_j$ é a complexificação E_j^c de um subfibrado vetorial $E_j = \ker(R - \lambda_j 1)$ de E, também de posto m_j. De fato, para uma seção R suave de $\mathrm{L}(E) = \mathrm{End}(E) = T_1^1 E = E^* \otimes E$ satisfazendo a equação (1.283), a existência de trivializações locais compatíveis é equivalente ao requerimento de que as multiplicidades m_j dos autovalores λ_j e $\pm i\mu_j$ de R, como funções sobre M, sejam localmente constantes, o que por sua vez é equivalente ao requerimento de que os $\hat{E}_j$ e $\hat{E}_j^{\pm}$ sejam subfibrados vetoriais de E^c, ou ainda, para os autovalores reais, de que os E_j sejam subfibrados vetoriais de E.

No caso especial em que $E = TM$, podemos associar a R, que é um campo tensorial sobre M de tipo $(1,1)$, um outro campo tensorial $N(R)$ sobre M, este de tipo $(1,2)$, definido por

$$N(R)(X,Y) \;=\; [RX,RY] - R[RX,Y] - R[X,RY] + R^2[X,Y] \;, \tag{1.284}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e chamado de **tensor de (torção de) Nijenhuis** associado a R, ou simplesmente a **torção de Nijenhuis** de R. De fato, verifica-se, a partir da definição (1.284), que $N(R)$ é $\mathfrak{F}(M)$-bilinear, isto é, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, vale

$$N(R)(fX, gY) \;=\; fg\, N(R)(X,Y) \;.$$

Ademais, é claro que $N(R)(X,Y)$ é antissimétrico em X e Y e portanto $N(R)$ é uma 2-forma sobre M a valores em TM. Como essa construção se estende naturalmente à complexificação $T^c M$ de TM, é facil verificar que a condição de integrabilidade[15] $N(R) = 0$ é equivalente à condição de que cada um dos subfibrados vetoriais $\hat{E}_j$ e $\hat{E}_j^{\pm}$ de E^c, assim como, para os autovalores reais, cada um dos subfibrados vetoriais E_j de E, seja involutivo.

A notação R, no caso (c), refere-se ao fato de que tais estruturas são encontradas como "matrizes R clássicas", no estudo de sistemas integráveis, onde a condição de integrabilidade $N(R) = 0$ é conhecida como "equação de Yang-Baxter clássica". Para maiores detalhes, veja [CP]. ◊

1.12 Exemplo Seja E um fibrado vetorial e seja $k = 1$, $p_1 = 1$, $q_1 = 2$, o que corresponde a uma estrutura dada por um único campo σ de tensores mistos de tipo $(1, 2)$, transformando E em um **fibrado de álgebras** … sobre M. Dependendo do tipo de álgebra (a ser indicado pelos adjetivos a serem substituídos no lugar dos …), usamos nomes e notações diferentes para σ. Por exemplo, no caso de um fibrado de álgebras associativas, substituímos σ por $\cdot$ ou por uma simples juxtaposição e dizemos que define um **produto** ou uma **multiplicação nas fibras** de E, enquanto que no caso de um fibrado de álgebras de Lie, substituímos σ por $[.,.]$ e dizemos que define um **comutador** ou um **colchete nas fibras** de E, etc.. Por exemplo, se F for um fibrado vetorial qualquer sobre M, temos que

- $\bigotimes F = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigotimes^p F$ é um fibrado de álgebras associativas sobre M em relação ao produto tensorial $\otimes$ nas fibras, chamado o **fibrado dos tensores** sobre F;
- $\bigvee F = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigvee^p F$ é um fibrado de álgebras associativas comutativas sobre M em relação ao produto simétrico $\vee$ nas fibras, chamado o **fibrado dos tensores simétricos** sobre F;
- $\bigwedge F = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p F$ é um fibrado de álgebras associativas comutativas graduadas sobre M em relação ao produto exterior $\wedge$ nas fibras, chamado o **fibrado dos tensores antissimétricos** ou **fibrado exterior** ou **fibrado de Grassmann** sobre F;
- $\mathrm{L}(F) = \mathrm{End}(F) = T_1^1 F = F^* \otimes F$ é um fibrado de álgebras associativas sobre M em relação ao produto nas fibras e, ao mesmo tempo, um fibrado de álgebras de Lie em relação ao comutador $[.,.]$ nas fibras.

Em qualquer caso, o grupo estrutural é o grupo dos automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. ◊

Nota-se que em alguns casos, tais como os do Exemplo 1.9, a condição de trivialidade local é automática e poderia ter sido omitida da definição. Porém, nos casos dos Exemplos 1.10, 1.11 e 1.12, isso não é verdade em geral. Em particular, considere o fibrado vetorial trivial $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, munido de um comutador definido por

$$[(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y})] = (t\,,\, f(t)\, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \qquad \text{para } t \in \mathbb{R},\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3\,,$$

onde $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $f(0) = 0$ e $f(t) \neq 0$ para $t \neq 0$. Então cada fibra E_t de E é uma álgebra de Lie, que é abeliana quando $t = 0$ e isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$ quando $t \neq 0$, de modo que não existe trivialização local admissível de E em torno de 0 transformando este comutador em um comutador constante na fibra típica $\mathbb{R}^3$.

Combinando estruturas adicionais dos tipos descritos nos exemplos anteriores, obtêm-se outros exemplos importantes, tais como uma **métrica hermitiana** ou **métrica pseudo-hermitiana** $\langle .|. \rangle$ **nas fibras** de um fibrado vetorial complexo E, de posto r: considerando E como fibrado vetorial real, de posto $2r$, munido de uma estrutura complexa nas fibras J (cuja ação representa multiplicação dos vetores em cada fibra por i), combinamos esta com uma métrica nas fibras g, riemanniana ou pseudo-riemanniana de assinatura $(2p, 2q)$, e uma forma simplética nas fibras ω, definindo g como a parte real e ω como a parte imaginária de $\langle .|. \rangle$,

$$\langle u|v \rangle = g(u, v) + i\, \omega(u, v)\,.$$

Isso requer que g e ω devem ser compatíveis com J, conforme

$$g(Ju,Jv) = g(u,v) \quad , \quad \omega(Ju,Jv) = \omega(u,v) \; ,$$

e que devem ser relacionadas por

$$\omega(u,v) = g(Ju,v) \quad , \quad g(u,v) = \omega(u,Jv) \; ,$$

para que valha[17] $\langle u|Jv\rangle = i\langle u|v\rangle = -\langle Ju|v\rangle$. Assim, cada um dos três campos tensoriais J, g, ω é completamente determinado pelos outros dois. O grupo estrutural é o grupo unitário $\mathrm{U}(r)$ ou o grupo pseudounitário $\mathrm{U}(p,q)$ com $p+q = r$.

No caso especial em que $E = TM$ e se a métrica for (positiva ou negativa) definida, dizemos que $\langle .|.\rangle$ é uma **métrica quase kähleriana** sobre M e que é uma **métrica kähleriana** sobre M se J e ω satisfizerem as condições de integrabilidade[15] $N(J) = 0$ e $\mathrm{d}\omega = 0$.

1.6.2 Conexões Lineares Compatíveis com Estruturas Adicionais

1.25 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$, munido de uma estrutura adicional $(\Sigma, \mathbf{\Sigma})$ como na Definição 1.24. Uma conexão linear D em E é chamada **compatível** com a estrutura adicional $(\Sigma, \mathbf{\Sigma})$ em E se, para todo campo vetorial X sobre M, vale

$$D_X \sigma_i = 0 \qquad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k \; , \tag{1.285}$$

i.e., se todas as seções σ_i forem covariantemente constantes em relação às respectivas conexões lineares induzidas por D em $T^{p_i}_{q_i}E$ (que, conforme convenção mencionada no final da Seção 1.3.2, também são denotadas por D).

Se expandirmos a conexão linear D em E em termos de uma base compatível $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções locais e_α de E e observarmos que a condição de compatibilidade significa que as componentes de cada uma das seções $\sigma_i \in \Gamma(T^{p_i}_{q_i}E)$ em relação à correspondente base induzida de seções locais de $T^{p_i}_{q_i}E$ devem ser funções constantes, podemos aplicar as equações (1.69) e (1.101), em conjunto com as definições (1.279) e (1.280), para concluir que a conexão linear D é compatível com a estrutura adicional $(\Sigma, \mathbf{\Sigma})$ se e somente se a 1-forma A a valores matriciais constituída pelas suas formas de conexão locais A^α_β em relação a qualquer base compatível de seções locais toma valores na correspondente álgebra estrutural $\mathfrak{g}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbb{E})$. Neste caso, segue da equação de estrutura (1.132) que a 2-forma F a valores matriciais constituída pelas correspondentes formas de curvatura locais F^α_β também toma valores na correspondente álgebra estrutural $\mathfrak{g}_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbb{E})$.

Independentemente da escolha de bases compatíveis, temos

1.7 Proposição *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica/ $\mathbb{E}$, munido de uma estrutura adicional $(\Sigma, \mathbf{\Sigma})$ como na Definição 1.24 e de uma conexão linear compatível D.*

1. *O tensor de curvatura F de D é uma 2-forma a valores no fibrado de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma(E)$,[18] i.e., para todo ponto m de M e quaisquer dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale*

$$F(X,Y)_m \in \mathfrak{g}_\Sigma(E_m) \; . \tag{1.286}$$

[17] Seguimos a convenção de que formas sesquilineares são antilineares na primeira variável e lineares na segunda.
[18] O conceito de um fibrado de álgebras de Lie é definido no Exemplo 1.12.

2. *O transporte paralelo em relação a D preserva a estrutura, i.e., para toda curva $\gamma : I \to M$ em M, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e para $t, t' \in I$, o operador $T_{q_i}^{p_i} U_\gamma(t', t) : T_{q_i}^{p_i} E_{\gamma(t)} \to T_{q_i}^{p_i} E_{\gamma(t')}$ leva $\sigma_i(\gamma(t))$ em $\sigma_i(\gamma(t'))$. Em particular, para todo ponto m de M, o grupo de holonomia $\mathrm{Hol}_m(D)$ de D em m é um subgrupo do grupo estrutural:*

$$\mathrm{Hol}_m(D) \subset G_\Sigma(E_m) \, . \tag{1.287}$$

Capítulo 2

Fibrados e Conexões - Teoria Geral

No capítulo anterior, apresentamos os aspectos básicos da teoria de fibrados vetoriais e conexões lineares, passando no final a considerar fibrados vetoriais munidos de estruturas adicionais e de conexões lineares compatíveis com tais estruturas. Contudo, existem situações mais gerais, onde nós nos deparamos com fibrados sem nenhuma estrutura específica nas fibras, além da de uma variedade qualquer, ou com alguma estrutura adicional nas fibras que não é linear. O objetivo do presente capítulo é desenvolver um formalismo geral adequado para lidar com tais situações.

Como primeiro passo, vamos formular as definições pertinentes no contexto mais amplo possível: o de fibrados gerais. No entanto, este âmbito é demasiadamente geral. Em seguida, discutiremos o mesmo assunto num contexto mais específico que acaba constituindo um compromisso adequado entre generalidade suficiente para abranger todas as situações interessantes e especificidade suficiente para chegar a uma teoria rica: o de fibrados com grupo estrutural. Com esta motivação, veremos que é natural introduzir o conceito de fibrados principais e identificar fibrados com grupo estrutural como fibrados associados a algum fibrado principal. Para a teoria de fibrados e conexões em fibrados, esta abordagem pode ser considerada uma implementação do programa de Erlangen de Felix Klein, segundo o qual estruturas geométricas podem ser codificadas nos seus grupos de invariância.

2.1 Fibrados Gerais

2.1.1 Definições e Noções Básicas

A definição do conceito de um fibrado geral é uma generalização imediata da definição de fibrado vetorial, na forma dada na Definição 1.11, substituindo o espaço vetorial $\mathbb{E}$ como fibra típica por uma variedade Q qualquer e o grupo geral linear $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ de $\mathbb{E}$ pelo grupo $\mathrm{Diff}(Q)$ dos difeomorfismos de Q. O maior inconveniente desta substituição é o fato de que, ao contrário do grupo geral linear de um espaço vetorial, o grupo de difeomorfismos de uma variedade pode apenas formalmente ser visto como um grupo de Lie, principalmente porque é de dimensão infinita, sendo que, muitas vezes, ele não possui nenhuma estrutura de variedade razoável, muito menos de grupo de Lie.[1] Contudo, em algumas das definições básicas, os problemas que decorrem desta deficiência podem ser contornados adotando-se a seguinte convenção.

[1]Isso ocorre, em particular, quando a fibra típica não é compacta.

2.1 Definição Sejam M, Q_1, Q_2 e Q variedades. Uma aplicação

$$\tau : M \longrightarrow C^\infty(Q_1, Q_2)$$

é chamada **diferenciável** se a correspondente aplicação de avaliação

$$\begin{array}{ccc} M \times Q_1 & \longrightarrow & Q_2 \\ (m, q_1) & \longmapsto & \tau(m)(q_1) \end{array}$$

for diferenciável. De maneira análoga, uma aplicação

$$\tau : M \longrightarrow \mathrm{Diff}(Q)$$

é chamada **diferenciável** se as correspondentes aplicações de avaliação

$$\begin{array}{ccc} M \times Q & \longrightarrow & Q \\ (m, q) & \longmapsto & \tau(m)(q) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} M \times Q & \longrightarrow & Q \\ (m, q) & \longmapsto & \tau(m)^{-1}(q) \end{array}$$

forem diferenciáveis.

2.2 Definição Um **fibrado geral**, ou simplesmente **fibrado**, é uma quádrupla (E, M, π, Q) composta de

(i) uma variedade E chamada o **espaço total**,

(ii) uma variedade M chamada o **espaço base**,

(iii) uma aplicação diferenciável sobrejetora $\pi : E \to M$ chamada a **projeção**,

(iv) uma variedade Q chamada a **fibra típica** ou a **variedade modelo**,

e satisfazendo o postulado de **trivialidade local**: existem um recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M e uma família $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de difeomorfismos

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times Q \ , \tag{2.1}$$

com $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$ para todo $\alpha \in A$, chamados de **trivializações locais**, tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times Q \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times Q \tag{2.2}$$

é um difeomorfismo que pode ser representado por uma função diferenciável

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Diff}(Q) \ , \tag{2.3}$$

chamada a correspondente **função de transição**, conforme a fórmula

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m, q) \ = \ (m, \tau_{\alpha\beta}(m)(q)) \qquad \text{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta \, , \, q \in Q \ . \tag{2.4}$$

A seguir, especificaremos um fibrado (E, M, π, Q) dizendo que E é um fibrado sobre M com projeção π e fibra típica Q. Para todo ponto m de M, $E_m = \pi^{-1}(\{m\})$ é a **fibra de E sobre m**. Finalmente, uma família $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ com as propriedades enunciadas acima também é chamada um **atlas de trivializações locais** de E, e adotamos a terminologia usual de atlas equivalentes, de atlas maximais e de **trivializações locais admissíveis**, como no caso de fibrados vetoriais.

Note que sempre podemos escrever o espaço total de um fibrado geral como a união disjunta das suas fibras, o que deixa óbvio qual é a definição da projeção π:

$$E = \bigcup_{m \in M} E_m \qquad , \qquad \pi(u) = m \text{ para } u \in E_m \,. \tag{2.5}$$

Esta decomposição pode ser vista como uma folheação regular de E por variedades E_m mergulhadas em E como subvariedades e todas difeomorfas à variedade modelo Q, sendo que para todo ponto m de M, podemos escolher uma trivialização admissível $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times Q$ de E sobre uma vizinhança aberta U de m em M cuja restrição à fibra E_m proporciona um difeomorfismo

$$\Phi|_{E_m} : E_m \longrightarrow Q \,. \tag{2.6}$$

Para cálculos explícitos, é útil observar que o espaço total E de um fibrado geral, visto como variedade, possui um tipo particular de cartas, construídas a partir de uma carta do espaço base M, uma carta da fibra típica Q e uma trivialização local de E. Usando a notação de coordenadas locais, podemos formular esta construção da seguinte forma: combinando um sistema de coordenadas locais x^μ em M e um sistema de coordenadas locais q^i em Q com uma trivialização local de E sobre M, obtemos um sistema de coordenadas locais (x^μ, q^i) em E que chamaremos de **coordenadas locais adaptadas**, onde "adaptadas" significa "adaptadas à estrutura de E como fibrado sobre M, em relação à projeção π". Ademais, combinando uma transformação de coordenadas locais $x^\mu \rightsquigarrow x'^\kappa$ em M e uma transformação de coordenadas locais $q^i \rightsquigarrow q'^k$ em Q com uma mudança de trivialização local de E sobre M, obtemos uma transformação de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i) \rightsquigarrow (x'^\kappa, q'^k)$ em E, onde

$$x'^\kappa = x'^\kappa(x^\mu) \qquad \text{e} \qquad q'^k = q'^k(x^\mu, q^i) \,. \tag{2.7}$$

Como no caso de fibrados vetoriais, podemos definir a restrição de um fibrado geral a um subconjunto aberto qualquer do seu espaço base: dado qualquer subconjunto aberto N de uma variedade M, um fibrado geral E sobre M com projeção π induz, de forma natural, um fibrado geral $E|_N$ sobre N com projeção π_N chamado a **restrição** de E a N, definido por $E|_N = \pi^{-1}(N)$ e $\pi_N = \pi|_{E|_N}$. (As trivializações locais admissíveis de $E|_N$ são obtidas das trivializações locais admissíveis de E por restrição.) Novamente, essa restrição é um caso especial da construção do "pull-back" de um fibrado geral a ser apresentada logo adiante. Também como no caso de fibrados vetoriais, o exemplo mais simples de um fibrado geral sobre uma variedade M é o **fibrado trivial padrão** definido por

$$E = M \times Q \qquad \text{e} \qquad \pi = \mathrm{pr}_1 \,. \tag{2.8}$$

sendo que para um fibrado geral ser chamado de trivial, basta que seja apenas isomorfo a este. Portanto, precisamos mais uma vez esclarecer quais são as aplicações compatíveis com a estrutura de fibrado: essa definição coincide com a primeira parte da Definição 1.10:

2.3 Definição Sejam E e F fibrados gerais sobre variedades M e N com projeções $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to N$ e fibras típicas Q_E e Q_F, respectivamente. Um **morfismo** ou **homomorfismo de fibrados** de E em F é um par $(f, \check{f})$ de aplicações diferenciáveis $f : E \to F$ e $\check{f} : M \to N$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Também dizemos que f é um morfismo ou homomorfismo de fibrados **sobre** $\check{f}$ ou que f **recobre** $\check{f}$. Se $M = N$ e $\check{f}$ é a identidade, dizemos que f é um morfismo ou homomorfismo **estrito**.

Novamente, esta definição simplesmente afirma que um homomorfismo de fibrados é uma aplicação diferenciável f entre os espaços totais que **preserva fibras**, i.e., tal que para $e_1, e_2 \in E$, vale

$$\pi_E(e_1) \;=\; \pi_E(e_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_F(f(e_1)) \;=\; \pi_F(f(e_2))\;. \tag{2.10}$$

De fato, neste caso, a aplicação $\check{f} : M \to N$ pode ser construída a partir da aplicação $f : E \to F$ pondo

$$\check{f}(\pi_E(e)) \;=\; \pi_F(f(e)) \qquad \text{para } e \in E\;. \tag{2.11}$$

Também afirma que se $f : E \to F$ é um homomorfismo de fibrados sobre $\check{f} : M \to N$ e se escolhermos trivializações admissíveis $\Phi : \pi_E^{-1}(U) \to U \times Q_E$ de E e $\Psi : \pi_F^{-1}(V) \to V \times Q_F$ de F sobre abertos U de M e V de N, respectivamente, tais que $\check{f}(U) \subset V$ (caso contrário, substituímos o aberto U pelo aberto $U \cap \check{f}^{-1}(V)$, desde que este não seja vazio), a aplicação

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} :\; U \times Q_E \;\longrightarrow\; V \times Q_F \tag{2.12}$$

pode ser escrita na forma

$$(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})(m,q) \;=\; (\check{f}(m),\, \tau_{\Psi,\Phi}(f)(m)(q)) \qquad \text{para } m \in U,\, q \in Q_E \tag{2.13}$$

com uma aplicação diferenciável

$$\tau_{\Psi,\Phi}(f) :\; U \;\longrightarrow\; C^\infty(Q_E, Q_F)\;. \tag{2.14}$$

Dessa noção de morfismo ou homomorfismo, decorre da forma usual a de **isomorfismo** entre fibrados (estrito ou não) e de **automorfismo** de um fibrado. No caso não estrito, podemos concluir pelo menos que um isomorfismo $f : E \to F$ de fibrados induz um difeomorfismo $\check{f} : M \to N$ das respectivas variedades base. Em particular, um fibrado geral E sobre M com fibra típica Q é chamado **trivial** se existe um isomorfismo estrito de fibrados $f : E \to M \times Q$ e, para qualquer subconjunto aberto N de M, é chamado **trivial sobre** N se existe um isomorfismo estrito de fibrados $f_N : E|_N \to N \times Q$, sendo que qualquer tal isomorfismo estrito de fibrados é chamado uma **trivialização** de E no primeiro caso e uma **trivialização** de E **sobre** N ou, quando não queremos especificar N explicitamente, uma **trivialização local** de E no segundo caso.

Note que sob composição, os automorfismos de um fibrado geral E sobre uma variedade M formam um grupo que denotaremos por $\mathrm{Aut}(E)$ e os automorfismos estritos formam um subgrupo que denotaremos por $\mathrm{Aut}_s(E)$; ademais, a aplicação que associa ao automorfismo f de E o difeomorfismo $\check{f}$ de M é um homomorfismo de grupos tal que obtemos a seguinte sequência exata de grupos:

$$\{1\} \;\longrightarrow\; \mathrm{Aut}_s(E) \;\longrightarrow\; \mathrm{Aut}(E) \;\longrightarrow\; \mathrm{Diff}(M) \;\longrightarrow\; \{1\}\;. \tag{2.15}$$

Se E for trivial, esta sequência cinde, i.e., $\mathrm{Aut}(E)$ é o produto semidireto de $\mathrm{Aut}_s(E) \cong C^\infty(M, \mathrm{Diff}(Q))$ com $\mathrm{Diff}(M)$.

Finalmente, o conceito de seção também é o mesmo que em fibrados vetoriais.

2.4 Definição Seja E um fibrado geral sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica Q. Uma **seção** de E é uma aplicação $\varphi : M \to E$ que satisfaz $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$, ou seja,

$$\varphi(m) \in E_m \qquad \text{para } m \in M\;. \tag{2.16}$$

Mais geralmente, uma **seção** de E **sobre** um aberto N de M é uma seção de $E|_N$. Quando não queremos especificar N explicitamente, falamos de uma **seção local** de E ou, se N for vizinhança de um determinado ponto m_0 de M, de uma **seção local** de E **em torno de** m_0.

Novamente, não impomos nenhuma condição específica “a priori” sobre como $\varphi(m)$ deve depender de m. A condição mais natural é exigir que φ seja diferenciável, mas nada impede considerar outras opções, por exemplo seções que são apenas contínuas. Como antes, consideraremos aqui apenas seções de classe C^∞, e denotaremos o “espaço” de todas as seções de classe C^∞ de um fibrado E sobre M por $\Gamma(E)$ ou, quando queremos enfatizar o grau de diferenciabilidade, por $\Gamma^\infty(E)$. Se N é um aberto de M, escrevemos $\Gamma(N,E)$ em vez de $\Gamma(E|_N)$ ou $\Gamma^\infty(N,E)$ em vez de $\Gamma^\infty(E|_N)$.

Quando E é o fibrado trivial padrão $M \times Q$, podemos escrever $\varphi(m) = (m, f(m))$ e assim estabelecer uma bijeção $\Gamma(M \times Q) \cong C^\infty(M,Q)$. Portanto, seções de fibrados generalizam aplicações entre variedades.

Vale enfatizar que, ao contrário de um fibrado vetorial que sempre possui a seção zero, um fibrado geral pode não admitir seções globais. Como veremos mais adiante, isso ocorre, por exemplo, no caso de fibrados principais não-triviais.

2.1.2 Construções com Fibrados

O método mais elementar de construir um novo fibrado a partir de dois fibrados dados é o mesmo que no caso de variedades: o produto cartesiano.

2.5 Definição O **produto cartesiano** de dois fibrados gerais (E_1, M_1, π_1, Q_1) e (E_2, M_2, π_2, Q_2) é o fibrado geral $(E_1 \times E_2, M_1 \times M_2, \pi_1 \times \pi_2, Q_1 \times Q_2)$.

A verificação de que esta prescrição proporciona um fibrado é simples: Se $\Phi_1 : \pi_1^{-1}(U_1) \to U_1 \times Q_1$ e $\Phi_2 : \pi_2^{-1}(U_2) \to U_2 \times Q_2$ são trivializações admissíveis de E_1 e de E_2 sobre abertos U_1 de M_1 e U_2 de M_2, então a aplicação

$$(\Phi_1 \times \Phi_2) : (\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(U_1 \times U_2) \longrightarrow (U_1 \times U_2) \times (Q_1 \times Q_2)$$

dada por

$$(\Phi_1 \times \Phi_2)(e_1, e_2) = \big((\pi_1(e_1), \pi_2(e_2)), (\mathrm{pr}_2(\Phi_1(e_1)), \mathrm{pr}_2(\Phi_2(e_2)))\big)$$

é uma trivialização de $E_1 \times E_2$ sobre o aberto $U_1 \times U_2$ de $M_1 \times M_2$; obviamente, essa construção respeita compatibilidade de trivializações.

2.1 Exemplo Se M_1 e M_2 são variedades então o fibrado tangente $T(M_1 \times M_2)$ da variedade produto $M_1 \times M_2$ pode ser naturalmente identificado com o produto cartesiano $TM_1 \times TM_2$ dos fibrados tangentes TM_1 e TM_2: usando as aplicações tangentes às projeções canônicas $\mathrm{pr}_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\mathrm{pr}_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$, identificamos um vetor tangente $v \in T_{(m_1,m_2)}(M_1 \times M_2)$ com o par de vetores tangentes $(T_{(m_1,m_2)}\,\mathrm{pr}_1 \cdot v, T_{(m_1,m_2)}\,\mathrm{pr}_2 \cdot v) \in T_{m_1}M_1 \times T_{m_2}M_2$. ◊

Quando a base dos dois fibrados é idêntica há um outro tipo de produto que providencia um novo fibrado sobre a mesma base, ao invés de um fibrado sobre o produto cartesiano de duas cópias da base.

2.6 Definição O **fibrado produto** de dois fibrados gerais (E_1, M, π_1, Q_1) e (E_2, M, π_2, Q_2) sobre a mesma variedade base M é o fibrado $(E, M, \pi, Q_1 \times Q_2)$ sobre M com espaço total $E = E_1 \times_M E_2$ definido por

$$E_1 \times_M E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}, \tag{2.17}$$

e projeção $\pi = \pi_{E_1 \times_M E_2}$ definida por

$$\pi_{E_1 \times_M E_2}(e_1, e_2) \;=\; \pi_1(e_1) \;=\; \pi_2(e_2)\;. \tag{2.18}$$

Novamente, é fácil verificar que esta prescrição proporciona um fibrado: Se $\Phi_1 : \pi_1^{-1}(U) \to U \times Q_1$ e $\Phi_2 : \pi_2^{-1}(U_2) \to U \times Q_2$ são trivializações admissíveis de E_1 e de E_2 sobre o mesmo aberto U de M, então a aplicação

$$(\Phi_1 \times_U \Phi_2) : \pi_{E_1 \times_M E_2}^{-1}(U) \;\longrightarrow\; U \times (Q_1 \times Q_2)$$

dada por

$$(\Phi_1 \times_U \Phi_2)(e_1, e_2) \;=\; \big(\pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\,,\, (\mathrm{pr}_2(\Phi_1(e_1)), \mathrm{pr}_2(\Phi_2(e_2)))\big)$$

é uma trivialização de $E_1 \times_M E_2$ sobre o mesmo aberto U de M; obviamente, essa construção respeita compatibilidade de trivializações. Note que se E_1 e E_2 são fibrados vetoriais sobre M, então o fibrado produto $E_1 \times_M E_2$ nada mais é do que a soma direta ou soma de Whitney $E_1 \oplus E_2$ de E_1 e E_2. Neste sentido, o fibrado produto constitui uma generalização da soma direta ou soma de Whitney ao caso não-linear.

Quanto a técnicas mais sofisticadas para construir novos fibrados a partir de fibrados dados, veremos mais adiante que métodos tais como a passagem de fibrados principais para fibrados associados e, reciprocamente, a passagem de fibrados vetoriais, possivelmente munidos de alguma estrutura adicional, para os pertinentes fibrados de referenciais proporcionam mecanismos que substituem e até mesmo generalizam as construções funtoriais para fibrados vetoriais discutidas no Capítulo 1. Como estas, são métodos que agem sobre as fibras e deixam a variedade base inalterada. Por outro lado, a construção do "pull-back" de um fibrado, que é o mecanismo padrão para substituir a variedade base por outra sem afetar as fibras, funciona para qualquer tipo de fibrado, vetorial ou não.

Brevemente, dados um fibrado geral E sobre uma variedade M com projeção π_E e uma aplicação diferenciável $\phi : N \to M$ de uma outra variedade N em M, consideremos o conjunto

$$\phi^* E \;=\; \{\,(n,e) \in N \times E \mid \phi(n) = \pi_E(e)\,\}\;. \tag{2.19}$$

Como antes, denotamos a restrição da primeira projeção $\mathrm{pr}_1 : N \times E \to N$ a $\phi^* E$ por $\pi_{\phi^* E}$ e a restrição da segunda projeção $\mathrm{pr}_2 : N \times E \to E$ a $\phi^* E$ por $\hat{\phi}$ para obter o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \phi^* E \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d, "\pi_{\phi^* E}"'] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ N \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd} \tag{2.20}$$

Novamente, cada trivialização admissível $\Phi : E|_U \to U \times Q$ de E sobre um aberto U de M induz uma trivialização $\phi^*\Phi : \phi^* E|_{\phi^{-1}(U)} \to \phi^{-1}(U) \times Q$ de $\phi^* E$ sobre o aberto $\phi^{-1}(U)$ de N definida da maneira óbvia: se, para $m \in U$ e $n \in \phi^{-1}(U)$, $\Phi_m : E_m \to Q$ denota a restrição de Φ à fibra E_m de E sobre m e $(\phi^*\Phi)_n : (\phi^* E)_n \to Q$ denota a restrição de $\phi^*\Phi$ à fibra $(\phi^* E)_n$ de $\phi^* E$ sobre n, então

$$(\phi^* E)_n \;=\; E_{\phi(n)} \qquad \text{e} \qquad (\phi^*\Phi)_n \;=\; \Phi_{\phi(n)}\;. \tag{2.21}$$

Logo, a função de transição $\tau^E_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(Q)$ entre duas trivializações admissíveis Φ_α de E sobre U_α e Φ_β de E sobre U_β determina a função de transição $\tau^{\phi^* E}_{\alpha\beta} : \phi^{-1}(U_\alpha) \cap \phi^{-1}(U_\beta) \to \mathrm{Diff}(Q)$ entre as trivializações induzidas $\phi^*\Phi_\alpha$ de $\phi^* E$ sobre $\phi^{-1}(U_\alpha)$ e $\phi^*\Phi_\beta$ de $\phi^* E$ sobre $\phi^{-1}(U_\beta)$ conforme

$$\tau^{\phi^* E}_{\alpha\beta} \;=\; \tau^E_{\alpha\beta} \circ \phi\;. \tag{2.22}$$

Portanto, como $\tau^E_{\alpha\beta}$ e ϕ são diferenciáveis, a Definição 2.1 implica que $\tau^{\phi^*E}_{\alpha\beta}$ também é.

2.7 Definição Dados um fibrado geral E sobre uma variedade M com projeção π_E e uma aplicação diferenciável $\phi : N \to M$ de uma outra variedade N em M, o fibrado geral ϕ^*E sobre N com projeção π_{ϕ^*E} assim construído é chamado o **pull-back** de E **para** N **via** ϕ, e o homomorfismo de fibrados gerais $\hat{\phi}$ sobre ϕ assim construído é chamado o **levantamento canônico** de ϕ (para E).

Como antes, a maneira mais concisa e intuitiva (se bem que incompleta) de visualizar essa construção é notar que as fibras dos dois fibrados são idênticas: a mudança da variedade base significa apenas um reetiquetamento das fibras:

$$(\phi^*E)_n \;=\; E_{\phi(n)} \qquad \text{para } n \in N\,. \tag{2.23}$$

As seções de ϕ^*E são também chamadas **seções de** E **ao longo de** ϕ.

2.2 Exemplo O fibrado produto de dois fibrados (E_1, M, π_1, Q_1) e (E_2, M, π_2, Q_2) sobre a mesma variedade base M é o pull-back do seu produto cartesiano pela aplicação diagonal $\Delta : M \to M \times M$:

$$E_1 \times_M E_2 \;=\; \Delta^*(E_1 \times E_2)\,. \tag{2.24}$$

Reciprocamente, o produto cartesiano de dois fibrados (E_1, M_1, π_1, Q_1) e (E_2, M_2, π_2, Q_2) é o fibrado produto dos seus pull-backs pelas respectivas projeções $\mathrm{pr}_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\mathrm{pr}_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$:

$$E_1 \times E_2 \;=\; \mathrm{pr}_1^*(E_1) \times_{M_1 \times M_2} \mathrm{pr}_2^*(E_2)\,. \tag{2.25}$$

◊

2.1.3 Fibrado Vertical

O fibrado vertical de um fibrado dado é um subfibrado vetorial do fibrado tangente ao espaço total que pode ser obtido como o núcleo da aplicação tangente à projeção ou, equivalentemente, como o subfibrado tangente à folheação pelas fibras.

2.8 Definição Seja E um fibrado geral sobre M com projeção $\pi : E \to M$. Para todo ponto e do espaço total E, definimos

$$V_eE \;=\; \ker(T_e\pi)\,. \tag{2.26}$$

Este subepaço vetorial de T_eE, chamado o **espaço vertical** em e, coincide com o espaço tangente à fibra $E_{\pi(e)}$ de E passando por e:

$$V_eE \;=\; T_e(E_{\pi(e)})\,. \tag{2.27}$$

Como é de costume, o **fibrado vertical** VE é a união disjunta

$$VE \;=\; \bigcup_{e \in E} V_eE \tag{2.28}$$

de todos os espaços verticais e é um fibrado vetorial sobre E. Na verdade, o fato de que VE é um subfibrado vetorial do fibrado tangente TE do espaço total E pode ser provado observando que dada uma trivialização admissível $\Phi : E|_U \to U \times Q$ de E sobre um aberto U de M, a sua aplicação tangente

$$T\Phi : TE\big|_{E|_U} = T(E|_U) \;\longrightarrow\; T(U \times Q) = \mathrm{pr}_1^*(TM|_U) \oplus \mathrm{pr}_2^*(TQ)$$

é um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre Φ que leva $VE\big|_{E|_U} = V(E|_U)$ para $\{0\} \oplus \mathrm{pr}_2^*(TQ)$.

Para cálculos explícitos, observamos que um sistema de coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i) de E induz um sistema de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i, \dot{q}^i)$ de VE e que uma transformação de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i) \rightsquigarrow (x'^\kappa, q'^k)$ em E (veja a equação (2.7)) induz uma transformação de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i, \dot{q}^i) \rightsquigarrow (x'^\kappa, q'^k, \dot{q}'^k)$ em VE, onde

$$\dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q^i}\, \dot{q}^i \,. \tag{2.29}$$

2.1.4 Fibrado dos Jatos de Primeira Ordem

A idéia atrás da construção do fibrado dos jatos de primeira ordem de um fibrado dado é que as suas seções (mais exatamente suas seções holônomas em relação à projeção fonte) descrevem as "derivadas de primeira ordem" das seções do fibrado original.

2.9 Definição Seja E um fibrado geral sobre M com projeção $\pi : E \to M$. Para todo ponto e do espaço total E, com $m = \pi(e) \in M$, definimos

$$J_eE = \{ u \in \mathrm{L}(T_mM, T_eE) \mid T_e\pi \circ u = \mathrm{id}_{T_mM} \} \,. \tag{2.30}$$

Este conjunto é um subepaço afim do espaço vetorial $\mathrm{L}(T_mM, T_eE)$ de todas as aplicações lineares de T_mM para T_eE, chamado o **espaço dos jatos** (de primeira ordem) de E em e. O correspondente espaço vetorial de diferenças é

$$\vec{J}_eE = \mathrm{L}(T_mM, V_eE) = \{ u \in \mathrm{L}(T_mM, T_eE) \mid T_e\pi \circ u = 0 \} \,, \tag{2.31}$$

chamado o **espaço dos jatos linearizados** (de primeira ordem) de E em e.

Como é de costume, o **fibrado dos jatos** (de primeira ordem) JE é a união disjunta

$$JE = \bigcup_{e \in E} J_eE \tag{2.32}$$

de todos os espaços dos jatos (de primeira ordem) e é um fibrado afim sobre E, enquanto que o **fibrado dos jatos linearizados** (de primeira ordem) é a união disjunta

$$\vec{J}E = \bigcup_{e \in E} \vec{J}_eE \tag{2.33}$$

de todos os espaços dos jatos linearizados (de primeira ordem) e é um fibrado vetorial sobre E. Na verdade, o fato de que JE é um subfibrado afim e $\vec{J}E$ um subfibrado vetorial do fibrado vetorial

$$\mathrm{L}(\pi^*(TM), TE) \cong \pi^*(T^*M) \otimes TE \tag{2.34}$$

sobre E pode ser provado observando que, dada uma trivialização admissível $\Phi : E|_U \to U \times Q$ de E sobre um aberto U de M, o produto tensorial do seu levantamento canônico (para T^*M)

$$\hat{\Phi} : \pi^*(T^*M)\big|_{E|_U} \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*(T^*M)\big|_{U \times Q} = \mathrm{pr}_1^*(T^*M|_U)$$

com a sua aplicação tangente

$$T\Phi : TE\big|_{E|_U} \longrightarrow T(U \times Q) = \mathrm{pr}_1^*(TM|_U) \oplus \mathrm{pr}_2^*(TQ)$$

proporciona um isomorfismo

$$\hat{\Phi} \otimes T\Phi : (\pi^*(T^*M) \otimes TE)\big|_{E|_U} \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*((T^*M \otimes TM)|_U) \oplus (\mathrm{pr}_1^*(T^*M|_U) \otimes \mathrm{pr}_2^*(TQ))$$

de fibrados vetoriais sobre Φ que leva $JE\big|_{E|_U}$ para $\{\mathrm{id}\} \oplus (\mathrm{pr}_1^*(T^*M|_U) \otimes \mathrm{pr}_2^*(TQ))$ e $\vec{J}E\big|_{E|_U}$ para $\{0\} \oplus (\mathrm{pr}_1^*(T^*M|_U) \otimes \mathrm{pr}_2^*(TQ))$. Em particular, temos explicitamente

$$\vec{J}E \;\cong\; \mathrm{L}(\pi^*(TM), VE) \;\cong\; \pi^*(T^*M) \otimes VE\,. \tag{2.35}$$

Uma propriedade importante do fibrado dos jatos é que admite duas projeções diferentes, a saber a **projeção alvo** (“target projection”)

$$\tau : JE \longrightarrow E \tag{2.36}$$

dada por $\tau(u) = e$ para $u \in J_eE$ e a **projeção fonte** (“source projection”)

$$\sigma : JE \longrightarrow M \tag{2.37}$$

que é sua composição com a projeção original: $\sigma = \pi \circ \tau$. O mesmo vale para o fibrado dos jatos linearizados $\vec{J}E$.[2] Como já vimos, JE é um fibrado afim e $\vec{J}E$ é um fibrado vetorial sobre E, i.e., com respeito à projeção alvo, mas ambos são apenas fibrados gerais sobre M, i.e., com respeito à projeção fonte – exceto quando E mesmo tiver alguma estrutura adicional.

Para esclarecer a relação entre seções de JE e derivadas de seções de E já mencionada no início, observe que dado qualquer ponto m de M e qualquer seção local φ de E, definida em alguma vizinhança aberta U de m, com $e = \varphi(m) \in E$, a aplicação tangente $T_m\varphi \in \mathrm{L}(T_mM, T_eE)$ a φ em m pertence ao subespaço afim J_eE de $\mathrm{L}(T_mM, T_eE)$, pois

$$T_e\pi \circ T_m\varphi \;=\; T_m(\varphi \circ \pi) \;=\; T_m(\mathrm{id}_U) \;=\; \mathrm{id}_{T_mM}\;.$$

Destarte, escrevemos $j_m\varphi \in J_eE$ em vez de $T_m\varphi \in \mathrm{L}(T_mM, T_eE)$ e chamamos $j_m\varphi$ o **jato** (de primeira ordem) ou a **derivada de φ no ponto m**. Deixando m percorrer U, vemos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} j\varphi : & U & \longrightarrow & JE|_U \\ & m & \longmapsto & j_m\varphi \end{array}$$

é uma seção de JE sobre U, em relação à projeção fonte, que chamamos o **jato** (de primeira ordem) ou a **derivada de φ**: realmente, derivadas de seções (locais) de E são seções (locais) de JE.

Reciprocamente, qualquer ponto de JE pode ser representado como o jato $j_m\varphi$ de alguma seção local φ de E em torno de m. De fato, seja $u \in JE$, $e = \tau(u) \in E$ e $m = \sigma(u) = \pi(e) \in M$; então usando uma trivialização admissível $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times Q$ de E sobre alguma vizinhança aberta U de m e sua aplicação tangente $T\Phi : TE|_{\pi^{-1}(U)} \to \mathrm{pr}_1^*(TM|_U) \oplus \mathrm{pr}_2^*(TQ)$, escrevemos $\Phi(e) = (m, q)$ e $T_e\Phi \circ u = \mathrm{id}_{T_mM} \oplus v$ com $q \in Q$ e $v \in \mathrm{L}(T_mM, T_qQ)$. Usando o fato de que existe uma aplicação diferenciável $f : U \to Q$ tal que $f(m) = q$ e $T_mf = v$, podemos definir uma seção φ de E sobre U por $\varphi = \Phi^{-1} \circ (\mathrm{id}_U \times f)$ que satisfaz $\varphi(m) = e$ e $j_m\varphi = u$.

[2] A presença de duas projeções é uma consequência direta de que estamos lidando com fibrados sobre uma variedade base (E, no caso) que por sua vez é o espaço total de um fibrado sobre outra variedade base (M, no caso): o mesmo também vale para TE e VE.

Por outro lado, cabe ressaltar que nem toda seção (local) de JE pode ser representado como a derivada $j\varphi$ de alguma seção (local) φ de E. De fato, toda seção (local) ψ de JE induz uma seção (local) φ de E, dada por $\varphi = \tau \circ \psi$, mas é claro que, em geral, não vale $\psi = j\varphi$. As seções (locais) de JE que são da forma $j\varphi$ para alguma seção (local) φ de E são chamadas **holônomas.**

Na discussão anterior, consideramos seções (locais) de JE como fibrado sobre M, i.e., em relação à projeção fonte. Na próxima seção, também consideraremos seções Γ de JE como fibrado sobre E, i.e., em relação à projeção alvo, e veremos que estas podem ser interpretadas como conexões em E. Destarte, podemos resumir os diferentes tipos de projeções e de seções no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
JE \arrow[d, shift left, "\tau"] \arrow[dd, bend left=60, "\sigma"] \\
E \arrow[u, shift left, "\Gamma"] \arrow[d, shift left, "\pi"] \\
M \arrow[u, shift left, "\varphi"] \arrow[uu, bend left=60, "j\varphi"]
\end{tikzcd} \tag{2.38}$$

Para cálculos explícitos, observamos que um sistema de coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i) de E induz um sistema de coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i, q^i_μ) de JE e um sistema de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i, \vec{q}^{\,i}_\mu)$ de $\vec{J}E$ e que uma transformação de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i) \rightsquigarrow (x'^\kappa, q'^k)$ em E, conforme a equação (2.7), induz uma transformação de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i, q^i_\mu) \rightsquigarrow (x'^\kappa, q'^k, q'^k_\kappa)$ em JE e uma transformação de coordenadas locais adaptadas $(x^\mu, q^i, \vec{q}^{\,i}_\mu) \rightsquigarrow (x'^\kappa, q'^k, \vec{q}^{\,\prime k}_\kappa)$ em $\vec{J}E$, onde

$$q'^k_\kappa \;=\; \frac{\partial q'^k}{\partial q^i}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\,q^i_\mu \;+\; \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\,, \tag{2.39}$$

e

$$\vec{q}^{\,\prime k}_\kappa \;=\; \frac{\partial q'^k}{\partial q^i}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\,\vec{q}^{\,i}_\mu\,. \tag{2.40}$$

Estas leis de transformação comprovam, mais uma vez e de forma explícita, a natureza de JE como fibrado afim sobre E e a natureza de $\vec{J}E$ como fibrado vetorial sobre E.

2.2 Conexões Gerais

Durante toda esta seção, denotaremos por E um fibrado geral sobre uma variedade base M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica Q.

2.2.1 Fibrado Horizontal, Projeção Vertical, Projeção Horizontal

Inicialmente, observe que o fibrado vertical VE é um subfibrado vetorial de TE canonicamente definido, mas não possui nenhum complemento canônico.

2.10 Definição Uma **conexão geral**, ou simplesmente **conexão**, em E é dada por qualquer um dos seguintes três conceitos (que são equivalentes entre si):

- um **fibrado horizontal** HE, que é um subfibrado vetorial de TE complementar ao fibrado vertical VE:
$$TE \;=\; VE \oplus HE\;; \tag{2.41}$$
- uma **projeção vertical** P_V, que é um homomorfismo estrito $P_V : TE \to TE$ de fibrados vetoriais sobre E com $P_V^2 = P_V$ e imagem VE;
- uma **projeção horizontal** P_H, que é um homomorfismo estrito $P_H : TE \to TE$ de fibrados vetoriais sobre E com $P_H^2 = P_H$ e núcleo VE.

Obviamente, $P_V + P_H = \mathrm{id}_{TE}$, sendo que HE é o núcleo de P_V e a imagem de P_H.

2.3 Exemplo O fibrado trivial padrão $E = M \times Q$ admite uma conexão natural, chamada a **conexão padrão**: tendo em vista que
$$T(M \times Q) \;=\; TM \times TQ\;, \tag{2.42}$$
e
$$V(M \times Q) \;=\; \mathrm{pr}_2^*\,TQ \;=\; M \times TQ\;, \tag{2.43}$$
ela é dada por
$$H(M \times Q) \;=\; \mathrm{pr}_1^*\,TM \;=\; TM \times Q\;. \tag{2.44}$$
◊

2.2.2 Forma de Conexão e Levantamento Horizontal

Uma definição alternativa do conceito de conexão utiliza o conceito de forma de conexão:

2.1 Proposição *Uma conexão geral em E também é dada pelo conceito da correspondente **forma de conexão**, que é uma 1-forma A sobre E a valores no fibrado vertical VE de E, $A \in \Omega^1(E, VE)$, satisfazendo a seguinte condição de verticalidade:*
$$A\big|_{VE} \;=\; \mathrm{id}_{VE}\;. \tag{2.45}$$

Na verdade, a forma de conexão é apenas uma maneira de reinterpretar a projeção vertical: $A = P_V$.

Outra definição alternativa do conceito de conexão usa o fibrado dos jatos (de primeira ordem):

2.2 Proposição *Uma conexão geral em E também é dada pelo conceito do correspondente **levantamento horizontal**, que pode ser visto como uma seção $\Gamma : E \to JE$ de JE como fibrado sobre E, i.e., em relação à projeção alvo.*

De fato, uma seção $\Gamma : E \to JE$ de JE como fibrado sobre E associa a cada ponto e em E com ponto base $m = \pi(e)$ em M uma aplicação linear $\Gamma(e) : T_mM \to T_eE$ que, por satisfazer $T_e\pi \circ \Gamma(e) = \mathrm{id}_{T_mM}$, é injetora e portanto pode ser interpretada como um mergulho do espaço tangente T_mM no espaço tangente T_eE que é transversal ao espaço vertical e assim serve para definir um levantamento horizontal dos vetores tangentes em T_mM para vetores tangentes em T_eE. Obviamente, então,
$$H_eE \;=\; \mathrm{im}(\Gamma(e)) \qquad \text{para } e \in E\;. \tag{2.46}$$

Reciprocamente, dado um fibrado horizontal HE em TE, definimos a seção $\Gamma : E \to JE$ por

$$\Gamma(e) \;=\; (T_e\pi|_{H_eE})^{-1} \qquad \text{para } e \in E\,. \tag{2.47}$$

Desta forma, temos

$$(P_H)_e \;=\; \Gamma(e) \circ T_e\pi \qquad \text{para } e \in E\,. \tag{2.48}$$

Em coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i) de E, tanto a forma de conexão A como o levantamento horizontal Γ são representados por uma matriz retangular de funções A^i_μ de todas essas variáveis, conforme

$$A \;=\; dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial q^i} \,+\, A^i_\mu\, dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}\,, \tag{2.49}$$

e

$$\Gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) \;=\; \frac{\partial}{\partial x^\mu} \,-\, A^i_\mu\,\frac{\partial}{\partial q^i}\,. \tag{2.50}$$

A noção de levantamento horizontal pode ser aplicada a vários objetos na variedade base:

(i) *levantamento horizontal de vetores tangentes*: dado $e \in E$ com $m = \pi(e) \in M$ e $v_m \in T_mM$, defina $\hat{v}_e \in T_eE$ como sendo o único vetor horizontal tal que $T_e\pi \cdot \hat{v}_e = v_m$, ou seja,

$$\hat{v}_e \;=\; \Gamma(e) \cdot v_m\,. \tag{2.51}$$

(ii) *levantamento horizontal de campos vetoriais*: dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, defina $\hat{X} \in \mathfrak{X}(E)$ como sendo o único campo vetorial horizontal tal que $T\pi \circ \hat{X} = X \circ \pi$, ou seja,

$$\hat{X}(e) \;=\; \Gamma(e) \cdot X(m) \qquad \text{para } e \in E \text{ com } m = \pi(e) \in M\,. \tag{2.52}$$

O fato de que HE é um subfibrado vetorial de TE (que é equivalente à condição de que P_V e P_H são homomorfismos de fibrados vetoriais) garante que X sendo diferenciável, $\hat{X}$ também é. Ademais, todo vetor horizontal $u_e \in H_eE$ é da forma $u_e = \hat{X}(e)$ para algum campo vetorial X sobre M tal que $X(m) = T_e\pi \cdot u_e$.

(iii) *levantamento horizontal de curvas*: dada uma curva γ em M passando por um ponto m de M e dado um ponto e de E tal que $\pi(e) = m$, existe uma única curva horizontal $\hat{\gamma}$ em E passando por e que cobre γ. Mais exatamente, se I denota o domínio de γ e $\hat{I}$ denota o domínio de $\hat{\gamma}$ (de modo que I e $\hat{I}$ são intervalos abertos em $\mathbb{R}$ contendo 0), devemos ter $\hat{I} \subset I$, $\gamma(0) = m$, $\hat{\gamma}(0) = e$,

$$\pi(\hat{\gamma}(t)) \;=\; \gamma(t) \qquad \text{para } t \in \hat{I}\,, \tag{2.53}$$

e

$$\dot{\hat{\gamma}}(t) \in H_{\hat{\gamma}(t)}E \qquad \text{para } t \in \hat{I}\,, \tag{2.54}$$

onde o símbolo $\dot{}$ denota a derivada em relação ao parâmetro t.

(iv) *levantamento horizontal de fluxos*: dado um fluxo F em M, existe um único fluxo horizontal $\hat{F}$ em E que cobre F. Mais exatamente, se $\mathcal{D}$ denota o domínio de F e $\hat{\mathcal{D}}$ denota o domínio de $\hat{F}$ (de modo que $\mathcal{D}$ é uma vizinhança aberta de $\{0\} \times M$ em $\mathbb{R} \times M$ e $\hat{\mathcal{D}}$ é uma vizinhança aberta de $\{0\} \times E$ em $\mathbb{R} \times E$), devemos ter $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \pi)(\hat{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}$,

$$\pi(\hat{F}(t,e)) \;=\; F(t, \pi(e)) \qquad \text{para } (t,e) \in \hat{\mathcal{D}}\,, \tag{2.55}$$

e

$$\dot{\hat{F}}(t,e) \in H_{\hat{F}(t,e)}E \qquad \text{para } (t,e) \in \hat{\mathcal{D}}\,, \tag{2.56}$$

onde o símbolo $\dot{}$ denota a derivada em relação ao parâmetro t.

Recordamos que um fluxo em uma variedade X é uma aplicação diferenciável $F : \mathcal{D} \to X$ cujo domínio $\mathcal{D}$ é um aberto de $\mathbb{R} \times X$ contendo $\{0\} \times X$ satisfazendo a condição inicial

$$F(0,x) \;=\; x \;, \tag{2.57}$$

e a seguinte regra de composição: para $(t,x) \in \mathcal{D}$ e $s \in \mathbb{R}$, temos

$$(s, F(t,x)) \in \mathcal{D} \quad\Longleftrightarrow\quad (s+t, x) \in \mathcal{D} \;,$$

e neste caso,

$$F(s, F(t,x)) \;=\; F(s+t, x) \;. \tag{2.58}$$

Fluxos F em X são ligados a campos vetoriais Z sobre X pela equação diferencial

$$\dot{F}(t,x) \;=\; Z(F(t,x)) \;, \tag{2.59}$$

onde o símbolo $\dot{}$ denota a derivada em relação ao parâmetro t.

A existência e a unicidade do levantamento horizontal de curvas e de fluxos é facilmente verificada utilizando coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i) de E. Nelas, as componentes $\hat{\gamma}^\mu$ e $\hat{\gamma}^i$ do levantamento horizontal $\hat{\gamma}$ de uma curva γ com componentes γ^μ satisfazem a identidade

$$\hat{\gamma}^\mu(t) \;=\; \gamma^\mu(t) \;, \tag{2.60}$$

em conjunto com o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\gamma}^i(t) \;=\; -\,A_\mu^i(\hat{\gamma}(t))\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma^\mu(t) \;, \tag{2.61}$$

e portanto o resultado segue do teorema de existência e unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Uma afirmação análoga vale para o levantamento horizontal de um fluxo.

2.2.3 Derivada Covariante

A escolha de uma conexão permite introduzir o conceito de derivada covariante $D\varphi$ de uma seção φ de E, que é uma seção do fibrado dos jatos linearizados $\vec{J}E$ de E ao longo de φ, enquanto que a derivada comum $\partial\varphi$ é uma seção do fibrado dos jatos JE de E ao longo de φ, sendo que a primeira é obtida da segunda simplesmente por composição com a projeção vertical P_V. De fato, para $\varphi \in \Gamma(E)$, $\partial\varphi \in \Gamma(\varphi^* JE)$ e $D\varphi \in \Gamma(\varphi^* \vec{J}E)$ são definidos por

$$(\partial\varphi)(m) \;=\; T_m\varphi \;\in\; J_{\varphi(m)}E \qquad \text{para } m \in M \tag{2.62}$$

(veja a equação (2.30)) e

$$(D\varphi)(m) \;=\; (P_V)_{\varphi(m)} \circ T_m\varphi \;\in\; \vec{J}_{\varphi(m)}E \qquad \text{para } m \in M \tag{2.63}$$

(veja a equação (2.31)). Note que $\varphi^* JE$ é um fibrado afim e $\varphi^* \vec{J}E$ é um fibrado vetorial sobre M, sendo que a equação (2.35) implica que $\varphi^* \vec{J}E \cong T^*M \otimes \varphi^* VE$ e portanto $D\varphi \in \Omega^1(M, \varphi^* VE)$.

2.11 Definição Dadas uma conexão geral em E e uma seção φ de E, a **derivada covariante $D\varphi$ de φ** é a 1-forma a valores em $\varphi^* VE$ e, para todo campo vetorial X em M, a **derivada covariante $D_X\varphi$ de φ ao longo de X** é a seção $D_X\varphi$ de $\varphi^* VE$ obtida por projeção vertical da derivada comum (aplicação tangente):

$$(D\varphi)(m) \;=\; (P_V)_{\varphi(m)} \circ T_m\varphi \;\;,\;\; (D_X\varphi)(m) \;=\; (P_V)_{\varphi(m)} \cdot \big(T_m\varphi \cdot X(m)\big) \qquad \text{para } m \in M \;. \tag{2.64}$$

Note que para fibrados vetoriais, essa definição coincide com a anterior pois se E for um fibrado vetorial sobre M com projeção π, então o fibrado vertical VE de E é canonicamente isomorfo ao pull-back π^*E do próprio E e portanto, para qualquer seção φ, $\varphi^*VE \cong \varphi^*\pi^*E = (\pi \circ \varphi)^*E = E$. Neste caso, o fibrado vetorial do qual a derivada covariante é seção torna-se independente da seção original φ.

2.2.4 Curvatura

A noção de curvatura aparece quando observamos que, ao contrário do fibrado vertical, o fibrado horizontal que representa uma determinada conexão não é necessariamente involutivo. A curvatura da conexão mede o quanto o fibrado horizontal correspondente deixa de ser involutivo.

2.12 Definição Dada uma conexão geral em E, com fibrado horizontal HE, projeção vertical P_V, projeção horizontal P_H e forma de conexão $A \in \Omega^1(E, VE)$, sua **curvatura** é representada pela correspondente **forma de curvatura** $F \in \Omega^2(E, VE)$, definida por

$$F(Z_1, Z_2) = P_V([P_H(Z_1), P_H(Z_2)]) \qquad \text{para } Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(E) . \tag{2.65}$$

Conexões cuja curvatura se anula identicamente são chamadas **planas.**

Obviamente, uma conexão geral é plana se e somente se o seu fibrado horizontal for involutivo.

Observe que enquanto que a forma de conexão é “vertical” no sentido de se anular sobre “vetores horizontais”, a forma de curvatura é horizontal no sentido de se anular assim que um dos dois vetores aos quais ela é aplicada for vertical.[3]

Em coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i) de E, a forma de curvatura é representada por um conjunto de funções $F^i_{\mu\nu}$ de todas essas variáveis, conforme

$$F = \tfrac{1}{2} F^i_{\mu\nu} \, (dx^\mu \wedge dx^\nu) \otimes \frac{\partial}{\partial q^i} , \tag{2.66}$$

onde

$$F^i_{\mu\nu} = -\left(\frac{\partial A^i_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^i_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial A^i_\mu}{\partial q^j} A^j_\nu - \frac{\partial A^i_\nu}{\partial q^j} A^j_\mu \right) . \tag{2.67}$$

De fato, as equações (2.65), (2.49) e (2.50) implicam

$$\begin{aligned} F^i_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q^i} &= F\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big) = F\Big(\Gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big), \Gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)\Big) = F\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^i_\mu \frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} - A^j_\nu \frac{\partial}{\partial q^j}\Big) \\ &= A\Big(\Big[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^i_\mu \frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} - A^j_\nu \frac{\partial}{\partial q^j}\Big]\Big) \\ &= -\Big\langle dq^k + A^k_\kappa \, dx^\kappa , \frac{\partial A^j_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial A^i_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial A^i_\mu}{\partial q^j} A^j_\nu \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial A^j_\nu}{\partial q^i} A^i_\mu \frac{\partial}{\partial q^j} \Big\rangle \frac{\partial}{\partial q^k} \\ &= -\left(\frac{\partial A^i_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^i_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial A^i_\mu}{\partial q^j} A^j_\nu - \frac{\partial A^i_\nu}{\partial q^j} A^j_\mu \right) \frac{\partial}{\partial q^i} . \end{aligned}$$

[3] As aspas indicam o fato de que, ao contrário das noções de vetores verticais e de formas horizontais, como formas que se anulam quando se insere algum vetor vertical, as de “vetores horizontais” e de “formas verticais” não possuem nenhum significado intrínsico, pois dependem justamente da escolha de uma conexão. Neste sentido, a afirmação de que a forma de conexão é “vertical”, i.e., se anula sobre vetores “horizontais”, não passa de uma tautologia.

2.2.1 Observação Do ponto de vista da interpretação física, conexões gerais em um fibrado geral E sobre uma variedade base M, que é interpretada como um modelo do espaço-tempo, são seções de um certo fibrado, mas em relação a uma projeção sobre E e não sobre M, como seria necessário para que elas possam ser interpretadas como campos físicos. No entanto, quando nós nos restringimos a certas classes especiais de conexões – tais como conexões lineares ou conexões principais (a serem discutidas logo adiante) – podemos reescrevê-las como seções de um fibrado sobre M, o que permite interpretá-las como campos físicos e abre o caminho para empregá-las na formulação de teorias de calibre.

2.3 Fibrados com Grupo Estrutural

Como já foi mencionado anteriormente, o maior inconveniente dos fibrados gerais é o fato de que suas funções de transição assumem valores no grupo de difeomorfismos da fibra típica, que formalmente poderia ser visto como um grupo de Lie de dimensão infinita mas que, muitas vezes, não possui nenhuma estrutura de variedade razoável, muito menos de grupo de Lie. Por outro lado, vimos no Capítulo 1 que, no caso de fibrados vetoriais, as funções de transição tomam valores no grupo geral linear ou, no caso de fibrados vetoriais munidos de alguma estrutura adicional, em algum subgrupo fechado do grupo geral linear, e todos estes são grupos de Lie de dimensão finita. Aqui, o maior inconveniente é a hipótese, demasiadamente restritiva, de que a fibra típica seja um espaço vetorial sobre o qual o grupo pertinente age linearmente.

Estas observações sugerem, como compromisso, a seguinte definição:

2.13 Definição Um **fibrado com grupo estrutural** é uma quíntupla (E, M, π, Q, G) composta de

(i) uma variedade E chamada o **espaço total**,

(ii) uma variedade M chamada o **espaço base**,

(iii) uma aplicação diferenciável sobrejetora $\pi : E \to M$ chamada a **projeção**,

(iv) uma variedade Q chamada a **fibra típica** ou a **variedade modelo**,

(v) um grupo de Lie G chamado o **grupo estrutural**, em conjunto com uma ação (à esquerda)

$$\begin{array}{ccc} G \times Q & \longrightarrow & Q \\ (g, q) & \longmapsto & g \cdot q \end{array} \tag{2.68}$$

de G na fibra típica Q,

e satisfazendo o postulado de **trivialidade local**: existem um recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M e uma família $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de difeomorfismos

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times Q \ , \tag{2.69}$$

com $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$ para todo $\alpha \in A$, chamados de **trivializações locais**, tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times Q \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times Q \tag{2.70}$$

é um difeomorfismo que pode ser representado por uma função diferenciável

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \; , \tag{2.71}$$

chamada a correspondente **função de transição**, conforme a fórmula

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m,q) \;=\; (m, \tau_{\alpha\beta}(m) \cdot q) \qquad \text{para } \; m \in U_\alpha \cap U_\beta \, , \, q \in Q \; . \tag{2.72}$$

A seguir, especificaremos um fibrado com grupo estrutural (E, M, π, Q, G) dizendo que E é um fibrado com grupo estrutural G, ou simplesmente um G-**fibrado**, sobre M com projeção π e fibra típica Q. Para todo ponto m de M, $E_m = \pi^{-1}(\{m\})$ é a **fibra** de E **sobre** m. Finalmente, uma família $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ com as propriedades enunciadas acima também é chamada um **atlas de trivializações locais** de E, e adotamos a terminologia usual de atlas equivalentes, de atlas maximais e de **trivializações locais admissíveis**, como no caso de fibrados vetoriais e de fibrados gerais.

Dada uma ação de G em Q como na equação (2.68), definimos

$$N \;=\; \{ \, g \in G \mid g \cdot q = q \;\; \text{para todo} \;\; q \in Q \, \} \; , \tag{2.73}$$

ou seja, N é a intersecção de todos os subgrupos de estabilidade da ação,

$$N \;=\; \bigcap_{g \in G} G_q \; , \tag{2.74}$$

e observamos que N é um subgrupo normal fechado de G. De fato, N é o núcleo do homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(Q) \\ g & \longmapsto & L_g \end{array} \tag{2.75}$$

que associa a cada elemento g de G a **translação** (à esquerda) L_g por g:

$$\begin{array}{cccc} L_g : & Q & \longrightarrow & Q \\ & q & \longmapsto & L_g(q) = g \cdot q \end{array} \tag{2.76}$$

A ação é chamada **efetiva** se $N = \{1\}$. Neste caso, o homomorfismo (2.75) é injetor e permite considerar G como subgrupo de $\mathrm{Diff}(Q)$ e um fibrado com grupo estrutural G como um fibrado que admite um atlas de trivializações locais cujas funções de transição tomam valores neste subgrupo. Note que sempre podemos supor sem perda de generalidade que a ação seja efetiva: caso contrário, basta substituir G pelo grupo quociente G/N. Porém, em exemplos concretos, tal substituição nem sempre é conveniente.

Como foi previsto anteriormente, conforme esta definição, fibrados vetoriais com fibra típica $\mathbb{E}$ são fibrados com grupo estrutural $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ e fibrados vetoriais com fibra típica $\mathbb{E}$ e munidos de uma estrutura adicional $(\Sigma, \boldsymbol{\Sigma})$ como na Definição 1.24, são fibrados com grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$.

Uma propriedade importante de um G-fibrado cujo grupo estrutural age efetivamente na sua fibra típica é que suas funções de transição, em relação a algum atlas $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de trivializações locais, satisfazem a **condição de cociclo**

$$\tau_{\alpha\beta}\tau_{\beta\gamma} \;=\; \tau_{\alpha\gamma} \qquad \text{sobre} \;\; U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \; , \tag{2.77}$$

junto com a identidade

$$\tau_{\alpha\alpha} \;=\; 1 \qquad \text{sobre} \;\; U_\alpha \; , \tag{2.78}$$

que, juntas, implicam

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} \;=\; \tau_{\beta\alpha} \qquad \text{sobre } \; U_\alpha \cap U_\beta \; . \tag{2.79}$$

Reciprocamente, temos o seguinte resultado:

2.1 Teorema (construção de fibrados por amalgamação) *Sejam $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ um recobrimento de uma variedade M e $(\tau_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ uma família de funções diferenciáveis $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ a valores em um grupo de Lie G satisfazendo a condição de cociclo (2.77) e a identidade (2.78). Então dada uma variedade Q e uma ação de G em Q como na equação (2.68), existem um G-fibrado (E, M, π, Q, G), que é único a menos de isomorfismo, e um atlas $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de trivializações locais de E tal que as funções $\tau_{\alpha\beta}$ são as correspondentes funções de transição.*

Demonstração: Considere primeiro a variedade E_A definida como a união disjunta das variedades produto $U_\alpha \times Q$:

$$E_A \;=\; \bigcup_{\alpha\in A} \{\alpha\} \times U_\alpha \times Q \; ,$$

e defina a aplicação diferenciável sobrejetora $\pi_A : E_A \to M$ por

$$\pi_A(\alpha, m, q) \;=\; m \qquad \text{para } \; \alpha \in A, \, m \in M, \, q \in Q \; .$$

Em E_A, introduzimos a seguinte relação de equivalência:

$$(\alpha, m_\alpha, q_\alpha) \;\sim\; (\beta, m_\beta, q_\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_\alpha = m = m_\beta \in U_\alpha \cap U_\beta \\ \quad \tau_{\alpha\beta}(m) \cdot q_\beta = q_\alpha \end{cases}$$

Para mostrar que $\sim$ é realmente uma relação de equivalência, observe que a reflexividade segue da identidade (2.78), a simetria segue da condição (2.79) e a transitividade segue da condição de cociclo (2.77), em conjunto com o fato de que $\cdot$ representa uma ação de G em Q. Denotamos a classe de equivalência de (α, m, q) por $[\alpha, m, q]$, o conjunto de tais classes de equivalência por E e a projeção canônica de E_A sobre E por p. Então é claro que a projeção $\pi_A : E_A \to M$ induz uma projeção $\pi : E \to M$ tal que $\pi_A = \pi \circ p$, definida por

$$\pi([\alpha, m, q]) \;=\; m \qquad \text{para } \; \alpha \in A, \, m \in M, \, q \in Q \; .$$

A natureza da relação de equivalência $\sim$ acima definida implica que, para todo $\alpha \in A$, a restrição da projeção p ao subconjunto $\{\alpha\} \times U_\alpha \times Q$ de E_A, que podemos identificar com $U_\alpha \times Q$, é uma bijeção sobre o subconjunto $\pi^{-1}(U_\alpha)$ de E cujo inverso denotaremos por Φ_α. Obviamente, as funções de transição associadas a este atlas de trivializações locais são as funções $\tau_{\alpha\beta}$ originais. Finalmente, a diferenciabilidade das funções $\tau_{\alpha\beta}$ implica que podemos usar as bijeções Φ_α para transferir a estrutura diferenciável das variedades produto $U_\alpha \times Q$ para definir a estrutura diferenciável de E em termos da estrutura diferenciável de suas subvariedades abertas $\pi^{-1}(U_\alpha)$. □

A construção descrita nesta demonstração é chamada de **amalgamação.**

2.4 Fibrados Principais, Fibrados Associados, Fibrados de Referenciais

Entre os fibrados com grupo estrutural, existe uma classe especial, os chamados fibrados principais, que podem ser caracterizados como aqueles onde $Q = G$ com G agindo sobre si mesmo por translações à esquerda. Estes ocupam uma posição central na teoria, pois todos os outros podem ser obtidos a partir deles usando um processo conhecido como a construção de fibrados associados. Reciprocamente, os exemplos mais importantes de fibrados principais são construídos a partir de fibrados vetoriais ou de fibrados vetoriais munidos de alguma estrutura adicional, por um processo conhecido como a construção de fibrados de referenciais.

Infelizmente, a simplicidade dessa visão acaba sendo camuflada pelo tratamento da teoria dos fibrados encontrada na literatura matemática mais recente sobre a área: costuma-se deixar o conceito de fibrado com grupo estrutural de lado e proceder diretamente à definição do conceito de fibrado principal, lançando mão de um ingrediente adicional que permanece sem qualquer motivo aparente, a saber, uma ação livre à direita do grupo estrutural sobre o espaço total cujas órbitas coincidem com as fibras. No que segue, resgatamos a abordagem original e, a nosso ver, muito mais natural, mostrando que a existência dessa ação, independente da escolha de trivializações locais, já segue naturalmente dos demais axiomas e portanto não precisa ser postulada separadamente.

2.4.1 Fibrados Principais

Começamos com uma definição de fibrado principal diferente da usual, mas como veremos logo adiante, equivalente.

2.14 Definição Um **fibrado principal** é uma quádrupla (P, M, ρ, G) tal que (P, M, ρ, G, G) é um fibrado com grupo estrutural cuja fibra típica é idêntica com o grupo estrutural e este age sobre si mesmo por translações à esquerda.

A definição usual encontrada na literatura é a seguinte.

2.15 Definição Um **fibrado principal** é uma quádrupla (P, M, ρ, G) composta de

(i) uma variedade P chamada o **espaço total**,

(ii) uma variedade M chamada o **espaço base**,

(iii) uma aplicação diferenciável sobrejetora $\rho : P \to M$ chamada a **projeção**,

(iv) um grupo de Lie G que é ao mesmo tempo a **fibra típica** e o **grupo estrutural**,

(v) uma ação (à direita)
$$\begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & p \cdot g \end{array} \tag{2.80}$$
de G no espaço total P que é transitiva e livre nas fibras,

e satisfazendo o postulado de **trivialidade local equivariante**: existem um recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M e uma família $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de difeomorfismos
$$\Phi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G \,, \tag{2.81}$$
com $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \rho$ para todo $\alpha \in A$ e que são equivariantes no sentido de que
$$\Phi_\alpha^{-1}(m, gh) \;=\; \Phi_\alpha^{-1}(m, g) \cdot h \qquad \text{para } m \in U_\alpha, g, h \in G \,, \tag{2.82}$$

chamados de **trivializações locais equivariantes**, tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \tag{2.83}$$

é um difeomorfismo que pode ser representado por uma função diferenciável

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \ , \tag{2.84}$$

chamada a correspondente **função de transição**, conforme a fórmula

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m, g) \ = \ (m, \tau_{\alpha\beta}(m) g) \qquad \text{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta \, , \, g \in G \ . \tag{2.85}$$

A seguir, especificaremos um fibrado principal (P, M, ρ, G) dizendo que P é um fibrado principal com grupo estrutural G, ou simplesmente um **G-fibrado principal**, sobre M com projeção ρ. Para todo ponto m de M, $P_m = \rho^{-1}(\{m\})$ é a **fibra** de P **sobre** m. Finalmente, uma família $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ com as propriedades enunciadas acima também é chamada um **atlas de trivializações locais equivariantes** de P, e adotamos a terminologia usual de atlas equivalentes, de atlas maximais e de **trivializações locais equivariantes admissíveis.**

Para provar que as duas definições são de fato equivalentes, precisamos apenas mostrar como construir a ação (2.80) do grupo G sobre o espaço P a partir dos demais dados. Para tanto, suponha que (P, M, ρ, G, G) é um fibrado com grupo estrutural cuja fibra típica é idêntica com o grupo estrutural e que este age sobre si mesmo por translações à esquerda, e escolha um atlas $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de trivializações locais de P no sentido da Definição 2.13 (com E substituído por P,π substituído por ρ e Q substituído por G). Então podemos, para todo $\alpha \in A$, usar a equação (2.82) para definir uma ação (à direita)

$$\begin{array}{ccc} P|_{U_\alpha} \times G & \longrightarrow & P|_{U_\alpha} \\ (p, g) & \longmapsto & p \cdot_\alpha g \end{array}$$

de G em $P|_{U_\alpha}$, explicitamente dada por

$$p \cdot_\alpha g \ = \ \Phi_\alpha^{-1}(m, g_\alpha g) \quad \text{se} \quad p \ = \ \Phi_\alpha^{-1}(m, g_\alpha) \ ,$$

e verificamos que as ações $\cdot_\alpha$ e $\cdot_\beta$ coincidem em $P|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, pois para $p \in \rho^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ com $m = \rho(p)$, $\Phi_\alpha(p) = (m, g_\alpha)$, $\Phi_\beta(p) = (m, g_\beta)$ e $g \in G$, vale

$$(m, g_\alpha) \ = \ \Phi_\alpha(p) \ = \ (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m, g_\beta) \ = \ (m \, , \, \tau_{\alpha\beta}(m) \, g_\beta)$$

e portanto

$$\Phi_\alpha(p \cdot_\beta g) \ = \ (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m, g_\beta g) \ = \ (m \, , \, \tau_{\alpha\beta}(m) \, g_\beta g) \ = \ (m, g_\alpha g) \ = \ \Phi_\alpha(p \cdot_\alpha g) \ ,$$

implicando $p \cdot_\beta g = p \cdot_\alpha g$; assim, a ação (2.80) está bem definida, e de modo que as trivializações locais Φ_α são todas equivariantes.

Mais uma vez, podemos sempre escrever o espaço total de um fibrado principal como a união disjunta das suas fibras, o que deixa óbvio qual é a definição da projeção ρ:

$$P \ = \ \bigcup_{m \in M} P_m \qquad , \qquad \rho(p) = m \ \text{ para } \ p \in P_m \ . \tag{2.86}$$

Esta decomposição pode ser vista como uma folheação regular de P por variedades P_m mergulhadas em P como subvariedades e todas difeomorfas ao grupo estrutural G, porém *não* são grupos de Lie pois não há em nenhuma delas um elemento distinguido que corresponda à unidade de G, sendo que para todo ponto m de M, podemos escolher uma trivialização equivariante admissível $\Phi : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ de P sobre uma vizinhança aberta U de m em M cuja restrição à fibra P_m fornece um difeomorfismo

$$\Phi\big|_{P_m} : P_m \longrightarrow G \tag{2.87}$$

que é equivariante em relação às ações de G sobre P_m à direita e sobre si mesmo por multiplicação à direita, mas a pré-imagem de $1 \in G$ sob $\Phi\big|_{P_m}$ depende da trivialização escolhida e portanto não possui significado intrínsico. A situação é a mesma que caracteriza a diferença entre espaços vetoriais e espaços afins: ao contrário dos primeiros, os últimos não possuem nenhum ponto distinguido que poderia servir de origem.

Uma das propriedades específicas de fibrados principais é que as suas trivializações (locais) equivariantes correspondem biunivocamente às suas seções (locais). De fato, se U é um aberto de M, então uma trivialização equivariante $\Phi : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ de P sobre U proporciona uma seção $\sigma : U \to P$ de P sobre U definida por $\sigma(m) = \Phi^{-1}(m,1)$, e reciprocamente, uma seção $\sigma : U \to P$ de P sobre U proporciona uma trivialização equivariante $\Phi_\sigma : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ de P sobre U definida por

$$\Phi_\sigma^{-1}(m,g) = \sigma(m) \cdot g \qquad \text{para } m \in U, g \in G\,. \tag{2.88}$$

Em particular, isso implica uma afirmação feita anteriormente: fibrados principais constituem uma classe de fibrados que, geralmente, não admitem seções globais – exceto quando são triviais.

Para formalizar a noção de trivialidade no caso de fibrados principais, precisamos dos passos usuais: as definições da **restrição** $P|_N$ de um fibrado principal P a um subconjunto aberto N do seu espaço base M e do **fibrado principal trivial padrão**, definido por

$$P = M \times G \qquad \text{e} \qquad \rho = \mathrm{pr}_1\,, \tag{2.89}$$

são as mesmas que para fibrados gerais, e para um fibrado principal ser chamado de trivial, basta que seja apenas isomorfo a este, o que requer especificar quais são as aplicações compatíveis com a estrutura de fibrado principal:

2.16 Definição Sejam P e Q fibrados principais sobre variedades M e N com projeções $\rho_P : P \to M$ e $\rho_Q : Q \to N$ e grupos estruturais G e H, respectivamente. Um **morfismo** ou **homomorfismo de fibrados principais** de P em Q é uma tripla $(f, \check{f}, \bar{f})$ composta de aplicações diferenciáveis $f : P \to Q$ e $\check{f} : M \to N$ e de um homomorfismo de grupos de Lie $\bar{f} : G \to H$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_P"'] & Q \arrow[d, "\rho_Q"] \\ M \arrow[r, "\check{f}"] & N \end{tikzcd} \tag{2.90}$$

comuta e tais que f é $\bar{f}$-equivariante:

$$f(p \cdot g) = f(p) \cdot \bar{f}(g) \qquad \text{para } p \in P, g \in G\,. \tag{2.91}$$

Também dizemos que f é um morfismo ou homomorfismo de fibrados principais **sobre** $\check{f}$ **em relação a** $\bar{f}$ ou que f **recobre** $\check{f}$. Se $M = N$ e $\check{f}$ é a identidade, dizemos que f é um morfismo ou homomorfismo **estrito.** Se $G = H$ e $\bar{f}$ é a identidade, dizemos que f é um **morfismo** ou **homomorfismo de G-fibrados principais.**

Explicitamente, esta definição afirma que se $f : P \to Q$ é um homomorfismo de fibrados principais sobre $\check{f} : M \to N$ em relação a $\bar{f} : G \to H$, e se escolhermos trivializações equivariantes admissíveis $\Phi : \rho_P^{-1}(U) \to U \times G$ de P e $\Psi : \rho_Q^{-1}(V) \to V \times H$ de Q sobre abertos U de M e V de N, respectivamente, tais que $\check{f}(U) \subset V$ (caso contrário, substituímos o aberto U pelo aberto $U \cap \check{f}^{-1}(V)$, desde que este não seja vazio), a aplicação

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : U \times G \longrightarrow V \times H \tag{2.92}$$

pode ser escrita na forma

$$(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1})(m, g) = (\check{f}(m), \tau_{\Psi,\Phi}(f)(m)\, \bar{f}(g)) \qquad \text{para } m \in U, g \in G \tag{2.93}$$

com uma aplicação diferenciável

$$\tau_{\Psi,\Phi}(f) : U \longrightarrow H\,. \tag{2.94}$$

Dessa noção de morfismo ou homomorfismo, decorre da forma usual a de **isomorfismo** entre fibrados principais (estrito ou não, em relação à identidade ou não) e de **automorfismo** de um G-fibrado principal. No caso geral, podemos concluir pelo menos que um isomorfismo $f : P \to Q$ de fibrados principais induz um difeomorfismo $\check{f} : M \to N$ das respectivas variedades base e um isomorfismo $\bar{f} : G \to H$ dos respectivos grupos estruturais. Em particular, um fibrado principal P sobre M com grupo estrutural G é chamado **trivial** se existe um isomorfismo estrito de G-fibrados principais $f : P \to M \times G$ e, para qualquer subconjunto aberto N de M, é chamado **trivial sobre** N se existe um isomorfismo estrito de G-fibrados principais $f_N : P|_N \to N \times G$, sendo que qualquer tal isomorfismo estrito de G-fibrados principais é chamado uma **trivialização** de P no primeiro caso e uma **trivialização** de P **sobre** N ou, quando não queremos especificar N explicitamente, uma **trivialização local** de P no segundo caso.[4]

Note que sob composição, os automorfismos de um fibrado principal P sobre uma variedade M formam um grupo que denotaremos por $\mathrm{Aut}(P)$ e os automorfismos estritos formam um subgrupo que denotaremos por $\mathrm{Aut}_s(P)$; ademais, a aplicação que associa ao automorfismo f de P o difeomorfismo $\check{f}$ de M é um homomorfismo de grupos tal que obtemos a seguinte sequência exata de grupos:

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_s(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P) \longrightarrow \mathrm{Diff}(M) \longrightarrow \{1\}\,. \tag{2.95}$$

Se P for trivial, esta sequência cinde, i.e., $\mathrm{Aut}(P)$ é o produto semidireto de $\mathrm{Aut}_s(P) \cong C^\infty(M, G)$ com $\mathrm{Diff}(M)$. Em física, o grupo $\mathrm{Aut}_s(P)$ é conhecido como o **grupo de (transformações de) calibre** associado a P.

Também observamos que as construções de novos fibrados a partir de fibrados dados que apresentamos na Seção 2.1.2 acima produzem fibrados principais quando usamos fibrados principais como ponto de partida. Por exemplo, o **produto cartesiano** $(P_1 \times P_2, M_1 \times M_2, \rho_1 \times \rho_2, G_1 \times G_2)$ de dois fibrados principais (P_1, M_1, ρ_1, G_1) e (P_2, M_2, ρ_2, G_2) (veja a Definição 2.5) é um fibrado principal, e o **fibrado produto** $(P \times_M P_2, M, \rho_{P_1 \times_M P_2}, G_1 \times G_2)$ de dois fibrados principais (P_1, M, ρ_1, G_1) e (P_2, M, ρ_2, G_2) sobre a mesma variedade base M (veja a Definição 2.6) também é um fibrado principal sobre M; em ambos os casos, a ação de $G_1 \times G_2$ no o espaço total ($P_1 \times P_2$ ou $P_1 \times_M P_2$) é definida a partir das ações de G_1 em P_1 e de G_2 em P_2 de maneira óbvia. De modo semelhante, o **pull-back** $(\phi^* P, N, \rho_{\phi^* P}, G)$ de um G-fibrado principal sobre M via uma aplicação diferenciável $\phi : N \to M$ é um G-fibrado principal sobre N; novamente, a ação de G em $\phi^* P$ é definida a partir da ação de G em P de maneira óbvia.

[4] Em outras palavras, quando falamos de trivializações (locais) de fibrados principais, frequentemente suprimimos o adjetivo “equivariante”.

Comparando fibrados principais sober a mesma variedade base M[5] mas com grupos estruturais diferentes, há dois casos de importância especial, que requerem terminologia própria.

2.17 Definição Sejam P e Q fibrados principais sobre uma variedade M com projeções $\rho_P : P \to M$ e $\rho_Q : Q \to M$ e grupos estruturais G e H, respectivamente.

1. Dizemos que Q é um **subfibrado principal** ou uma **redução de grupo estrutural** de P, **de** G **para** H,[6] se Q é uma subvariedade fechada e mergulhada de P e H é um subgrupo fechado de G tal que as inclusões $i_{Q,P} : Q \hookrightarrow P$ e $i_{H,G} : H \hookrightarrow G$ constituem um homomorfismo estrito $(i_{Q,P}, \mathrm{id}_M, i_{H,G})$ de fibrados principais sobre M.

2. Dizemos que Q é um **fibrado principal quociente** de P ou ainda que P é uma **extensão de grupo estrutural** de Q, **de** H **para** G,[6] em relação a um homomorfismo estrito $(f, \mathrm{id}_M, \bar{f})$ de fibrados principais sobre M, se $\bar{f} : G \to H$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos de Lie, de modo que H é um grupo quociente de G, $H \cong G/\ker\bar{f}$, e assim G se torna uma extensão de H por $\ker\bar{f}$, gerando a seguinte sequência exata de grupos de Lie:

$$\{1\} \longrightarrow \ker\bar{f} \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow \{1\}\,. \tag{2.96}$$

   Em particular, dizemos que P é um **recobrimento** de Q se G é um recobrimento de H, i.e., se o subgrupo fechado normal $\ker\bar{f}$ é discreto.[7]

Se P é um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho_P : P \to M$ e grupo estrutural G e H é um subgrupo fechado de G, então para que um subconjunto Q de P seja um subfibrado principal de P com grupo estrutural H, basta que

- ρ_P projeta Q sobre M;
- Q é invariante por H, i.e., vale $q \cdot h \in Q$ para $q \in Q$ e $h \in H$;
- para todo ponto m de M, existe uma trivialização equivariante admissível $\Phi_P : \rho_P^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ de P sobre uma vizinhança aberta U de m tal que $\Phi_P(\rho_P^{-1}(U) \cap Q) = U \times H$, e qualquer trivialização local equivariante admissível de P com esta propriedade é chamada de **adaptada** a este subfibrado.

Desta forma, podemos definir a projeção $\rho_Q : Q \to M$ como a restrição da projeção $\rho_P : P \to M$ ($\rho_Q = \rho_P|_Q$) e a ação à direita de H sobre Q como a restrição da ação à direita de G sobre P, e observamos que dada uma trivialização local equivariante $\Phi_P : \rho_P^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ de P adaptada a Q, obtemos uma trivialização local equivariante $\Phi_Q : \rho_Q^{-1}(U) \longrightarrow U \times H$ de Q, chamada a **trivialização local induzida**, definindo Φ_Q como sendo a restrição de Φ_P a $\rho_Q^{-1}(U) = Q \cap \rho_P^{-1}(U)$. Assim, Q torna-se um fibrado principal sobre M com grupo estrutural H e um subfibrado principal de P em relação às inclusões óbvias, de tal modo que se $(\Phi_P)_\alpha$ e $(\Phi_P)_\beta$ são duas trivializações locais de P adaptadas a Q e $(\Phi_Q)_\alpha$ e $(\Phi_Q)_\beta$ são as trivializações locais induzidas de Q, então as duas têm a mesma função de transição $\tau_{\alpha\beta}$, que toma valores no subgrupo fechado H de G. Reciprocamente, o teorema sobre construção de fibrados por amalgamação (Teorema 2.1) mostra que se P admite um atlas $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de trivializações locais equivariantes tal que as correspondentes funções de transição $\tau_{\alpha\beta}$ tomam valores em um subgrupo fechado H de G, então P admite uma redução de grupo estrutural Q de G para H.

[5] Para tratar do caso onde as variedades base também não são as mesmas, usa-se, como ingrediente adicional, a nõção de pull-back.

[6] Assim que possível, omitimos a expressão "de G para H" ou "de H para G".

[7] É um resultado geral em teoria de grupos de Lie que, nesta hipótese, $\ker\bar{f}$ é necessariamente contido no centro de G.

2.4.2 Fibrados Associados

Um dos motivos para o uso do termo "fibrado principal" é o fato de que qualquer fibrado com grupo estrutural G pode ser obtido a partir de um fibrado principal com grupo estrutural G por um método direto e global: a construção do "fibrado associado".

Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho : P \to M$ e grupo estrutural G, e seja Q uma variedade munida de uma ação de G como na equação (2.68). Considere a variedade produto $P \times Q$, munida da ação de G à direita definida por

$$\begin{array}{ccc} (P \times Q) \times G & \longrightarrow & P \times Q \\ ((p,q),g) & \longmapsto & (p,q) \cdot g \;=\; (p \cdot g \,,\, g^{-1} \cdot q) \end{array} \tag{2.97}$$

Denotaremos o espaço das órbitas desta ação por $P \times_G Q$, a projeção canônica de $P \times Q$ sobre $P \times_G Q$ por ρ_Q e a classe de equivalência, ou órbita, de um par (p,q) por $[p,q]$; assim, vale

$$\begin{gathered} [p \cdot g \,,\, g^{-1} \cdot q] \;=\; [p,q] \qquad \text{ou} \qquad [p \cdot g \,,\, q] \;=\; [p \,,\, g \cdot q] \\ \text{para } p \in P,\, q \in Q,\, g \in G\,. \end{gathered} \tag{2.98}$$

Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P \times Q \arrow[r, "\rho_Q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & P \times_G Q \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "\rho"'] & M \end{tikzcd} \tag{2.99}$$

onde as aplicações $\pi : P \times_G Q \to M$ e $\rho_Q : P \times Q \to P \times_G Q$ são definidas por

$$\pi[p,q] \;=\; \rho(p) \quad,\quad \rho_Q(p,q) \;=\; [p,q] \qquad \text{para } p \in P,\, q \in Q\,. \tag{2.100}$$

2.2 Teorema (construção de fibrado associado) *Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho : P \to M$ e grupo estrutural G, e seja Q uma variedade munida de uma ação de G como na equação (2.68). Definindo $P \times_G Q$, π e ρ_Q como acima, temos que*

(i) $P \times_G Q$ é uma variedade tal que as aplicações $\pi : P \times_G Q \to M$ e $\rho_Q : P \times Q \to P \times_G Q$ são diferenciáveis;

(ii) As flechas verticais no diagrama (2.99) definem fibrados com grupo estrutural G e fibra típica Q;

(iii) As flechas horizontais no diagrama (2.99) definem fibrados principais com grupo estrutural G;

(iv) Toda trivialização equivariante admissível $\Phi : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ de P sobre um aberto U de M induz uma trivialização $\Phi_Q : \pi^{-1}(U) \to U \times Q$ de $P \times_G Q$ sobre o mesmo aberto U de M, de modo a preservar as funções de transição, i.e., a condição de compatibilidade

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m,g) \;=\; (m, \tau_{\alpha\beta}(m) g) \qquad \textit{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta\,,\, g \in G$$

(veja a equação (2.85)) implica a condição de compatibilidade

$$((\Phi_\alpha)_Q \circ (\Phi_\beta)_Q^{-1})(m,q) \;=\; (m, \tau_{\alpha\beta}(m) \cdot q) \qquad \textit{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta\,,\, q \in Q$$

(veja a equação (2.72)).

(v) Toda trivialização equivariante admissível $\Phi : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ de P sobre um aberto U de M induz uma trivialização equivariante $\tilde{\Phi} : \rho_Q^{-1}(\pi^{-1}(U)) \to \pi^{-1}(U) \times G$ de $P \times Q$ sobre o aberto $\pi^{-1}(U)$ de $P \times_Q G$, de modo a preservar as funções de transição, no sentido que a condição de compatibilidade

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m, g) \;=\; (m, \tau_{\alpha\beta}(m) g) \qquad \textit{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta\,,\, g \in G$$

(veja a equação (2.85)) implica a condição de compatibilidade

$$(\tilde{\Phi}_\alpha \circ \tilde{\Phi}_\beta)([p,q], g) \;=\; ([p,q]\,,\, \tau_{\alpha\beta}(\pi[p,q])\, g) \qquad \textit{para } [p,q] \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta),\, g \in G$$

(veja a equação (2.85)).

Demonstração: Começando com os itens (iv) e (v), suponha que $\Phi : \rho^{-1}(U) \to U \times G$ é uma trivialização local equivariante admissível de P, e escreva

$$\Phi(p) \;=\; (\rho(p), \Phi_2(p)) \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U)\,,$$

observando que equivariância de Φ significa que a aplicação $\Phi_2 : \rho^{-1}(U) \to G$ satisfaz

$$\Phi_2(p \cdot g) \;=\; \Phi_2(p)\, g \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U), g \in G\,.$$

Notando ainda que devido à comutatividade do diagrama (2.99), vale $\rho_Q^{-1}(\pi^{-1}(U)) \;=\; \rho^{-1}(U) \times Q$, defina $\Phi_Q : \pi^{-1}(U) \to U \times Q$ e $\tilde{\Phi} : \rho^{-1}(U) \times Q \to \pi^{-1}(U) \times G$ por

$$\Phi_Q[p,q] \;=\; (\rho(p), \Phi_2(p) \cdot q) \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U), q \in Q\,,$$

e

$$\tilde{\Phi}(p,q) \;=\; ([p,q], \Phi_2(p)) \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U), q \in Q\,.$$

Calculando

$$\begin{gathered}(\rho(p \cdot g)\,,\, \Phi_2(p \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot q)) \;=\; (\rho(p)\,,\, (\Phi_2(p) g) \cdot (g^{-1} \cdot q)) \;=\; (\rho(p)\,,\, \Phi_2(p) \cdot q) \\ \text{para } p \in \rho^{-1}(U), q \in Q, g \in G\,,\end{gathered}$$

concluímos que a aplicação Φ_Q é bem definida. De modo semelhante, equivariância de Φ implica equivariância de $\tilde{\Phi}$:

$$\begin{gathered}\tilde{\Phi}((p,q)\cdot g) = \tilde{\Phi}(p\cdot g\,,\, g^{-1}\cdot q) = ([p\cdot g\,,\, g^{-1}\cdot q]\,,\, \Phi_2(p\cdot g)) = ([p,q]\,,\, \Phi_2(p)\, g) = \tilde{\Phi}(p,q)\cdot g \\ \text{para } p \in \rho^{-1}(U), q \in Q, g \in G\,.\end{gathered}$$

Ademais, Φ sendo bijetora, Φ_Q e $\tilde{\Phi}$ também são, pois expressando o inverso de Φ em termos de uma seção local $\sigma : U \to P$ de P, conforme a equação (2.88), ou seja,

$$\Phi^{-1}(m, g) \;=\; \sigma(m) \cdot g \qquad \text{para } m \in U, g \in G\,,$$

de modo que, em particular, $\Phi_2(\sigma(m)) = 1$ e

$$p \;=\; \sigma(\rho(p)) \cdot \Phi_2(p) \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U)\,,$$

podemos calcular os inversos de Φ_Q e de $\tilde{\Phi}$, dados por

$$\Phi_Q^{-1}(m, q) \;=\; [\sigma(m), q] \qquad \text{para } m \in U, q \in Q\,,$$

e

$$\tilde{\Phi}^{-1}([p,q],g) \;=\; \tilde{\sigma}[p,q]\cdot g \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U),\, q \in Q,\, g \in G\;,$$

com

$$\tilde{\sigma}[p,q] \;=\; (p,q)\cdot \Phi_2(p)^{-1} \;=\; \big(\sigma(\rho(p))\,,\,\Phi_2(p)\cdot q\big) \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U),\, q \in Q\;,$$

sendo que, calculando

$$\big(\sigma(\rho(p\cdot g))\,,\,\Phi_2(p\cdot g)\cdot(g^{-1}\cdot q)\big) \;=\; \big(\sigma(\rho(p))\,,\,\Phi_2(p)\cdot q\big)$$
$$\text{para } p \in \rho^{-1}(U),\, q \in Q,\, g \in G\;,$$

concluímos que a aplicação $\tilde{\sigma}$ é bem definida. Agora, dado duas trivializações locais equivariantes admissíveis $\Phi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ e $\Phi_\beta : \rho^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times G$ de P, correspondendo a duas seções locais $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ e $\sigma_\beta : U_\beta \to P$ de P, com função de transição $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, temos

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(m,g) \;=\; (m, \tau_{\alpha\beta}(m) g) \qquad \text{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta\,,\, g \in G\;.$$

Aplicando Φ_α^{-1} e pondo $g=1$, vem

$$\sigma_\beta(m) \;=\; \sigma_\alpha(m)\cdot \tau_{\alpha\beta}(m) \qquad \text{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta\;,$$

e

$$\Phi_{\beta,2}(p) \;=\; \tau_{\alpha\beta}(\rho(p))^{-1}\,\Phi_{\alpha,2}(p) \qquad \text{para } p \in \rho^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)\;.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
((\Phi_\alpha)_Q \circ (\Phi_\beta)_Q^{-1})(m,q) \;&=\; (\Phi_\alpha)_Q[\sigma_\beta(m),q] \;=\; (\Phi_\alpha)_Q[\sigma_\alpha(m)\cdot\tau_{\alpha\beta}(m)\,,\,q] \\
&=\; (\Phi_\alpha)_Q[\sigma_\alpha(m)\,,\,\tau_{\alpha\beta}(m)\cdot q] \;=\; (m\,,\,\tau_{\alpha\beta}(m)\cdot q)
\end{aligned}$$
$$\text{para } m \in U_\alpha \cap U_\beta,\, q \in Q\;,$$

e

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Phi}_\alpha \circ \tilde{\Phi}_\beta^{-1})([p,q],g) \;&=\; \tilde{\Phi}_\alpha\big((\sigma_\beta(\rho(p))\,,\,\Phi_{\beta,2}(p)\cdot q)\cdot g\big) \\
&=\; \tilde{\Phi}_\alpha\big((\sigma_\alpha(\rho(p))\cdot\tau_{\alpha\beta}(\rho(p))\,,\,(\tau_{\alpha\beta}(\rho(p))^{-1}\,\Phi_{\alpha,2}(p))\cdot q)\cdot g\big) \\
&=\; \tilde{\Phi}_\alpha\big((\sigma_\alpha(\rho(p))\,,\,\Phi_{\alpha,2}(p)\cdot q)\cdot \tau_{\alpha\beta}(\rho(p))\, g\big) \\
&=\; ([p,q]\,,\,\tau_{\alpha\beta}(\rho(p))\, g)
\end{aligned}$$
$$\text{para } p \in \rho^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta),\, g \in G\;.$$

Para provar o item (i), observamos que compondo as trivializações locais Φ_α de P e $(\Phi_\alpha)_Q$ de $P \times_G Q$ com cartas do espaço base M (diminuindo o domínio U_α se for necessário) e com cartas das fibras típicas G e Q, obtemos cartas de P, de $P \times Q$ e de $P \times_G Q$ que definem uma estrutura de variedade em $P \times_G Q$ tal que as aplicações π e ρ_Q são diferenciáveis (e de fato são submersões sobrejetoras, já que suas representações locais nestas cartas são projeções lineares). Com isso, os itens (ii) e (iii) se tornam consequências dos itens (iv) e (v). □

2.18 Definição Mantendo-se a notação do teorema anterior, $(P \times_G Q, M, \pi, Q, G)$ é chamado o **fibrado associado** ao fibrado principal P, mediante a ação dada de G sobre sua fibra típica Q.

Notamos que essa construção é extremamente geral, pois qualquer G-fibrado E sobre M cujo grupo estrutural age efetivamente na sua fibra típica pode, a menos de um isomorfismo estrito, ser obtido como fibrado associado a algum G-fibrado principal P sobre M. De fato, basta escolher um atlas $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de trivializações locais de E, com funções de transição $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, e aplicar o método de amalgamação (Teorema 2.1, com Q substituído por G e a ação (2.68) de G sobre Q substituída pela ação de G sobre si mesmo por translações à esquerda) para construir um G-fibrado principal P sobre M; verifica-se então que o fibrado $P \times_G Q$ associado a P mediante a ação (2.68) de G sobre Q é isomorfo ao fibrado original E. Deixaremos os detalhes desta demonstração como exercício para o leitor.

Quanto a estruturas adicionais, vale o seguinte princípio: *qualquer estrutura adicional sobre a fibra típica que é invariante sob a ação do grupo estrutural é "herdada" pelo correspondente fibrado associado, i.e., induz uma estrutura correspondente em cada uma das suas fibras que depende diferenciavelmente dos pontos da variedade base.* Um exemplo elementar é a seguinte

2.3 Proposição *Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho : P \to M$ e grupo estrutural G, e seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial munido de uma ação de G por isomorfismos lineares, correspondendo a uma representação*

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E}) . \tag{2.101}$$

Então o fibrado associado $P \times_G \mathbb{E}$ é um fibrado vetorial sobre M. Ademais, se F for qualquer funtor diferenciável covariante na categoria dos espaços vetoriais com isomorfismos e se denotarmos o funtor induzido na categoria dos fibrados vetoriais sobre M com isomorfismos estritos também por F, como no Teorema 1.3, temos um isomorfismo canônico

$$\mathsf{F}(P \times_G \mathbb{E}) \;\cong\; P \times_G \mathsf{F}(\mathbb{E}) , \tag{2.102}$$

de fibrados vetoriais sobre M, onde o fibrado associado $P \times_G \mathsf{F}(\mathbb{E})$ é formado usando a representação de G sobre $\mathsf{F}(\mathbb{E})$ induzida pela representação dada de G sobre $\mathbb{E}$. Em particular,

$$T^p_q(P \times_G \mathbb{E}) \;\cong\; P \times_G T^p_q(\mathbb{E}) . \tag{2.103}$$

Demonstração: Para a primeira afirmação, notamos inicialmente que quaisquer dois pontos na mesma fibra de $P \times_G \mathbb{E}$ podem sempre ser escritos na forma $[p, e_1]$ e $[p, e_2]$ com $p \in P$ e $e_1, e_2 \in \mathbb{E}$, pois para $[p_1, e_1], [p_2, e_2] \in P \times_G \mathbb{E}$ com $\pi[p_1, e_1] = \pi[p_2, e_2]$, vale $\rho(p_1) = \rho(p_2)$ e portanto existe (um único) $g \in G$ tal que $p_2 = p_1 \cdot g$, o que implica $[p_2, e_2] = [p_1 \,,\, g \cdot e_2]$. Sendo assim, podemos definir a estrutura de espaço vetorial em cada fibra de $P \times_G \mathbb{E}$ pela fórmula

$$\lambda_1[p, e_1] + \lambda_2[p, e_2] \;=\; [p \,,\, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2] \qquad \text{para } p \in P,\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},\, e_1, e_2 \in \mathbb{E} , \tag{2.104}$$

observando que o resultado não depende do ponto p escolhido na respectiva fibra de P. A segunda afirmação é uma consequência direta da construção do fibrado associado e do funtor induzido. □

De modo semelhante, temos

2.4 Proposição *Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho : P \to M$ e grupo estrutural G, e seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial munido de uma família finita $\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ de tensores $\sigma_i \in T^{p_i}_{q_i}\mathbb{E}$ e munido de uma ação de G por isomorfismos lineares que preservam todos estes tensores, correspondendo a uma representação*

$$G \longrightarrow G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E}) . \tag{2.105}$$

Então o fibrado associado $P \times_G \mathbb{E}$ é um fibrado vetorial sobre M munido de uma estrutura adicional $(\Sigma, \boldsymbol{\Sigma})$ como na Definição 1.24.

Demonstração: Usando o isomorfismo canônico (2.103) como identificação, podemos definir a família finita $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ de seções $\sigma_i \in \Gamma(T^{p_i}_{q_i}(P \times_G \mathbb{E})) \cong \Gamma(P \times_G T^{p_i}_{q_i}\mathbb{E})$ que acompanha a família finita $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k\}$ de tensores $\boldsymbol{\sigma}_i \in T^{p_i}_{q_i}\mathbb{E}$ dada, pela fórmula

$$\sigma_i(m) \;=\; [p\,,\boldsymbol{\sigma}_i] \qquad \text{para } p \in P,\, m = \rho(p)\;, \tag{2.106}$$

observando que o resultado não depende do ponto p escolhido na fibra de P sobre o ponto m. □

Notamos que o princípio das "estruturas herdadas" formulado acima é mais geral ainda, pois vale mesmo em situações não-lineares. Por exemplo, se a fibra típica for uma variedade pseudo-riemanniana Q cujo tensor métrico h é G-invariante, de modo que a ação do grupo estrutural G sobre Q é por isometrias, então o fibrado associado $P \times_G Q$ é um fibrado pseudo-riemanniano: cada fibra $(P \times_G Q)_m$ se torna uma variedade pseudo-riemanniana cujo tensor métrico h_m depende diferenciavelmente de m. E assim por diante.

Finalmente, podemos usar o conceito de fibrado associado também para formular um critério para a existência de reduções de grupo estrutural.

2.5 Proposição *Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho : P \to M$ e grupo estrutural G, e seja H um subgrupo fechado de G. Então P admite uma redução de grupo estrutural Q, de G para H, se e somente se o quociente P/H de P pela ação à direita de H, que pode ser identificado com o fibrado associado $P \times_G (G/H)$ a P mediante a ação natural à esquerda de G sobre o espaço homogêneo G/H, admite uma seção global, e neste caso, as possíveis reduções de grupo estrutural Q de P, de G para H, estão em correspondência biunívoca com o conjunto de tais seções globais.*

A demonstração é um simples exercício que deixaremos para o leitor.

A importância da Proposição 2.5 reside no fato de que ela reduz o problema da existência de reduções de grupo estrutural ao da existência de seções de fibrados, para o qual existe uma teoria bem desenvolvida em termos de invariantes algébrico-topológicos conhecidos como "classes de obstrução". Em particular, há uma situação importante em que é possível garantir que não há obstrução nenhuma, pois segundo um teorema geral, um fibrado com fíbra típica contrátil sempre admite seções globais. Portanto, vale o seguinte

2.1 Corolário *Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção $\rho : P \to M$ e grupo estrutural G, e seja H um subgrupo fechado de G tal que o espaço homogêneo G/H é contrátil. Então P sempre admite alguma redução de grupo estrutural Q, de G para H. Em particular, essa conclusão é válida se $G/H \cong \mathbb{R}^k$ – por exemplo, quando G for um grupo de Lie redutivo e H for seu subgrupo maximal compacto.*

Uma exposição da teoria geral de obstrução encontra-se na Ref. [S].

2.4.3 Fibrados de Referenciais

Tendo em vista que qualquer G-fibrado cujo grupo estrutural age efetivamente na sua fibra típica – em particular, qualquer fibrado vetorial – é associado a algum G-fibrado principal, resta a questão como descrever estruturas geométricas em variedades em termos de fibrados principais sobre estas variedades. Uma das ferramentas mais importantes para isso é o conceito de fibrados de referenciais ("frame bundles", em inglês), cuja construção remonta à noção do referencial móvel ("moving frame", em inglês) da geometria diferencial elementar de curvas em $\mathbb{R}^3$, sendo que o grau de generalidade inerente a essa noção já foi plenamente apreciado na obra de Élie Cartan. Resumidamente, pode-se dizer que o fibrado de referenciais é o ambiente dentro do qual o referencial móvel se move, ou seja: o referencial móvel é simplesmente uma curva no fibrado dos referenciais que recobre uma curva na variedade base.

Existem várias construções de fibrados de referenciais de diferentes tipos, mas começaremos aqui pelo mais simples entre eles: o fibrado dos referenciais lineares de um fibrado vetorial.

Suponha que E é um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$. Dado um ponto m de M, um **referencial linear** de E em m é uma aplicação linear inversível u_m da fibra típica $\mathbb{E}$ na fibra E_m em m. Se fixarmos uma base na fibra típica $\mathbb{E}$ e assim identificarmos $\mathbb{E}$ com $\mathbb{R}^r$ ou $\mathbb{C}^r$ (dependendo se E for um fibrado vetorial real ou complexo, e supondo que tenha posto r), podemos identificar u_m com a base de E_m que é imagem da base escolhida de $\mathbb{E}$ sob u_m e assim concluir que um referencial linear de E em m é simplesmente uma base da fibra E_m de E em m. Assim, o conjunto dos referenciais lineares de E em m é

$$\mathrm{Fr}_m(E) \;=\; \mathrm{Iso}(\mathbb{E}, E_m) \;=\; \{\, u_m \in \mathrm{L}(\mathbb{E}, E_m) \mid u_m \text{ inversível} \,\}\;. \tag{2.107}$$

Note que existe uma ação natural do grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ sobre $\mathrm{Fr}_m(E)$ por composição à direita, que é livre e transitiva,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}_m(E) \times \mathrm{GL}(\mathbb{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Fr}_m(E) \\ (u_m, g) & \longmapsto & u_m \circ g \end{array}\;, \tag{2.108}$$

e podemos mostrar que a união disjunta

$$\mathrm{Fr}(E) \;=\; \bigcup_{m \in M} \mathrm{Fr}_m(E) \tag{2.109}$$

é o espaço total de um fibrado principal sobre M com grupo estrutural $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ chamado o **fibrado dos referenciais lineares de** E. Para isso, observamos que toda trivialização admissível $\Phi_E : E|_U \to U \times \mathbb{E}$ de E sobre um aberto U de M induz uma trivialização equivariante $\Phi_{\mathrm{Fr}(E)} : \mathrm{Fr}(E)|_U \to U \times \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ de $\mathrm{Fr}(E)$ sobre o mesmo aberto U de M: basta definir, para todo ponto m de U, $(\Phi_{\mathrm{Fr}(E)})_m : \mathrm{Fr}_m(E) \to \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ em termos de $(\Phi_E)_m : E_m \to \mathbb{E}$:

$$(\Phi_{\mathrm{Fr}(E)})_m(u_m) \;=\; (\Phi_E)_m \circ u_m \qquad \text{para } m \in U,\, u_m \in \mathrm{Fr}_m(E)\;. \tag{2.110}$$

Então é óbvio que $\Phi_{\mathrm{Fr}(E)} : \mathrm{Fr}(E)|_U \to U \times \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ é uma bijeção, com bijeção inversa dada por

$$(\Phi_{\mathrm{Fr}(E)})_m^{-1}(g) \;=\; (\Phi_E)_m^{-1} \circ g \qquad \text{para } m \in U,\, g \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})\;, \tag{2.111}$$

e que $\Phi_{\mathrm{Fr}(E)} : \mathrm{Fr}(E)|_U \to U \times \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ é equivariante sob a ação de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ à direita. Em termos de seções, isso significa que (sempre mediante escolha de uma base fixa na fibra típica $\mathbb{E}$), uma base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções e_α de E sobre um aberto U de M corresponde biunivocamente a uma seção de $\mathrm{Fr}(E)$ sobre o mesmo aberto U de M. Também é claro que essa construção preserva funções de transição, ou seja: as funções de transição entre trivializações locais de E e entre as correspondentes trivializações locais equivariantes de $\mathrm{Fr}(E)$ são as mesmas.

Quando E é o fibrado tangente TM da variedade base M, com fibra típica $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$), escrevemos $\mathrm{Fr}_m(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ ao invés de $\mathrm{Fr}_m(TM)$ e $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ ao invés de $\mathrm{Fr}(TM)$ e chamamos este fibrado principal o **fibrado dos referenciais lineares de** M.

Essas construções podem facilmente ser generalizadas a fibrados vetoriais com alguma estrutura adicional. De fato, suponha que E é um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$, munido de uma estrutura adicional $(\Sigma, \boldsymbol{\Sigma})$ como na Definição 1.24. Dado um ponto m de M, um **referencial linear** de E em m **compatível** com ou **adaptado** a essa estrutura adicional é uma aplicação linear inversível u_m da fibra típica $\mathbb{E}$ na fibra E_m em m satisfazendo a condição

$$T^{p_i}_{q_i} u_m \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \;=\; \sigma_i(m) \qquad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k$$

(veja a equação (1.276)). Assim, o conjunto dos referenciais lineares compatíveis ou adaptados de E em m é

$$\mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(E) \;=\; \mathrm{Iso}_{\Sigma}(\mathbb{E}, E_m) \;=\; \left\{ u_m \in \mathrm{L}(\mathbb{E}, E_m) \;\middle|\; \begin{array}{c} u_m \text{ inversível e} \\ T^{p_i}_{q_i} u_m \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \;=\; \sigma_i(m) \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant k \end{array} \right\}. \tag{2.112}$$

Como antes, existe uma ação natural, desta vez do grupo $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ definido na equação (1.277), sobre $\mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(E)$ por composição à direita, que é livre e transitiva,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(E) \times G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(E) \\ (u_m, g) & \longmapsto & u_m \circ g \end{array}, \tag{2.113}$$

e podemos mostrar que a união disjunta

$$\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E) \;=\; \bigcup_{m\in M} \mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(E) \tag{2.114}$$

é o espaço total de um fibrado principal sobre M com grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ chamado o **fibrado dos referenciais (lineares) compatíveis** ou **adaptados de** E. Para isso, observamos que, pelas mesmas fórmulas que antes (mais precisamente, pelas equações (2.110) e (2.111), com $\mathrm{Fr}(E)$ substituído por $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$, $\mathrm{Fr}_m(E)$ substituído por $\mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(E)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ substituído por $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$), toda trivialização compatível $\Phi_E : E|_U \to U \times \mathbb{E}$ de E sobre um aberto U de M induz uma trivialização equivariante $\Phi_{\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)} : \mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)|_U \to U \times G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ de $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ sobre o mesmo aberto U de M. Em termos de seções, isso significa que (sempre mediante escolha de uma base compatível na fibra típica $\mathbb{E}$), uma base compatível $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de seções e_α de E sobre um aberto U de M corresponde biunivocamente a uma seção de $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ sobre o mesmo aberto U de M. Novamente, é claro que essa construção preserva funções de transição, ou seja: as funções de transição entre trivializações locais compatíveis de E e entre as correspondentes trivializações locais equivariantes de $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ são as mesmas. Finalmente, é claro que $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ é um subfibrado principal de $\mathrm{Fr}(E)$, ou seja, uma redução de grupo estrutural de $\mathrm{Fr}(E)$, de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ para $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$.

Quando E é o fibrado tangente TM da variedade base M, com fibra típica $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$), escrevemos $\mathrm{Fr}_m(M, G_{\boldsymbol{\Sigma}})$ ao invés de $\mathrm{Fr}_{\Sigma,m}(TM)$ e $\mathrm{Fr}(M, G_{\boldsymbol{\Sigma}})$ ao invés de $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(TM)$ e chamamos este fibrado principal o **fibrado dos referenciais (lineares) compatíveis** ou **adaptados de** M.

2.4 Exemplos Seja E um fibrado vetorial real de posto r [8] e seja $k = 1$, $p_1 = 0$, $q_1 = 2$, o que corresponde a uma estrutura dada por um único campo de tensores covariantes de grau 2, como no Exemplo 1.9.

(a) Se o tensor for simétrico e não-degenerado, ou seja, uma métrica g nas fibras (e tiver assinatura (p, q), digamos, com $p + q = r$), o grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ é o grupo pseudo-ortogonal $\mathrm{O}(p, q)$; então $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ é o **fibrado dos referenciais ortonormais de** E, e quando $E = TM$, o **fibrado dos referenciais ortonormais de** M, denotado por $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{O}(p, q))$.

[8] Como antes, identificamos a fibra típica $\mathbb{E}$ com $\mathbb{R}^r$ e o grupo geral linear $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ com o grupo de matrizes $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$.

(b) Se o tensor for antissimétrico e não-degenerado, ou seja, uma forma simplética ω nas fibras (o que requer que r seja par), o grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ é o grupo simplético $\mathrm{Sp}(r,\mathbb{R})$; então $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ é o **fibrado dos referenciais canônicos** ou **simpléticos de** E, e quando $E = TM$, o **fibrado dos referenciais canônicos** ou **simpléticos de** M, denotado por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Sp}(r,\mathbb{R}))$.

2.5 Exemplos Seja E um fibrado vetorial real de posto r [8] e seja $k=1$, $p_1=1$, $q_1=1$, o que corresponde a uma estrutura dada por um único campo de tensores mistos de tipo $(1,1)$, ou seja, um campo de transformações lineares (ou de endomorfismos) de E, como no Exemplo 1.11.

(a) Se σ for uma involução I (e tiver autovalor $+1$ com multiplicidade p e autovalor -1 com multiplicidade q, digamos, com $p+q = r$), o grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ é o produto cartesiano de dois grupos gerais lineares reais, $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$; então $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ é o **fibrado dos referenciais adaptados de** E, e quando $E = TM$, o **fibrado dos referenciais adaptados de** M, denotado por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{R}))$, onde "adaptados" significa "adaptados à decomposição direta de E nos dois subfibrados vetoriais E^+ e E^- nos quais vale $I = +1$ e $I = -1$, respectivamente" (veja o Exemplo 1.11, (a)).

(b) Se σ for uma antiinvolução J (o que requer que r seja par), o grupo estrutural $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ é o grupo geral linear complexo $\mathrm{GL}(r/2,\mathbb{C})$; então $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ é o **fibrado dos referenciais lineares complexos de** E, e quando $E = TM$, o **fibrado dos referenciais lineares complexos de** M, denotado por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{GL}(r/2,\mathbb{C}))$.

Reciprocamente, E é, a menos de um isomorfismo, o fibrado associado a $\mathrm{Fr}(E)$ mediante a representação canônica de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ sobre $\mathbb{E}$ e também o fibrado associado a $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ mediante a representação canônica de $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$ sobre $\mathbb{E}$,

$$\mathrm{Fr}(E)\times_{\mathrm{GL}(\mathbb{E})}\mathbb{E} \;\cong\; E \quad , \quad \mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)\times_{G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})}\mathbb{E} \;\cong\; E \;, \tag{2.115}$$

sendo que o referido isomorfismo é explicitamente dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}(E)\times_{\mathrm{GL}(\mathbb{E})}\mathbb{E} & \xrightarrow{\cong} & E \\ {[u_m,e]} & \longmapsto & u_m(e) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)\times_{G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})}\mathbb{E} & \xrightarrow{\cong} & E \\ {[u_m,e]} & \longmapsto & u_m(e) \end{array} \;.$$

Segue destas observações que dado um fibrado vetorial E sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$, a escolha de uma estrutura adicional $(\Sigma,\boldsymbol{\Sigma})$ em E como na Definição 1.24 corresponde biunivocamente à escolha de uma redução de grupo estrutural do $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$-fibrado principal $\mathrm{Fr}(E)$ dos referenciais lineares de E ao $G_{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbb{E})$-fibrado principal $\mathrm{Fr}_{\Sigma}(E)$ dos referenciais lineares compatíveis de E. Esse ponto de vista pode ser generalizado para subgrupos fechados quaisquer de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ e, em um segundo passo, até para grupos de Lie quaisquer, mediante fixação de uma representação na fibra típica que pode até ter um núcleo não-trivial, o que nos leva a adotar a seguinte

2.19 Definição Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$, e seja G um grupo de Lie com uma representação

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \;. \tag{2.116}$$

Uma G-**estrutura** em E é um G-fibrado principal P sobre M em conjunto como um homomorfismo estrito

$$f : P \longrightarrow \mathrm{Fr}(E) \tag{2.117}$$

de fibrados principais em relação ao homomorphismo (2.116). Claramente, nesta hipótese, o fibrado vetorial E é canonicamente isomorfo ao fibrado vetorial associado $P \times_G \mathbb{E}$:

$$E \;\cong\; P \times_G \mathbb{E}\,. \tag{2.118}$$

Uma G-**estrutura** em M é uma G-estrutura no fibrado tangente TM de M.

Note que se G for um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$, o G-fibrado principal P será uma redução de grupo estrutural do $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$-fibrado principal $\mathrm{Fr}(E)$ dos referenciais lineares de E . Em particular, isso inclui as estruturas adicionais no sentido da Definição 1.24: são simplesmente $G_{\mathfrak{T}}(\mathbb{E})$-estruturas no sentido da Definição 2.19. Porém, mesmo quando se impõe a restrição de que G seja um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$, o conceito de G-estrutura introduzido na Definição 2.19 é mais geral, pois ele também abrange casos em que o grupo estrutural G é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ que não é algébrico, ou seja, que não pode ser obtido como grupo de estabilidade de um conjunto apropriado de tensores sobre $\mathbb{E}$. Como exemplos, apresentamos as noções de orientação e de estrutura conforme:

2.6 Exemplo Seja E um fibrado vetorial real de posto r.[8] Uma **orientação nas fibras** de E é uma classe de equivalência $[\omega]$ de seções ω de $\bigwedge^r E^*$, onde ω' é equivalente a ω se e somente se existe uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $f > 0$ e $\omega' = f\omega$. No caso especial em que $E = TM$, onde ω é uma forma de volume, dizemos que $[\omega]$ é uma **orientação** de M. O grupo estrutural, neste caso, é $G = \mathrm{GL}_0(r,\mathbb{R})$, que é a componente conexa de 1 de $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$.[9] Com esta escolha de G, o correspondente G-fibrado principal $P \subset \mathrm{Fr}(E)$ é chamado o **fibrado dos referenciais orientados de** E, e quando $E = TM$, o **fibrado dos referenciais orientados de** M, denotado por $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}_0(r,\mathbb{R}))$, pois um referencial linear $u_m \in \mathrm{Fr}_m(E)$, visto como aplicação linear inversível $u_m : \mathbb{R}^r \to E_m$, pertence a P_m se e somente se o isomorfismo linear induzido $\bigwedge^r u_m^* : \bigwedge^r E_m^* \to \bigwedge^r (\mathbb{R}^r)^*$ levar qualquer forma $\omega(m)$ representando a orientação da fibra E_m em um multiplo positivo da forma volume padrão de $\mathbb{R}^r$.

2.7 Exemplo Seja E um fibrado vetorial real de posto r.[8] Uma **estrutura conforme nas fibras** de E (de assinatura (p,q)) é uma classe de equivalência $[g]$ de métricas nas fibras de E (de assinatura (p,q)), onde g' é equivalente a g se e somente se existe uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $f > 0$ e $g' = fg$. No caso especial em que $E = TM$, onde g é uma métrica, dizemos que $[g]$ é uma **estrutura conforme** em M. O grupo estrutural, neste caso, é o produto cartesiano $G = \mathbb{R}^+ \times \mathrm{O}(p,q)$, onde o fator $\mathbb{R}^+$ representa as **dilatações**, ou seja, multiplicação com escalares > 0 nas fibras (as quais comutam com qualquer outra transformação linear). Com esta escolha de G, o correspondente G-fibrado principal $P \subset \mathrm{Fr}(E)$ é chamado o **fibrado dos referenciais ortonormais conformes de** E, e quando $E = TM$, o **fibrado dos referenciais ortonormais conformes de** M, denotado por $\mathrm{Fr}(M, \mathbb{R}^+ \times \mathrm{O}(p,q))$, pois um referencial linear $u_m \in \mathrm{Fr}_m(E)$, visto como aplicação linear inversível $u_m : \mathbb{R}^r \to E_m$, pertence a P_m se e somente se o isomorfismo linear induzido $\bigvee^2 u_m^* : \bigvee^2 E_m^* \to \bigvee^2 (\mathbb{R}^r)^*$ levar qualquer tensor $g(m)$ representando a estrutura conforme da fibra E_m em um múltiplo positivo do tensor padrão η de $\mathbb{R}^r$.

Observe que em ambos os casos, o grupo estrutural ainda é definido como um subgrupo de estabilidade do grupo geral linear, mas não em relação a uma ação linear em algum espaço vetorial (representação) e sim a uma ação não-linear em um certo espaço projetivo, pois o que é preservado sob a ação do grupo estrutural não são tensores e sim as classes de certos tensores no seu respectivo espaço projetivo.

Quanto à existência de G-estruturas, temos a seguinte afirmação, que é apenas um caso especial da Proposição 2.5.

[9] O grupo geral linear (real) tem exatamente duas componentes conexas, distinguidas pelo sinal do determinante.

2.6 Proposição *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M com projeção $\pi : E \to M$ e fibra típica $\mathbb{E}$, e seja G um subgrupo fechado do grupo geral linear $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$. Então E admite uma G-estrutura $P \subset \mathrm{Fr}(E)$ se e somente se o quociente $\mathrm{Fr}(E)/G$ de $\mathrm{Fr}(E)$ pela ação à direita de G, que pode ser identificado com o fibrado associado $\mathrm{Fr}(E) \times_{\mathrm{GL}(\mathbb{E})} (\mathrm{GL}(\mathbb{E})/G)$ a $\mathrm{Fr}(E)$ mediante a ação natural à esquerda de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ sobre o espaço homogêneo $\mathrm{GL}(\mathbb{E})/G$, admite uma seção global, e neste caso, as possíveis G-estruturas $P \subset \mathrm{Fr}(E)$ estão em correspondência biunívoca com o conjunto de tais seções globais.*

Finalmente, cabe ressaltar uma outra vantagem do conceito de G-estrutura introduzido na Definição 2.19: ele admite a opção de G não ser um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ e sim um recobrimento de um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ ou mesmo uma extensão de um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ por um outro grupo de Lie, não necessariamente discreto. Como exemplo importante, isso permite incluir a noção de estruturas spin e estruturas spin estendidas – um tema de grande importância em geometra pseudo-riemanniana e que será abordado na última seção deste capítulo. Neste caso, porém, o critério da Proposição 2.6 para a existência de G-estruturas não se aplica.

2.4.4 Estruturas Geométricas em Variedades

Estruturas geométricas em variedades são G-estruturas no sentido da Definição 2.19. Este caso é especial porque surge a questão de integrabilidade, ou seja, da existência de seções locais holônomas.

2.20 Definição Seja M uma variedade n-dimensional e $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ o seu fibrado de referenciais lineares. Dizemos que uma seção σ de $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ sobre um aberto U de M é **holônoma** se existe uma carta admissível $(U, x, \tilde{U})$ de M com domínio U tal que

$$\sigma(m) \;=\; (T_m x)^{-1} \qquad \text{para } m \in U \,, \tag{2.119}$$

e que uma seção local σ de $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ é **holônoma** se cada ponto do seu domínio possui uma vizinhança aberta nele contida sobre a qual ela é holônoma. Dada uma G-estrutura em M como na Definição 2.19, dizemos que uma seção σ de P sobre um aberto U de M ou uma seção local de P é **holônoma** se sua composição com o homomorfismo f, i.e., a seção $f \circ \sigma$ de $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$, o for. Neste caso, um sistema de coordenadas locais dado por uma carta $(U, x, \tilde{U})$ de M com domínio U tal que a aplicação tangente Tx a x propociona uma seção holônoma de P sobre U é chamado **admissível** para a G-estrutura P. Finalmente, a referida G-estrutura é chamada **integrável** se todo ponto m de M possui uma vizinhança aberta sobre a qual P admite uma seção holônoma.

Como já foi mencionado (para o caso mais geral do fibrado $\mathrm{Fr}(E)$ dos referenciais lineares de um fibrado vetorial E qualquer), uma seção de $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ sobre um aberto U de M corresponde biunivocamente a uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de campos vetoriais sobre U. Então é claro que a referida seção será holônoma se e somente se essa base for a base coordenada $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ correspondente a algum sistema de coordenadas x^μ sobre U. Assim, seções locais de $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ correspondem biunivocamente a referenciais locais para M, e seções locais holônomas a referenciais locais holônomos; veja a discussão na parte final da Seção 2.2 do Capítulo 1 e, em particular, a Proposição 1.2. Em particular, o fibrado $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ sempre possui seções locais holônomas, em torno de qualquer ponto de M: ele é sempre (trivialmente) integrável. No entanto, para G-estruturas em geral (mesmo com $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), isso está longe de ser verdade, como já pode ser percebido a partir da observação que seções holônomas são dadas por sistemas de coordenadas admissíveis e que a matriz jacobiana $\partial x'^\kappa / \partial x^\mu$ da transformação entre dois sistemas de coordenadas admissíveis x^μ e x'^κ deve tomar valores em G. Alguns dos mais importantes teoremas da geometria diferencial proporcionam critérios de integrabilidade para estruturas geométricas, entre eles os teoremas de Frobenius, de Darboux e de Newlander-Nirenberg, mas apesar de tais critérios sempre constituirem algum tipo de sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem (geralmente não-lineares) que pode ser interpretado como afirmando que um certo “tipo de curvatura” se anula, a forma concreta varia muito. É através da terminologia de G-estruturas que encontramos uma abordagem unificada ao conceito de integrabilidade de estruturas geométricas, mesmo se alguns dos detalhes continuam dependendo fortemente da escolha do grupo G.

Antes de passar a exemplos, queremos introduzir a noção de automorfismo e de automorfismo infinitesimal de uma G-estrutura.

Em primeiro lugar, notamos que uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ entre variedades n-dimensionais induz um homomorfismo $\mathrm{Fr}(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) : \mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \to \mathrm{Fr}(N, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ de fibrados principais sobre $\phi : M \to N$, definido por composição com a aplicação tangente:

$$\mathrm{Fr}_m(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))(u_m) \;=\; T_m\phi \circ u_m \qquad \text{para } m \in M,\, u_m \in \mathrm{Fr}_m(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))\;. \tag{2.120}$$

Novamente, vale a regra da cadeia: dadas aplicações diferenciáveis $\phi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ entre variedades n-dimensionais, temos

$$\mathrm{Fr}(\psi \circ \phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \;=\; \mathrm{Fr}(\psi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \,\circ\, \mathrm{Fr}(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))\;. \tag{2.121}$$

Esta propriedade, em conjunto com o fato de que $\mathrm{Fr}(\mathrm{id}_M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) = \mathrm{id}_{\mathrm{Fr}(M,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))}$, significa que $\mathrm{Fr}(\,.\,, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ é um funtor covariante da categoria das variedades n-dimensionais para a categoria dos fibrados principais com grupo estrutural $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, o **funtor dos referenciais lineares**. Portanto, $\mathrm{Fr}(\,.\,, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ leva difeomorfismos entre variedades n-dimensionais em isomorfismos dos correspondentes fibrados de referenciais e difeomorfismos de uma variedade n-dimensional fixa em automorfismos do correspondente fibrado de referenciais, proporcionando um homomorfismo canônico de grupos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))) \\ \phi & \longmapsto & \mathrm{Fr}(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \end{array} \tag{2.122}$$

que define uma cisão da sequência exata de grupos (2.95) (com P substituído por $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$). Também é claro, a partir das definições e pela regra da cadeia, que se $\phi : M \to N$ é um difeomorfismo, então composição com $\mathrm{Fr}(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) : \mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \to \mathrm{Fr}(N, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ à esquerda e com $\phi^{-1} : N \to M$ à direita, que leva seções (locais) de $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ em seções (locais) de $\mathrm{Fr}(N, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$, leva seções (locais) holônomas em seções (locais) holônomas.

Posto isso, considere duas G-estruturas P e Q em variedades n-dimensionais M e N, respectivamente, $P \subset \mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ e $Q \subset \mathrm{Fr}(N, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$; então um difeomorfismo $\phi : M \to N$ é chamado um **isomorfismo** entre as duas G-estruturas se $\mathrm{Fr}(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))(P) = Q$, de modo que $\mathrm{Fr}(\phi, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) : \mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \to \mathrm{Fr}(N, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ induz um isomorfismo de G-fibrados principais entre elas. Se $N = M$ e $Q = P$, dizemos que ϕ é um **automorfismo** da G-estrutura. Finalmente, um campo vetorial X sobre M é chamado um **automorfismo infinitesimal** da G-estrutura P se X gera um grupo local a um parâmetro de automorfismos de P. Claramente, o conjunto de automorfismos de uma G-estrutura P é um subgrupo de $\mathrm{Diff}(M)$, implicando que o conjunto dos automorfismos infinitesimais de uma G-estrutura P é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de todos os campos vetoriais sobre M. Dependendo do tipo de estrutura, este subgrupo de $\mathrm{Diff}(M)$ e esta subálgebra de $\mathfrak{X}(M)$ podem ter dimensão finita (e, neste caso, o grupo de automorfismos se torna um grupo de Lie e a álgebra dos automorfismos infinitesimais se torna sua álgebra de Lie), mas também há casos em que ambos continuam tendo dimensão infinita.

Novamente, uma grande classe de exemplos é obtida considerando variedades com alguma estrutura adicional no seu fibrado tangente. De fato, suponha que M é uma variedade M munida de uma estrutura adicional $(\Sigma, \boldsymbol{\Sigma})$ no seu fibrado tangente, como na Definição 1.24, e como antes, seja $\mathrm{Fr}(M, G_{\boldsymbol{\Sigma}})$ o fibrado dos referenciais lineares compatíveis de M, agora visto como uma $G_{\boldsymbol{\Sigma}}$-estrutura em M. Então a definição do "pull-back" de campos tensoriais sob difeomorfismos da variedade subjacente e a definição da derivada de Lie de campos tensoriais implicam que

- um difeomorfismo ϕ de M é um automorfismo de $\mathrm{Fr}(M, G_{\boldsymbol{\Sigma}})$ se e somente se ϕ deixa os campos tensoriais $\sigma_i \in \mathfrak{T}^{p_i}_{q_i}(M)$ invariantes, i.e.,

$$\phi^* \sigma_i \;=\; \sigma_i \qquad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k \;, \tag{2.123}$$

- um campo vetorial X sobre M é um automorfismo infinitesimal de $\mathrm{Fr}(M, G_{\boldsymbol{\Sigma}})$ se e somente se a derivada de Lie dos campos tensoriais $\sigma_i \in \mathfrak{T}^{p_i}_{q_i}(M)$ ao longo de X se anula, i.e.,

$$L_X \sigma_i \;=\; 0 \qquad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k \;. \tag{2.124}$$

Concluímos esta seção apresentando uma série de exemplos clássicos de G-estruturas, para reforçar o ponto de vista que *todas as estruturas geométricas em variedades estudadas na geometria diferencial são G-estruturas*. Nestes exemplos, ainda temos que o grupo de Lie G é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$: exemplos onde isso deixa de ser verdade serão discutidos na Seção 2.6 deste capítulo. Conforme a Proposição 2.6, um ingrediente importante para descrever tais estruturas de forma mais explícita é expressar o espaço homogêneo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/G$ em termos de objetos mais familiares.

2.8 Exemplo $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Obviamente, toda variedade admite uma única G-estrutura deste tipo, que é o próprio fibrado dos referenciais lineares $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$, e obviamente esta é sempre integrável. Os automorfismos desta estrutura são todos os difeomorfismos de M e os automorfismos infinitesimais são todos os campos vetoriais sobre M. ◊

2.9 Exemplo Trataremos de dois casos em paralelo:

(a) $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, onde

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1 \,\} \;, \tag{2.125}$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \;=\; \{\, X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0 \,\} \;. \tag{2.126}$$

(Veja o Exemplo 1.10.) Temos que

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \;\cong\; \textstyle\bigwedge^n (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\} \;, \tag{2.127}$$

pois considerando a representação do grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ no espaço $\bigwedge^n (\mathbb{R}^n)^*$ induzida por sua representação canônica em $\mathbb{R}^n$, e notando que essa proporciona uma ação transitiva de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ no conjunto $\bigwedge^n (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ das formas de volume sobre $\mathbb{R}^n$, concluímos que o subgrupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é exatamente o grupo de estabilidade de qualquer uma destas formas. Assim, a escolha de uma $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-estrutura em M corresponde exatamente à escolha de uma **forma de volume** ω sobre M.

(b) $G = \mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, onde $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$ denota a componente conexa de 1 de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$,

$$\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R}) \;=\; \big\{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \big\} \;\cong\; \mathbb{R}^+ \times \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \;, \tag{2.128}$$

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \;\cong\; \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \;. \tag{2.129}$$

(Veja o Exemplo 2.6). Segue diretamente da equação (2.127) que [10]

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R}) \;\cong\; \mathrm{P}^+\Big(\textstyle\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)^*\Big) \;\cong\; \mathbb{Z}_2 \;, \tag{2.130}$$

pois, neste caso, o espaço vetorial subjacente é unidimensional. Assim, a escolha de uma $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$-estrutura em M corresponde à escolha de uma **orientação** de M: ela pode ser vista como uma classe de equivalência $[\omega]$ de formas de volume ω sobre M onde duas tais formas são consideradas equivalentes se cada uma delas pode ser obtida da outra por multiplicação com uma função positiva sobre M. Uma variedade M que admite uma orientação (e então, se for conexa, admite exatamente duas orientações opostas) é chamada uma **variedade orientável**, e a escolha de uma orientação a torna uma **variedade orientada**.

Existência: Uma variedade M admite uma G-estrutura, de qualquer um destes dois tipos, se e somente se a sua primeira classe de Stiefel-Whitney, $w_1(M) \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$, for igual a 0. (Veja, por exemplo, [HUS, Chapter 16, Theorem 12.1, p. 246].)[11]

Integrabilidade: Qualquer G-estrutura de qualquer um destes dois tipos é sempre integrável.

Para estabelecer que a definição de orientabilidade dada aqui coincide com a definição usual em termos da existência de um atlas com funções de transição de determinante > 0 e, ao mesmo tempo, provar as afirmações de integrabilidade automática, considere um sistema de coordenadas locais x^μ em torno de um ponto qualquer de M, correspondendo a uma carta $(U, x, \tilde{U})$ tal que $\tilde{U}$ seja um hipercubo em $\mathbb{R}^n$ (produto de n intervalos abertos) em torno da origem. Para esta carta ser compatível com uma dada $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$-estrutura ou $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-estrutura, a primeira representada por uma classe de equivalência $[\omega]$ de formas de volume ω e a segunda por uma forma de volume específica ω, a base coordenada correspondente $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ deve satisfazer $\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) > 0$, com qualquer representante ω de $[\omega]$, para a primeira, e $\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) = 1$, para a segunda: caso contrário, devemos efetuar uma transformação de coordenadas locais $x^\mu \rightsquigarrow x'^\kappa$ adequada. No caso de uma $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$-estrutura, isto é trivial: se a função $\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$ for negativa no referido ponto de M, ela será negativa no domínio U inteiro (já que $\tilde{U}$ e portanto U são conexos), e assim basta trocar x^1 e x^2. No caso de uma $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-estrutura, introduzimos a função f sobre $\tilde{U}$ definida por $f = \omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) \circ x^{-1}$ e pomos

$$x'^1 \;=\; \int_0^{x^1} dt\; f(t, x^2, \ldots, x^n) \;\;,\;\; x'^2 = x^2 \;,\; \ldots \;,\; x'^n = x^n$$

para obter um novo sistema de coordenadas locais x'^κ que satisfaz

$$\det\Big(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\Big) \;=\; f \;\neq 0$$

[10] Dado um espaço vetorial real V e um cone C em V (i.e., um subconjunto C de V tal que $v \in C \Rightarrow \lambda v \in C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, com $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \lambda > 0\}$), denotamos por $\mathrm{P}^+(C)$ o quociente de C pela ação de $\mathbb{R}^+$ (multiplicação por escalares positivos), i.e., $\mathrm{P}^+(C) = C/\mathbb{R}^+$. Para $C = V \setminus \{0\}$, é uma variedade difeomorfa à esfera unitária de V (em relação a qualquer produto escalar positivo definido) e um recobrimento duplo do espaço projetivo $\mathrm{P}(V) = (V \setminus \{0\})/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

[11] A afirmação de que as condições topológicas para garantir a existência dos dois tipos de G-estrutura são as mesmas é uma consequência do Corolário 2.1, pois $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^+$ é contrátil.

e portanto $\omega(\partial/\partial x'^1, \ldots, \partial/\partial x'^n) = 1$. Em ambos os casos, obtemos assim uma seção local holônoma da respectiva G-estrutura. Segue, em particular, que uma $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$-estrutura sempre admite uma redução de grupo estrutural de $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$ para $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, de modo que a condição de existência de ambas é necessariamente a mesma. Reciprocamente, dado um atlas $(U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M tais que todas as funções de transição entre as cartas tenham matrizes jacobianas de determinante > 0, basta usar, para todo $\alpha \in A$ e todo ponto m de U_α, o pull-back pelo isomorfismo linear $T_m x_\alpha : T_m M \to \mathbb{R}^n$ para transferir a forma de volume padrão de $\mathbb{R}^n$ para $T_m M$ e assim definir uma forma de volume ω_α sobre U_α; então supondo sem perda de generalidade que o recobrimento aberto $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M seja localmente finito e usando uma partição da unidade $(\chi_\alpha)_{\alpha\in A}$ a ele subordinada, podemos colar todas essas formas de volume locais para definir uma forma de volume global,

$$\omega \;=\; \sum_{\alpha\in A} \chi_\alpha \omega_\alpha \;,$$

que representa a orientação dada.

Automorfismos: Um automorfismo de uma $\mathrm{GL}_0(n,\mathbb{R})$-estrutura é um difeomorfismo de M que preserva a orientação (estes formam um subgrupo $\mathrm{Diff}_0(M)$ de $\mathrm{Diff}(M)$ que é exatamente sua componente conexa de 1), enquanto que um automorfismo infinitesimal ainda é qualquer campo vetorial sobre M, sem restrição alguma. Um automorfismo de uma $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-estrutura é um difeomorfismo ϕ de M que preserva a forma de volume ω, i.e., que satisfaz

$$\phi^*\omega \;=\; \omega \;,$$

enquanto que um automorfismo infinitesimal é um campo vetorial X sobre M que satisfaz

$$L_X\omega \;=\; 0 \;.$$

Lembrando que a **divergência** de um campo vetorial X sobre uma variedade M em relação a uma forma de volume ω sobre M é definida como sendo a função $\mathrm{div}(X)$ sobre M satisfazendo

$$L_X\omega \;=\; \mathrm{div}(X)\,\omega \;,$$

concluímos que os automorfismos infinitesimais são os campos vetoriais sobre M de divergência zero. Mencionamos que para estes tipos de G-estrutura, o grupo dos automorfismos (= grupo de difeomorfismos preservando uma orientação ou mesmo uma forma de volume) e a correspondente álgebra dos automorfismos infinitesimais ainda são "grandes": têm dimensão infinita. ◊

2.10 Exemplo Novamente, trataremos de dois casos em paralelo:

(a) $G = \mathrm{O}(p,q)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$, com $n = p+q$, onde, conforme as equações (1.224) e (1.225),

$$\mathrm{O}(p,q) \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A^{\mathsf{T}}\eta\, A = \eta \,\} \;, \tag{2.131}$$

$$\mathfrak{so}(p,q) \;=\; \{\, X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X^{\mathsf{T}}\eta + \eta\, X = 0 \,\} \;. \tag{2.132}$$

(Veja os Exemplos 1.9 e 2.4.) Temos que

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(p,q) \;\cong\; \{\, \hat{g} \in \textstyle\bigvee^2(\mathbb{R}^n)^* \mid \hat{g} \text{ não-degenerada de assinatura } (p,q)\} \;, \tag{2.133}$$

pois considerando a representação do grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no espaço $\bigvee^2(\mathbb{R}^n)^*$ induzida por sua representação canônica em $\mathbb{R}^n$ e, notando que, como resultado do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (veja o Lema 1.1 ou [AM, Proposition 3.1.2, pp. 162-164]), essa representação proporciona uma ação transitiva de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ em cada conjunto de formas bilineares simétricas não-degeneradas de uma determinada assinatura (p,q) sobre $\mathbb{R}^n$,[12] concluímos que (a menos de conjugação) o subgrupo $\mathrm{O}(p,q)$ é exatamente o grupo de estabilidade de qualquer uma destas formas. Assim, a escolha de uma $\mathrm{O}(p,q)$-estrutura em M corresponde exatamente à escolha de uma **métrica pseudo-riemanniana g de assinatura** (p,q) sobre M, tornando M (ou melhor, (M,g)) uma **variedade pseudo-riemanniana.**

(b) $G = \mathrm{CO}(p,q) = \mathbb{R}^+ \times \mathrm{O}(p,q)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{co}(p,q) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(p,q)$, com $n = p+q$, onde consideramos $\mathrm{CO}(p,q)$ como subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{co}(p,q)$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ através da identificação

$$\mathrm{CO}(p,q) \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A^{\mathsf{T}} \eta\, A = \exp(2\sigma_A)\eta \;\text{ com }\; \sigma_A \in \mathbb{R} \,\}\;, \tag{2.134}$$

$$\mathfrak{co}(p,q) \;=\; \{\, X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X^{\mathsf{T}} \eta + \eta\, X = 2\sigma_X 1 \;\text{ com }\; \sigma_X \in \mathbb{R} \,\}\;. \tag{2.135}$$

(Veja o Exemplo 2.7.) Segue diretamente da equação (2.133) que[11]

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{CO}(p,q) \;\cong\; \mathrm{P}^+\Big(\{\, \hat{g} \in {\textstyle\bigvee}^2(\mathbb{R}^n)^* \mid \hat{g} \text{ não-degenerada de assinatura } (p,q) \}\Big)\;. \tag{2.136}$$

Assim, a escolha de uma $\mathrm{CO}(p,q)$-estrutura em M corresponde à escolha de uma **estrutura conforme de assinatura** (p,q) sobre M: ela pode ser vista como uma classe de equivalência $[g]$ de métricas pseudo-riemannianas g de assinatura (p,q) sobre M onde duas tais métricas são consideradas equivalentes, e ditas **conformemente equivalentes**, se cada uma delas pode ser obtida da outra por multiplicação com uma função positiva sobre M.

Existência: No caso riemanniano ($p = 0$ ou $q = 0$), uma variedade M sempre admite uma G-estrutura, de qualquer um destes dois tipos, enquanto que no caso pseudo-riemanniano, tal exigência impõe condições topológicas não-triviais:[13] por exemplo, sabe-se que no caso lorentziano ($p = 1$ ou $q = 1$), uma variedade M admite uma G-estrutura deste tipo se e somente se ela satisfaz uma das duas seguintes condições: (a) ela não é compacta ou (b) ela é compacta com característica de Euler igual a zero.

Integrabilidade: Uma $\mathrm{O}(p,q)$-estrutura é integrável se e somente se o tensor de Riemann R associado à métrica g correspondente se anula, e de modo semelhante, uma $\mathrm{CO}(p,q)$-estrutura é integrável se e somente se o tensor de Weyl W associado à estrutura conforme $[g]$ correspondente se anula. De fato, para que um sistema de coordenadas locais x^μ em torno de um ponto qualquer de M seja compatível com uma dada $\mathrm{O}(p,q)$-estrutura ou $\mathrm{CO}(p,q)$-estrutura, a primeira representada por uma métrica pseudo-riemanniana g de assinatura (p,q) e a segunda por uma classe de equivalência $[g]$ de métricas pseudo-riemannianas g de assinatura (p,q), as componentes $g_{\mu\nu}$ de g em relação à base coordenada correspondente $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ devem satisfazer $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, para a primeira, e $g_{\mu\nu} = \exp(2\sigma)\,\eta_{\mu\nu}$ com uma função σ, para a segunda (onde g é qualquer representante da sua classe): porém, neste caso, podemos passar a um outro representante g' da mesma classe tal que $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Assim, fica evidente que as componentes $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$ do tensor de Riemann e $W^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} = W'^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$ do tensor de Weyl em relação a

[12] Este fato é conhecido como o teorema de inércia de Sylvester.

[13] A afirmação de que as condições topológicas para garantir a existência dos dois tipos de G-estrutura são as mesmas, assim como a afirmação de existência geral no caso riemanniano, são consequências do Corolário 2.1, pois $\mathrm{CO}(p,q)/\mathrm{O}(p,q) \cong \mathbb{R}^+$ é contrátil, e como $\mathrm{O}(n)$ é subgrupo maximal compacto de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, o espaço homogêneo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ e portanto também é contrátil. Porém, o fato de que qualquer variedade admite uma métrica riemanniana também pode ser provado por construção direta, usando partições da unidade para colar métricas riemannianas definidas localmente, em domínios de cartas; obviamente, este argumento falha no caso pseudo-riemanniano.

este sistema de coordenadas locais se anulam. Reciprocamente, se o tensor de Riemann R associado a uma métrica pseudo-riemanniana g se anula, podemos aplicar (uma versão local) da Proposição 1.3 para construir coordenadas locais que são ortonormais. Um argumento análogo pode ser usado para mostrar que se o tensor de Weyl W associado a uma estrutura conforme $[g]$ se anula, então é possível construir coordenadas locais que são ortonormais a menos de um fator escalar, mas a demonstração detalhada desta afirmação está longe de ser trivial e será deixado como desafio para o leitor. Portanto, a escolha de uma $\mathrm{O}(p,q)$-estrutura integrável em M corresponde exatamente à escolha de uma **métrica pseudo-riemanniana g de assinatura (p,q) plana** sobre M, tornando M (ou melhor, (M,g)) uma **variedade pseudo-riemanniana plana.** De modo análogo, a escolha de uma $\mathrm{CO}(p,q)$-estrutura integrável em M corresponde à escolha de uma **estrutura conforme de assinatura (p,q) plana** sobre M: ela pode ser representada por uma **métrica pseudo-riemanniana g de assinatura (p,q) conformemente plana** sobre M, tornando M (ou melhor, (M,g)) uma **variedade pseudo-riemanniana conformemente plana.**

Automorfismos: Um automorfismo de uma $\mathrm{O}(p,q)$-estrutura é um difeomorfismo ϕ de M que preserva o tensor métrico g, i.e., que satisfaz

$$\phi^* g \;=\; g \;,$$

e é chamado uma **isometria** de M, enquanto que um automorfismo infinitesimal é um campo vetorial X sobre M que satisfaz

$$L_X g \;=\; 0 \;,$$

e é chamado um **campo de Killing** sobre M. De modo análogo, um automorfismo de uma $\mathrm{CO}(p,q)$-estrutura, representada por uma métrica pseudo-riemanniana g de assinatura (p,q), é um difeomorfismo ϕ de M que preserva o tensor métrico g a menos de um fator escalar, i.e., que satisfaz

$$\phi^* g \;=\; \exp(2\sigma_\phi) g \;,$$

para alguma função $\sigma_\phi \in \mathfrak{F}(M)$, e é chamado uma **transformação conforme** de M, enquanto que um automorfismo infinitesimal é um campo vetorial X sobre M que satisfaz

$$L_X g \;=\; 2\sigma_X\, g \;,$$

para alguma função $\sigma_X \in \mathfrak{F}(M)$, e é chamado um **campo de Killing conforme** sobre M. Mencionamos que para estes tipos de G-estrutura, o grupo dos automorfismos (= grupo de isometrias ou de transformações conformes) e a correspondente álgebra dos automorfismos infinitesimais, com uma exceção, têm dimensão finita. Mais exatamente, dada uma variedade M de dimensão n qualquer munida de uma tal G-estrutura, o grupo de isometrias e a álgebra de campos de Killing têm dimensão $\leqslant \frac{1}{2}n(n-1)$, enquanto que o grupo de transformações conformes e a álgebra de campos de Killing conformes têm dimensão $\leqslant \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$, sendo que essas cotas são atingidas se e somente se M for um espaço de curvatura constante,

Observação: Estruturas conformes em dimensão baixa ($n = 2$ ou 3) apresentam várias peculiaridades. A primeira é que são sempre integráveis, pois para $n = 3$, o tensor de Weyl se anula identicamente, enquanto que para $n = 2$, ele não é nem bem definido, mas podemos considerá-lo como identicamente nulo também neste caso. Na verdade, para $n = 2$, os tensores de Ricci e de Riemann são completamente determinados por uma única função, que é a curvatura escalar, e a integrabilidade de qualquer estrutura conforme (de tipo riemanniano ou lorentziano) é consequência de uma construção direta de coordenadas locais em que a métrica representante g (riemanniana ou lorentziana) assume a forma $g_{\mu\nu} = \exp(2\sigma)\,\eta_{\mu\nu}$, chamadas de **coordenadas locais isotérmicas.** Outra peculiaridade é que para $n = 2$, ocorre a exceção mencionada no parágrafo anterior: neste caso, e somente neste caso, o grupo de transformações conformes e a álgebra de campos de Killing conformes têm dimensão infinita, o que confere à geometria conforme em duas dimensões um caráter significativamente diferente da geometria conforme em dimensões superiores. ◊

2.11 Exemplo $G = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, com n par, digamos $n = 2m$, onde

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A^{\mathsf{T}} \mathbb{J} A = \mathbb{J} \,\} \;, \tag{2.137}$$

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \;=\; \{\, X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X^{\mathsf{T}} \mathbb{J} + \mathbb{J} X = 0 \,\} \;. \tag{2.138}$$

(Veja os Exemplos 1.9 e 2.4.) Temos que

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \;\cong\; \{\, \hat{\omega} \in \textstyle\bigwedge^2 (\mathbb{R}^n)^* \mid \hat{\omega} \text{ não-degenerada} \,\} \;, \tag{2.139}$$

pois considerando a representação do grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no espaço $\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ induzida por sua representação canônica em $\mathbb{R}^n$ e, notando que, como resultado de um processo análogo ao de ortogonalização de Gram-Schmidt (veja [AM, Proposition 3.1.2, pp.162-164]), essa representação proporciona uma ação transitiva de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no conjunto das formas bilineares antissimétricas não-degeneradas sobre $\mathbb{R}^n$, concluímos que (a menos de conjugação) o subgrupo $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ é exatamente o grupo de estabilidade de qualquer uma destas formas. Assim, a escolha de uma $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$-estrutura em M corresponde exatamente à escolha de uma **forma quase simplética** ω sobre M, tornando M (ou melhor, (M,ω)) uma **variedade quase simplética.**

Existência: Mencionamos apenas que a exigência de que uma variedade M admita uma G-estrutura deste tipo impõe condições topológicas não-triviais, que não discutiremos aqui.

Integrabilidade: Uma $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$-estrutura é integrável se e somente se a derivada exterior $\mathrm{d}\omega$ da forma ω se anula. De fato, para que um sistema de coordenadas locais x^μ em torno de um ponto qualquer de M seja compatível com uma dada $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$-estrutura, representada por uma forma quase simplética ω, as componentes $\omega_{\mu\nu}$ de ω em relação à base coordenada correspondente $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ devem satisfazer $\omega_{\mu\nu} = \mathbb{J}_{\mu\nu}$. Assim, fica evidente que as componentes $\partial_\kappa\omega_{\mu\nu} + \partial_\mu\omega_{\nu\kappa} + \partial_\nu\omega_{\kappa\mu}$ da derivada exterior de ω em relação a este sistema de coordenadas locais se anulam. Reciprocamente, se a derivada exterior $\mathrm{d}\omega$ de uma forma quase simplética ω se anula, um teorema importante da geometria diferencial, conhecido como o *teorema de Darboux* [AM, Theorem 3.2.2, p. 175], garante que é possível construir coordenadas locais, em torno de cada ponto de M, em relação às quais as componentes de ω são constantes (e iguais às de $\mathbb{J}$). Portanto, a escolha de uma $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$-estrutura integrável em M corresponde exatamente à escolha de uma **forma simplética** ω sobre M, tornando M (ou melhor, (M,ω)) uma **variedade simplética.**

Automorfismos: Um automorfismo de uma $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$-estrutura é um difeomorfismo ϕ de M que preserva a forma quase simplética ω, i.e., que satisfaz

$$\phi^*\omega \;=\; \omega \;,$$

e é chamado um **simplectomorfismo** ou uma **transformação canônica** de M, enquanto que um automorfismo infinitesimal é um campo vetorial X sobre M que satisfaz

$$L_X\omega \;=\; 0 \;,$$

e é chamado um **campo localmente hamiltoniano** sobre M. Mencionamos que para este tipo de G-estrutura, o grupo dos automorfismos (= grupo de simplectomorfismos) e a correspondente álgebra dos automorfismos infinitesimais ainda são "grandes": têm dimensão infinita. ◊

2.12 Exemplo $G = \mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(p,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(q,\mathbb{R})$, com $n = p+q$, onde

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}) &= \{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A\eta = \eta A \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \,\middle|\, B \in \mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \,,\, C \in \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}) \right\} , \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(p,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(q,\mathbb{R}) &= \{ X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X\eta = \eta X \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \,\middle|\, Y \in \mathfrak{gl}(p,\mathbb{R}) \,,\, Z \in \mathfrak{gl}(q,\mathbb{R}) \right\} . \end{aligned} \tag{2.141}$$

(Veja os Exemplos 1.11 e 2.5.) Temos que

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/(\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R})) \;\cong\; \{ \hat{I} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \mid \hat{I}^2 = 1 \text{ com } \begin{matrix} \dim\ker(\hat{I}-1) = p \\ \dim\ker(\hat{I}+1) = q \end{matrix} \} , \tag{2.142}$$

pois considerando a representação do grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no espaço $L(\mathbb{R}^n)$ induzida por sua representação canônica em $\mathbb{R}^n$, e notando que, devido ao fato de que uma involução em $\mathbb{R}^n$ é sempre diagonalizável, essa representação proporciona uma ação transitiva de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no conjunto das involuções em $\mathbb{R}^n$ com uma determinada multiplicidade dos seus autovalores (p para $+1$ e q para -1), concluímos que (a menos de conjugação) o subgrupo $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$ é exatamente o grupo de estabilidade de qualquer uma destas involuções. Assim, a escolha de uma $(\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}))$-estrutura em M corresponde exatamente à escolha de uma **involução** I de assinatura (p,q) no seu fibrado tangente, ou ainda, a uma decomposição direta do seu fibrado tangente na soma direta de **duas distribuições transversais** de dimensões p e q, que são as suas **autodistribuições**.

Existência: Mencionamos apenas que a exigência de que uma variedade M admita uma G-estrutura deste tipo impõe condições topológicas não-triviais, que não discutiremos aqui.

Integrabilidade: Uma $(\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}))$-estrutura é integrável se e somente se o tensor de Nijenhuis $N(I)$ da involução I se anula, ou ainda, se e somente se as suas autodistribuições são involutivas. De fato, para que um sistema de coordenadas locais x^μ em torno de um ponto qualquer de M seja compatível com uma dada $(\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}))$-estrutura, representada por uma involução I de assinatura (p,q), as componentes $I_{\mu\nu}$ de I em relação à base coordenada correspondente $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ devem satisfazer $I_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Assim, a definição (1.284) do tensor de Nijenhuis (com R substituído por I e usando que $I^2 = 1$) mostra que as componentes $N(I)^\mu_{\kappa\lambda}$ do tensor de Nijenhuis em relação a este sistema de coordenadas locais se anulam. Reciprocamente, se o tensor de Nijenhuis $N(I)$ associado a uma involução I se anula, um teorema importante da geometria diferencial, conhecido como o *teorema de Frobenius*, garante que é possível construir coordenadas locais, em torno de cada ponto de M, em relação às quais as componentes de I são constantes (e iguais às de η). Portanto, a escolha de uma $(\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}))$-estrutura integrável em M corresponde exatamente à escolha de **duas folheações transversais** de M, decompondo M (localmente) no produto cartesiano de duas subvariedades.

Automorfismos: Um automorfismo de uma $(\mathrm{GL}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{R}))$-estrutura é um difeomorfismo ϕ de M que preserva a involução I, i.e., que satisfaz

$$\phi^* I \;=\; I \,,$$

o que, no caso integrável, equivale à condição de que ele preserva as folheações integrais de I, enquanto que um automorfismo infinitesimal é um campo vetorial X sobre M que satisfaz

$$L_X I \;=\; 0 \,,$$

o que, no caso integrável, equivale à condição de que seu fluxo preserva as folheações integrais de I. Mencionamos que para este tipo de G-estrutura, o grupo dos automorfismos (= grupo de difeomorfismos preservando duas folheações transversais) e a correspondente álgebra dos automorfismos infinitesimais ainda são "grandes": têm dimensão infinita. ◊

Um problema que, talvez surpreendentemente, se mostra bem mais difícil é analisar a G-estrutura que descreve apenas uma distribuição, ou no caso integrável, uma folheação, e não duas transversais. Neste caso, o grupo e a álgebra pertinentes consistem de matrizes triangulares em bloco, do tipo

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} .$$

Deixaremos a elaboração deste caso como exercício para o leitor.

2.13 Exemplo $G = \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$, com n par e $n = 2m$, onde consideramos $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ como subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ através da identificação

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) & \cong & \{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A\mathbb{J} = \mathbb{J}A \} \\ B + iC & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} , \end{array} \tag{2.143}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}) & \cong & \{ X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X\mathbb{J} = \mathbb{J}X \} \\ Y + iZ & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} Y & Z \\ -Z & Y \end{pmatrix} . \end{array} \tag{2.144}$$

(Veja os Exemplos 1.11 e 2.5.) Temos que

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) \;\cong\; \{ \hat{J} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \mid \hat{J}^2 = -1 \} , \tag{2.145}$$

pois considerando a representação do grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no espaço $L(\mathbb{R}^n)$ induzida por sua representação canônica em $\mathbb{R}^n$, e notando que, devido ao fato de que uma antiinvolução em $\mathbb{R}^n$ é sempre diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, com autovalores $+i$ e $-i$ que têm a mesma multiplicidade m, essa representação proporciona uma ação transitiva de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no conjunto das antiinvoluções em $\mathbb{R}^n$, concluímos que (a menos de conjugação) o subgrupo $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ é exatamente o grupo de estabilidade de qualquer uma destas antiinvoluções. Assim, a escolha de uma $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura em M corresponde exatamente à escolha de uma **antiinvolução** J no seu fibrado tangente, ou ainda, a uma **estrutura quase complexa** sobre M, tornando M (ou melhor, (M,J)) uma **variedade quase complexa**.

Existência: Mencionamos aapenas que a exigência de que uma variedade M admita uma G-estrutura deste tipo impõe condições topológicas não-triviais, que não discutiremos aqui.

Integrabilidade: Uma $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura é integrável se e somente se o tensor de Nijenhuis $N(J)$ da antiinvolução J se anula. De fato, para que um sistema de coordenadas locais x^μ em torno de um ponto qualquer de M seja compatível com uma dada $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura, representada por uma antiinvolução J, as componentes $J_{\mu\nu}$ de J em relação à base coordenada correspondente $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ devem satisfazer $J_{\mu\nu} = \mathbb{J}_{\mu\nu}$. Assim, a definição (1.284) do tensor de Nijenhuis (com R substituído por J e usando que $J^2 = -1$) mostra que as componentes $N(J)^\mu_{\kappa\lambda}$ do tensor de Nijenhuis em relação a este sistema de coordenadas locais se anulam. Reciprocamente, se o tensor de Nijenhuis $N(J)$ associado a uma antiinvolução J se anula, um teorema importante da geometria diferencial, conhecido como o *teorema de Newlander-Nirenberg*, garante que é possível construir coordenadas locais, em torno de cada ponto de M, em relação às quais as componentes de J são constantes (e iguais às de $\mathbb{J}$). Portanto, a escolha de uma $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura integrável sobre M corresponde exatamente à escolha de uma **estrutura complexa** sobre M, tornando M (ou melhor, (M,J)) uma **variedade complexa**.

Automorfismos: Um automorfismo de uma $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura é um difeomorfismo ϕ de M que preserva a involução J, i.e., que satisfaz

$$\phi^* J \;=\; J \;,$$

o que, no caso integrável, equivale à condição de que ele seja **biholomorfo**, enquanto que um automorfismo infinitesimal é um campo vetorial X sobre M que satisfaz

$$L_X J \;=\; 0 \;,$$

o que, no caso integrável, equivale à condição de que seu fluxo seja por transformações biholomorfas de M.

> Para estabelecer que esta definição de variedade complexa coincide com a definição usual em termos de cartas e coordenadas locais complexas e de funções de transição holomorfas, identificamos $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{C}^m$ e agrupamos sistemas de coordenadas locais reais x^μ $(1 \leqslant \mu \leqslant n)$ de M em sistemas de coordenadas locais complexas z^i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ de M, pondo
>
> $$z^1 = x^1 + iy^1 \;\text{ com }\; y^1 = x^{m+1} \;,\; \ldots \;,\; z^m = x^m + iy^m \;\text{ com }\; y^m = x^{2m} \;.$$
>
> Então quando reescrevemos uma transformação de coordenadas locais reais $x^\mu \rightsquigarrow x'^\kappa$ como transformação de coordenadas locais complexas $z^i \rightsquigarrow z'^k$, é fácil verificar que as equações de Cauchy-Riemann,
>
> $$\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} - \frac{\partial y'^k}{\partial y^i} \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial x'^k}{\partial y^i} + \frac{\partial y'^k}{\partial x^i} \;=\; 0 \qquad \text{para } 1 \leqslant i,k \leqslant m \;,$$
>
> que expressam a propriedade de que as coordenadas z'^k são funções holomorfas das coordenadas z^i, são exatamente equivalentes à condição de que a matriz jacobiana $\partial x'^\kappa / \partial x^\mu$ comuta com a matriz $\mathbb{J}$. Desta forma, coordenadas locais reais x^μ tais que a base coordenada $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n\}$ proporciona uma seção local holônoma da referida $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura correspondem exatamente a coordenadas locais complexas z^i de M como variedade complexa no sentido tradicional. Para maiores detalhes, veja, por exemplo, [KN2, Chapter 9, pp. 114-185].

Mencionamos que para este tipo de G-estrutura, o grupo dos automorfismos (= grupo de transformações biholomorfas) e a correspondente álgebra dos automorfismos infinitesimais ainda são “grandes”: têm dimensão infinita. ◊

Existem ainda algumas superposições e combinações interessantes entre as várias G-estruturas discutidas nos exemplos anteriores. Por exemplo, para $n = 2$, uma estrutura conforme de assinatura (p,q) de tipo riemanniano (i.e., com $p = 0$ ou $q = 0$), em conjunto com uma orientação, equivale a uma estrutura complexa, pois temos $\mathrm{CO}(p,q) \cap \mathrm{GL}_0(2,\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$. Ou seja: em duas dimensões, geometria conforme (com métrica riemanniana) e geometria complexa são a mesma coisa – um fato que se manifesta com muita clareza na teoria das superfícies de Riemann. Mais geralmente, podemos citar, como análogo complexo da geometria riemanniana, a geometria kähleriana, baseada em G-estruturas com $G = \mathrm{U}(m)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(m)$, com n par e $n = 2m$: uma $\mathrm{U}(m)$-estrutura ou **estrutura quase hermitiana** sobre M é dada por uma estrutura quase complexa J sobre M em conjunto com uma métrica hermitiana $\langle . | . \rangle$ no fibrado tangente TM de M (veja a discussão no final da Seção 6.1 do Capítulo 1) e, devido às interseções

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(m) &= \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2m)\ , \\ \mathrm{U}(m) &= \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})\ , \\ \mathrm{U}(m) &= \mathrm{O}(2m) \cap \mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})\ , \end{aligned} \tag{2.146}$$

pode ser considerada como a interseção entre quaisquer duas das seguintes três estruturas: uma $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$-estrutura representada pela antiinvolução J, uma $\mathrm{O}(n)$-estrutura representada pela métrica riemanniana g que é a parte real de $\langle . | . \rangle$ e uma $\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$-estrutura representada pela forma quase simplética ω que é a parte imaginária de $\langle . | . \rangle$,[14] tornando M (ou melhor, $(M, J, \langle . | . \rangle)$ ou (M, J, g, ω)) uma **variedade quase hermitiana.** Quanto à integrabilidade, M é chamada uma **variedade kähleriana / variedade de Kähler** se J for uma estrutura complexa e ω for uma forma simplética, ou seja, se

$$N(J) = 0 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{d}\omega = 0\ , \tag{2.147}$$

i.e., mas *não* se exige integrabilidade da estrutura riemanniana (pois isso implicaria que M teria que ser plana, o que certamente seria demasiadamente restritivo).

Finalmente, temos o caso de uma estrutura trivial:

2.14 Exemplo $G = \{1\}$, $\mathfrak{g} = \{0\}$. Obviamente, uma variedade admite uma G-estrutura deste tipo se e somente se o seu fibrado dos referenciais lineares $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ admitir uma seção global, ou seja, se e somente se o seu fibrado tangente TM for trivial: lembramos que uma variedade com esta propriedade é chamada de **paralelizável.** Além disso, uma G-estrutura deste tipo será integrável se e somente se a referida seção for holônoma, ou seja, se e somente se a variedade admitir um sistema de coordenadas global, o que significa que ela deve ser difeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$: uma variedade com esta propriedade é frequentemente chamada de trivial. Exemplos de variedades que são paralelizáveis mas, tipicamente, não são triviais são os grupos de Lie. ◊

[14] Valem as inclusões $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_0(2m,\mathbb{R})$ e $\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_0(2m,\mathbb{R})$, o que significa que uma estrutura quase complexa e uma estrutura quase simplética sempre induz uma orientação.

2.5 Conexões em Fibrados Principais e Associados

Existe um número considerável de definições do conceito de conexão principal em um fibrado principal, ou simplesmente, conexão principal, que são equivalentes. É mais ou menos uma questão de gosto onde começar e onde terminar.

2.5.1 Conexões em Fibrados Principais

2.21 Definição Seja P um fibrado principal sobre M com projeção ρ e grupo estrutural G. Uma *conexão principal* sobre P é um subfibrado horozontal HP em TP que é invariante sob a ação do grupo G sobre TP induzida pela ação de G sobre P.

O subfibrado vertical VP em TP sempre é invariante sob a ação de G sobre TP. Ademais, ele é um fibrado vetorial trivial sobre P, munido da trivialização G-equivariante canônica

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & VP \\ (p,X) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p \cdot \exp(tX)\Big|_{t=0} \end{array}$$

Escrevemos a ação de G sobre P na forma

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p,g) & \longmapsto & p \cdot g \end{array}$$

e temos

$$(p \cdot g) \cdot h \;=\; p \cdot (g\,h)$$

e

$$p \cdot 1 \;=\; p$$

sem pontos fixos: $p \cdot g = p \;\Rightarrow\; g = 1$. Escrevemos a ação induzida de G sobre TP na forma

$$\begin{array}{ccc} TP \times G & \longrightarrow & TP \\ (v,g) & \longmapsto & v \cdot g \end{array}$$

então

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p(t)\Big|_{t=0}\right) \cdot g \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p(t) \cdot g\Big|_{t=0}$$

e temos

$$(v \cdot g) \cdot h \;=\; v \cdot (g\,h)$$

e

$$v \cdot 1 \;=\; v$$

Então $v \in VP$ significa que $T_p\rho(v) = 0$. Tais vetores podem ser escritos como tangentes

$$v \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p(t)\Big|_{t=0} \qquad , \quad p(0) \;=\; p$$

à curvas verticais em P:

$$\rho(p(t)) \;=\; \rho(p)$$

Podem até ser escritos na forma

$$v \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p \cdot g(t)\,\Big|_{t=0} \qquad , \quad g(0) \;=\; 1$$

onde $t \mapsto g(t)$ é uma curva em G passando por 1. De fato, se $\Phi : P|_U \to U \times G$ é uma trivialização equivariante de P em torno de $x = \rho(p)$ tal que, sem perda de generalidade, $\Phi(p) = (x, 1)$, temos

$$\Phi(p(t)) \;=\; (x(t), g(t))$$

a condição $\rho(p(t)) = x$ significa $x(t) = x$. Então

$$\begin{aligned} p \cdot g \;&=\; \Phi^{-1}(x,1) \cdot g \\ &=\; \Phi^{-1}((x,1) \cdot g(t)) \\ &=\; \Phi^{-1}(x, g(t)) \\ &=\; p(t)\,. \end{aligned}$$

Pondo $X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)|_{t=0} \in \mathfrak{g}$ obtemos

$$\begin{aligned} v \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p(t)\,\Big|_{t=0} \\ &=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(p \cdot g(t))\,\Big|_{t=0} \\ &=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(p \cdot \exp(tX))\,\Big|_{t=0}\,. \end{aligned}$$

Pois,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(p \cdot g(t))\,\Big|_{t=0} \;=\; T_g L_p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(t)\,|_{t=0} \right) \;=\; T_g L_p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \exp(tX)\Big|_{t=0} \right)$$

onde $L_p(g) = p \cdot g$.

2.22 Definição Seja P um fibrado principal, com projeção ρ e grupo estrutural G. Uma *forma de conexão* sobre P é uma 1-forma A sobre P a valores em $\mathfrak{g}$, que é equivariante sob a ação de G:

$$A_{p \cdot g}(u \cdot g) \;=\; \mathrm{Ad}(g^{-1})(A_p(u))$$

para todo $g \in G$, $p \in P$, $u \in T_p P$ e normalizada pela condição

$$A_p \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p \cdot \exp(tX)\Big|_{t=0} \right) \;=\; X$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $p \in P$.

2.7 Proposição *Seja P um fibrado principal, com projeção ρ e grupo estrutural G. As conexões principais sobre P estão em correpondencia biunívoca com as formas de conexão sobre P, pondo*

$$H_p P \;=\; \ker(A_p)$$

para todo $p \in P$, quando consideramos A_p como aplicação linear de $T_p P$ em $\mathfrak{g}$.

Demonstração: Seja A uma forma de conexão sobre P e $H_pP = \ker(A_p)$, para todo $p \in P$. A condição de normalização para A implica que $H_pP \cap V_pP = \{0\}$. Compondo A_p com o isomorfismo canônico $\mathfrak{g} \to V_pP$ definido anteriormente, obtemos uma aplicação linear $\tilde{A}_p : T_pP \to V_pP$ tal que $\tilde{A}_p|_{V_pP} = \mathrm{id}_{V_pP}$ e $H_pP = \ker(\tilde{A}_p)$. Portanto

$$T_pP \;=\; V_pP \oplus H_pP$$

e $\tilde{A}_p$ é o operador de projeção sobre o espaço vertical V_pP ao longo do espaço horizontal H_pP. É óbvio que a equivariância de A implica a equivariância de $\tilde{A}$ que implica invariância de H. □

2.5.2 Conexões em Fibrados Associados

Há duas maneiras diferentes de abordar este tema.

Seja P um fibrado principal sobre uma variedade M com projeção ρ e grupo estrutural G. Seja Q uma variedade munida de uma ação $G \times Q \to Q$. Seja $P \times_G Q$ o fibrado associado sobre M com projeção π e fibra típica Q. Dada uma conexão principal em P, na forma de um subfibrado horizontal HP que é G-invariante, construímos uma conexão geral em $P \times_G Q$, na forma de um fibrado horizontal $H(P \times_G Q)$, chamada a *conexão associada*.

Para sua construção, consideramos novamente o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
P \times Q \arrow[r, "\rho_Q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & P \times_G Q \arrow[d, "\pi"] \\
P \arrow[r, "\rho"'] & M
\end{tikzcd}$$

e a aplicação tangente à projeção ρ_Q nos pontos $(p,q) \in P \times Q$, isto é[15]

$$T_{(p,q)}\rho_Q : T_pP \oplus T_qQ \longrightarrow T_{[p,q]}(P \times_G Q)\,,$$

que é sobrejetora. Então temos

$$T_{(p,q)}\rho_Q(V_pP \oplus T_qQ) \;=\; V_{[p,q]}(P \times_G Q)\,.$$

De fato, para $u \in V_pP$, $w \in T_qQ$ com

$$u \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(p \cdot g(t))\,\Big|_{t=0} \qquad , \quad w \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q(t)\,\Big|_{t=0}\,,$$

temos

$$\begin{aligned}
T_{[p,q]}\pi\left(T_{(p,q)}\rho_Q(u,w)\right) \;&=\; T_{[p,q]}\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p \cdot g(t), q(t)]\right) \\
&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\pi[p \cdot g(t), q(t)]\,\Big|_{t=0} \\
&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\rho(p \cdot g(t))\,\Big|_{t=0} \\
&=\; 0\,.
\end{aligned}$$

[15] Lembrando o isomorfismo canônico $T_{(p,q)}(P \times Q) \cong T_pP \oplus T_qQ$.

Por outro lado, para $u \in T_p P$, $w \in T_q Q$ com

$$u \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p(t)\Big|_{t=0} \qquad , \quad w \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q(t)\Big|_{t=0} \,,$$

temos

$$\begin{aligned} T_{[p,q]}\pi\left(T_{(p,q)}\rho_Q(u,w)\right) &= T_{[p,q]}\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p(t),q(t)]\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\pi[p(t),q(t)]\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\rho(p(t))\Big|_{t=0} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto, definimos

$$T_{(p,q)}\rho_Q(H_p P) \;=\; H_{[p,q]}(P \times_G Q)\,. \tag{2.148}$$

Este é um subespaço bem definido de $T_{[p,q]}(P \times_G Q)$ devido à G-invariância do subfibrado horizontal em P. Escrevemos $H_p P$ para o subespaço horizontal de $T_p P$ e $H_{(p,q)}P$ para o mesmo subespaço mas como subespaço de $T_p P \oplus T_q Q$, isto é, $H_{(p,q)}P = \mathrm{pr}_1^*(H_p P)$. Temos que

$$H_{(p\cdot g,g^{-1}\cdot q)}P \;=\; H_{(p,q)}P \odot g$$

onde $\odot g$ denota a ação de G sobre $T(P \times Q) = TP \times TQ$ induzida pela ação de G sobre $P \times Q$ já considerada antes

$$\begin{array}{ccc} (P \times Q) \times G & \longrightarrow & P \times Q \\ ((p,q),g) & \mapsto & (p\cdot g, g^{-1}\cdot q)\,. \end{array}$$

Então a definição (2.148) seria melhor escrita como

$$T_{(p,q)}\rho_Q(H_{(p,q)}P) \;=\; H_{[p,q]}(P \times_G Q)\,. \tag{2.149}$$

e faz sentido pois

$$\begin{aligned} T_{(p\cdot g,g^{-1}\cdot q)}\rho_Q(H_{(p\cdot g,g^{-1}\cdot q)}P) &= T_{(p\cdot g,g^{-1}\cdot q)}\rho_Q(H_{(p,q)}P) \\ &= T_{R_g(p)}\rho_Q(T_{(p,q)}R_g(H_{(p,q)}P)) \\ &= T_{(p,q)}(\rho_Q \circ R_g)(H_{(p,q)}P) \\ &= T_{(p,q)}\rho_Q(H_{(p,q)}P)\,, \end{aligned}$$

onde $R_g : P \times Q \to P \times Q$ é a translação à direita por g: $(p,q) \mapsto (p\cdot g, g^{-1}\cdot q)$.

Se a variedade Q possuir alguma estrutura invariante sob a ação de G, sabemos que todos as fibras do fibrado associado $P \times_G Q$ herdam esta estrutura. Ademais, esta estrutura nas fibras de $P \times_G Q$ será invariante em relação a qualquer conexão associada a uma conexão principal sobre P.

Seja P um fibrado principal sobre M com projeção ρ e grupo estrutural G. Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial munido de uma representação de G e $E = P \times_G \mathbb{E}$ o fibrado vetorial associado, com projeção π e fibra típica $\mathbb{E}$.

Primeiro observamos que existe uma propriedade dos fibrados vetoriais e dos fibrados principais que os diferenciam dos fibrados gerais (ou até mesmo de fibrados com grupo estrutural) e permite traduzir a noção geral de conexão para uma outra formulação, muito útil: a estrutura especial do fibrado vertical.

Para fibrados principais P, $VP \cong P \times \mathfrak{g}$. Isto permite traduzir conexões dadas através de um subfibrado horizontal para formas de conexão.

Para fibrados vetoriais E, $VE \cong \pi^* E$. Isto permite traduzir conexões dadas através de um subfibrado horizontal para derivadas covariantes. Se s é uma seção de E definimos uma nova seção Ds de $T^*M \otimes E$ como sendo a composição

$$(Ds)(m) \;=\; V_{s(m)} \circ T_m s$$

onde $V_e : T_e E \to E_{\pi(e)}$ é a composição da projeção vertical $T_e E \to T_e E$ (que é 1 sobre $V_e E$ e 0 sobre $H_e E$) com o isomorfimo canônico $V_e E \cong E_{\pi(e)}$, para todo $e \in E$.

Problema: Identifique a condição sobre o fibrado horizontal $HE \subset TE$ que garante que D é linear.

Existe um isomorfismo canônico entre o espaço das seções de E e o espaço das funções f sobre P a valores em $\mathbb{E}$ que são G-equivariantes, ou seja, satisfazem

$$f(p \cdot g) \;=\; g^{-1} \cdot f(p) \quad \text{para todo} \quad p \in P,\, g \in G\,.$$

Este isomorfismo

$$C_E^\infty(P, \mathbb{E}) \cong \Gamma(E) \tag{2.150}$$

é dado por

$$s(m) \;=\; [p, f(p)]$$

para $p \in P$ tal que $\rho(p) = m$.

2.23 Definição Seja P um fibrado principal sobre M com projeção ρ e grupo estrutural G. Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial munido de uma representação de G e $E = P \times_G \mathbb{E}$ o fibrado vetorial associado, com projeção π e fibra típica $\mathbb{E}$. Uma r-forma $\omega \in \Omega^r(P, \mathbb{E})$ é dita

(i) *equivariante* se e somente se

$$\omega_{p \cdot g}(u_1 \cdot g, \ldots, u_r) \;=\; g^{-1} \cdot \omega_p(u_1, \ldots, u_r)$$

para todo $g \in G$, $p \in P$ e $u_1, \ldots, u_r \in T_p P$.

(ii) *horizontal* se e somente se

$$\omega_p(u_1, \ldots, u_r) \;=\; 0$$

para todo $p \in P$ e $u_1, \ldots, u_r \in T_p P$ se pelo menos um dos vetores u_i for vertical.

O conjunto das formas equivariantes horizontais é denotado por

$$\Omega_{EH}^r(P, \mathbb{E}) \;=\; \{\omega \in \Omega^r(P, \mathbb{E}) \mid \omega \text{ é } G\text{-equivariante e horizontal}\}\,.$$

2.8 Proposição *Existe um isomorfismo linear natural*

$$\Omega^r(M, E) \cong \Omega_{EH}^r(P, \mathbb{E})\,. \tag{2.151}$$

Em particular, o isomorfismo $\Omega^r(M) \cong \Omega_{EH}^r(P)$ é dado pelo "pull-back":

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(M) & \longrightarrow & \Omega_{EH}^r(P) \\ \omega & \mapsto & \rho^*\omega\,. \end{array}$$

Demonstração: De fato, o isomorfismo desejado consiste em associar à forma $\omega \in \Omega^r_{EH}(P, \mathbb{E})$ uma forma $\tilde{\omega} \in \Omega^r(M, E)$ pondo

$$\tilde{\omega}_{\rho(p)}(T_p\rho \cdot u_1, \ldots, T_p\rho \cdot u_r) \ = \ [p, \omega_p(u_1, \ldots, u_r)] \ .$$

Este $\tilde{\omega}$ é bem definido, pois se escolhemos $u_1, u_1' \in T_pP$ tais que $T_p\rho \cdot u_1' = T_p\rho \cdot u_1$, então $u_1' - u_1 \in V_pP$ e portanto

$$\omega_p(u_1', u_2, \ldots, u_r) \ = \ \omega(u_1, u_2, \ldots, u_r) \ .$$

Ademais, se escolhemos $p, p' \in P$ tais que $\rho(p) = m = \rho(p')$, então $p' = p \cdot g$ com um único $g \in G$ e para todo $u_1, \ldots, u_r \in T_pP$ e $u_1 \cdot g, \ldots, u_r \cdot g \in T_{p \cdot g}P$ satisfazendo

$$T_{p \cdot g}\rho \cdot (u_i \cdot g) \ = \ T_p\rho \cdot u_i \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, r$$

tem-se que

$$\begin{aligned} [p \cdot g, \omega_{p \cdot g}(u_1 \cdot g, \ldots, u_r \cdot g)] \ &= \ [p \cdot g, g^{-1} \cdot \omega_p(u_1, \ldots, u_r)] \\ &= \ [p, \omega_p(u_1, \ldots, u_r)] . \end{aligned}$$

A verificação de esta aplicação é um isomorfismo é simples e fica a cargo do leitor. □

Uma forma de conexão A para uma conexão principal em P é uma 1-forma A sobre P a valores em $\mathfrak{g}$ que é equivariante mas não é horizontal: $A \in \Omega^1_E(P, \mathfrak{g})$, mas $A_p(u_p) = u_p$ para todo vetor vertical $u_p \in V_pP \cong \mathfrak{g}$.

2.24 Definição Seja P um fibrado principal com projeção ρ e grupo estrutural G. Seja $\mathbb{E}$ um espaço de representação de G. Dada uma forma de conexão $A \in \Omega^1_E(P, \mathfrak{g})$, utilizando as identificações anteriores (2.150) e (2.151), definimos a *conexão linear associada* D no fibrado vetorial associado $E = P \times_G \mathbb{E}$ por

$$Df \ = \ \mathrm{d}f + A \cdot f$$

para todo $f \in C^\infty_E(P, \mathbb{E})$.

Esta definição requer verificar duas afirmações:

(a) Df é equivariante,

(b) Df é horizontal.

Começamos com a equivariância. Para $g \in G$, $p \in P$ e $u_p \in T_pP$ com $u_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t)\big|_{t=0}$, temos

$$\begin{aligned} (Df)_{p \cdot g}(u_p \cdot g) \ &= \ (df)_{p \cdot g}(u_p \cdot g) + A_{p \cdot g}(u_p \cdot g) \cdot f(p \cdot g) \\ &= \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p(t) \cdot g)\bigg|_{t=0} + (\mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot A_p(u_p)) \cdot (g^{-1} \cdot f(p)) \\ &= \ g^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p(t))\bigg|_{t=0} + g^{-1} \cdot (A_p(u_p) \cdot f(p)) \\ &= \ g^{-1} \cdot (Df)_p(u_p) \ . \end{aligned}$$

Agora verificamos a horizontalidade: Para $p \in P$, $X \in \mathfrak{g}$ e $u_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p \cdot \exp(tX)\big|_{t=0} \in V_pP$, temos

$$\begin{aligned}
(Df)_p \cdot u_p &= (df)_p \cdot u_p + A_p(u_p) \cdot f(p) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p \cdot \exp(tX)) \Big|_{t=0} + X \cdot f(p) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \big(\exp(-tX) \cdot f(p) \big) \Big|_{t=0} + X \cdot f(p) \\
&= -X \cdot f(p) + X \cdot f(p) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Uma outra forma de escrever o operador de derivada covariante é a seguinte. Dados

$$P_{V_p} : T_pP \longrightarrow T_pP \quad \text{e} \quad P_{H_p} : T_pP \longrightarrow T_pP\,,$$

com

$$P_{V_p}^2 = P_{V_p} \quad , \quad P_{H_p}^2 = P_{H_p} \quad \text{e} \quad P_{V_p} + P_{H_p} = \mathrm{id}_{TE}$$

tais que

$$\mathrm{im}(P_{V_p}) = V_pP \quad , \quad \ker(P_{V_p}) = H_pP$$

e

$$\mathrm{im}(P_{H_p}) = H_pP \quad , \quad \ker(P_{H_p}) = V_pP\,.$$

Então

$$(Df)_p u_p = (df)_p \cdot (H_p u_p)$$

2.25 Definição A *forma de curvatura* de uma conexão principal sobre um fibrado principal P, dada por um subfibrado horizontal HP (ou por uma das projeções P_V ou P_H) com forma de conexão $A \in \Omega^1_E(P, \mathfrak{g})$, é a 2-forma $F \in \Omega^2_{EH}(P, \mathfrak{g})$ definida por

$$F = \mathrm{d}A + \tfrac{1}{2}[A \wedge A]$$

Explicitamente, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$

$$F(X,Y) = \mathrm{d}A(X,Y) + \frac{1}{2}\big([A(X), A(Y)] - [A(Y), A(X)]\big)$$

Para justificar esta definição, precisamos verificar que F é equivariante e horizontal.

(i) F é equivariante: para $g \in G$ denotamos por R_g o difeomorfismo $R_g : P \to P$ definido por $R_g(p) = p \cdot g$. A equivariância de uma r-forma ω sobre P a valores em $\mathbb{E}$ significa que $R_g^* \omega = g^{-1} \cdot \omega$. Em particular, para formas a valores em $\mathfrak{g}$ significa que $R_g^* \omega = \mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot \omega$. Então $R_g^* A = \mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot A$ implica que

$$\begin{aligned}
R_g^* F &= R_g^*(\mathrm{d}A) + \frac{1}{2} R_g^*[A \wedge A] \\
&= \mathrm{d}(R_g^* A) + \frac{1}{2}[R_g^* A \wedge R_g^* A] \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot A) + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot A \wedge \mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot A] \\
&= \mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot (\mathrm{d}A \frac{1}{2}[A \wedge A]) \\
&= \mathrm{Ad}(g)^{-1} \cdot F\,.
\end{aligned}$$

(ii) F é horizontal: exercício.

Para conexões principais, temos a seguinte propriedade do subfibrado horizontal em relação ao subfibrado vertical, ou mais exatamente, em relação aos campos fundamentais X_P associados aos geradores $X \in \mathfrak{g}$ de G, definidos por

$$X_P(p) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p \cdot \exp(tX)\,\Big|_{t=0}.$$

2.1 Lema *Para todo campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(P)$ temos que $[Y, X_P]$ é horizontal para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Para $g \in G$ seja R_g o difeomorfismo de P dado por $R_g(p) = p \cdot g$; então

$$[X_P, Y] \;=\; L_{X_P} Y \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, R^*_{\exp(tX)} Y\,\Big|_{t=0}.$$

o que é horizontal pois R_g^* leva campos horizontais em campos horizontais. □

2.9 Proposição *Para quaisquer dois campos veotriais $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ vale*

$$F(X,Y) \;=\; \big(\mathrm{d}A + \tfrac{1}{2}[A \overset{\wedge}{,} A](X,Y) \;=\; \mathrm{d}A(HX, HY)\,.$$

Demonstração: Como todo campo vetorial sobre P pode ser decomposto em parte vertical e parte horizontal, basta calcular $F(Z_1, Z_2)$ nos seguintes três casos:

(a) Z_1, Z_2 verticais: como $\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \overset{\wedge}{,} A]$ é uma forma diferencial sobre P, é suficiente mostrar que esta se anula sobre Z_1 e Z_2 quando $Z_1 = X_P$ e $Z_2 = Y_P$ são campos fundamentais associados à $X, Y \in \mathfrak{g}$. Daí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}A + \tfrac{1}{2}[A \overset{\wedge}{,} A])(X_P, Y_P) &= X_P \cdot A(Y_P) - Y_P \cdot A(X_P) - A([X_P, Y_P]) + [A(X_P), A(Y_P)] \\
&= -A([X,Y]_P) + [X,Y] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

(b) Z_1 vertical e Z_2 horizontal: novamente é suficiente que $\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \overset{\wedge}{,} A]$ se anule quando $Z_1 = X_P$ com $X \in \mathfrak{g}$. Neste caso usamos que Z_2 e $[X_P, Z_2]$ são horizontais. Daí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}A + \tfrac{1}{2}[A \overset{\wedge}{,} A])(X_P, Z_2) &= X_P \cdot A(Z_2) - Z_2 \cdot A(X_P) - A([X_P, Z_2]) + [A(X_P), A(Z_2)] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

(c) Z_1, Z_2 horizontais: neste caso $HZ_1 = Z_1$ e $HZ_2 = Z_2$. Daí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}A + \tfrac{1}{2}[A \overset{\wedge}{,} A])(Z_1, Z_2) &= \mathrm{d}A(Z_1, Z_2) + [A(Z_1), A(Z_2)] \\
&= \mathrm{d}(HZ_1, HZ_2)\,.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. □

2.5.3 Derivada Exterior Covariante

De forma geral, podemos definir uma derivada exterior covariante d_A que leva formas diferenciais de grau r sobre P a valores em algum espaço $\mathbb{E}$ de representação de G para formas diferenciais horizontais de grau $r+1$ sobre P a valores em $\mathbb{E}$ pondo

$$(\mathrm{d}_A\omega)(X_0,\ldots,X_r) \;=\; \mathrm{d}\omega(HX_0,\ldots,HX_r)$$

para $\omega \in \Omega^r(P,\mathbb{E})$ e $X_0,\ldots,X_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Quando restringimos ω a ser horizontal também, e usamos os isomorfismos $\Omega^p_{EH}(P,\mathbb{E}) \cong \Omega^p(M,E)$, com $p=r$ e $p=r+1$ e $E = P\times_G \mathbb{E}$ introduzidos anteriormente, recuperamos a derivada exterior covariante induzida pela conexão linear associada D_A em $E = P\times_G\mathbb{E}$.

Sabendo que qualquer vetor tangente $u \in T_pP$ pode ser escrito

(i) na forma
$$u \;=\; X_P(p) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\cdot\exp(tX))\Big|_{t=0}$$
com $X \in \mathfrak{g}$ se u for vertical,

(ii) na forma $u = \hat{X}(p)$ com $X \in \mathfrak{X}(M)$, se u for horizontal.

A seguinte proposição sobre colchetes de Lie é útil.

2.10 Proposição *Seja P um fibrado principal sobre um variedade M. Identificando $\mathfrak{X}_V(P) = C^\infty(P,\mathfrak{g})$ temos que*

(i) $[X_P, Y_P] = [X,Y]_P$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$,

(ii) $[X_P, \hat{Y}] = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

(iii) $H[\hat{X},\hat{Y}] = \widehat{[X,Y]}$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

(iv) $V[\hat{X},\hat{Y}] = F(\hat{X},\hat{Y})$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração: Vamos mostrar o item (iv).

$$\begin{aligned} F(\hat{X},\hat{Y}) &= \mathrm{d}A(\hat{X},\hat{Y}) \\ &= L_{\hat{X}}A(\hat{Y}) - L_{\hat{Y}}A(\hat{X}) - A([\hat{X},\hat{Y}]) \\ &= -A(V[\hat{X},\hat{Y}])\,. \end{aligned}$$

Isto significa que, geometricamente, a curvatura é a obstrução à integrabilidade do fibrado horizontal ao qual ela é associada. □

Uma outra observação é a seguinte. Suponha primeiro que D seja alguma conexão linear no fibrado associado $E = P\times_G\mathbb{E}$ e que o grupo de estrutura de P seja $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathbb{E})$. Isto é o caso se $P = \mathrm{Fr}(E)$. Usando os isomorfismos $\Gamma(E) \cong C^\infty_E(P,\mathbb{E})$ e $\Omega^1(M,E) \cong \Omega^1_{EH}(P,\mathbb{E})$, podemos definir A como segue.

Dados um ponto $p \in P$, um vetor $u \in T_pP$ e um vetor $\omega \in \mathbb{E}$ escolhemos um campo vetorial X sobre M, um campo vetorial Z sobre P equivariante sob G e uma função equivariante f, tais que

$$X(m) \;=\; T_p\rho\cdot u \quad , \qquad Z(p) \;=\; u \qquad \text{e} \qquad f(p) \;=\; \omega\,.$$

Considerando D_X como operador em $C^\infty_E(P, \mathbb{E})$ ao invés de $\Gamma(E)$, pomos

$$A_p(u) \cdot \omega \ = \ (D_X f - Z \cdot f)(p)$$

Observamos que

(a) o lado direito não depende da escolha da função f que representa o vetor ω,

(b) o lado direito não depende da escolha dos campos Z e X que representam os vetores u e $T_p\rho \cdot u$.

Mostra-se que a forma $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{gl}(\mathbb{E}))$ assim definida é equivariante e normalizada.

2.3 Teorema (Identidade de Bianchi) $\mathrm{d}_A F = 0$.

2.6 Estruturas Espinoriais e Operadores Tipo Dirac

Nesta seção, discutiremos o conceito de estruturas espinoriais (estendidas) em variedades pseudo-riemannianas e a construção de operadores tipo Dirac.

Preliminarmente, precisamos resumir alguns fatos sobre os grupos pseudo-ortogonais e os grupos espinoriais. Seja $\mathbb{R}^{(p,q)}$ o espaço pseudo-euclideano $\mathbb{R}^n$, onde $n = p+q$, munido do produto interno padrão de assinatura (p,q), representado pela matriz simétrica e não-degenerada η introduzida na equação (1.203), e seja $\mathrm{O}(p,q)$ o grupo pseudo-ortogonal, definido na equação (1.224). Este é um grupo de Lie, mas ele não é conexo: tem duas componentes conexas se $p \neq 1$ e $q \neq 1$, mas tem quatro componentes conexas se $p = 1$ ou $q = 1$. O fato de que ele deve ter pelo menos duas componentes conexas segue usando a equação (1.224) para deduzir que para $A \in \mathrm{O}(p,q)$, vale $(\det A)^2 = 1$. Portanto, define-se

$$\mathrm{SO}(p,q) \;=\; \{\, A \in \mathrm{O}(p,q) \mid \det A = 1 \,\} \; . \tag{2.152}$$

No caso lorentziano ($p = 1$ ou $q = 1$), isso ainda não é suficiente, pois aí mesmo as transformações pseudo-ortogonais de determinante 1 ainda se dividem em duas classes, dependendo de se preservam ou revertem a orientação do cone de luz (i.e., o sinal da componente temporal de um vetor causal, já que o quadrado deste deve ser $\geqslant$ à soma dos quadrados de todas as suas componentes espaciais). Portanto, para $p \neq 1$ e $q \neq 1$, podemos por $\mathrm{SO}_0(p,q) = \mathrm{SO}(p,q)$, mas quando $p = 1$ ou $q = 1$, definimos

$$\mathrm{SO}_0(p,q) \;=\; \{\, A \in \mathrm{SO}(p,q) \mid A \text{ preserva orientação temporal} \,\} \; . \tag{2.153}$$

Assim, obtemos que $\mathrm{SO}_0(p,q)$ é a componente conexa de 1 do grupo pseudo-ortogonal. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(p,q)$ de todos eles é dada pela equação (1.225).

O próximo passo é construir o grupo de recobrimento universal de $\mathrm{SO}_0(p,q)$, que será denotado por $\mathrm{Spin}(p,q)$,[16] e cuja álgebra de Lie é denotada por $\mathfrak{spin}(p,q)$; é claro que ela é isomorfa à álgebra de Lie $\mathfrak{so}(p,q)$. Como $\mathrm{SO}_0(p,q)$ tem grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$, o recobrimento universal é duplo, i.e., temos um homomorfismo de recobrimento canônico

$$\Lambda : \mathrm{Spin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}_0(p,q) \tag{2.154}$$

com núcleo $\mathbb{Z}_2$, proporcionando a seguinte sequência exata de grupos de Lie:

$$\{1\} \;\longrightarrow\; \mathbb{Z}_2 \;\longrightarrow\; \mathrm{Spin}(p,q) \;\longrightarrow\; \mathrm{SO}_0(p,q) \;\longrightarrow\; \{1\} \; . \tag{2.155}$$

Os detalhes da construção explícita do grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$ e do homomorfismo Λ, que usa a álgebra de Clifford $\mathrm{Cliff}(p,q)$ de $\mathbb{R}^{(p,q)}$, não serão relevantes no presente contexto e portanto podem ser omitidos. Veja, por exemplo, [**?**, **?**, **?**].

Mais geralmente, podemos considerar um grupo de Lie G qualquer que contenha um subgrupo do tipo $\mathbb{Z}_2$ no seu centro, e definir

$$\mathrm{Spin}^G(p,q) \;=\; \mathrm{Spin}(p,q) \times_{\mathbb{Z}_2} G \; , \tag{2.156}$$

ou seja, $\mathrm{Spin}^G(p,q)$ é o quociente do produto direto $\mathrm{Spin}(p,q) \times G$ pelo subgrupo $\{(1,1),(-1,-1)\}$, onde -1 denota o elemento não-trivial do subgrupo central $\mathbb{Z}_2$, tanto em $\mathrm{Spin}(p,q)$ como em G; então obtemos um homomorfismo

$$\Lambda^G : \mathrm{Spin}^G(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}_0(p,q) \tag{2.157}$$

[16]Note que o grupo $\mathrm{SO}_0(p,q)$ sendo conexo, o grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$ é unicamente determinado a menos de isomorfismo, enquanto que o grupo $\mathrm{O}(p,q)$ tem vários grupos de recobrimento (genericamente denotados por $\mathrm{Pin}(p,q)$) que podem não ser isomorfos – um fenômento cujo análogo na teoria dos grupos finitos é bem conhecido sob a palavra chave “isoclinismo”.

com núcleo G, definido por $\Lambda^G[A,g] = \Lambda(A)$, proporcionando a seguinte sequência exata de grupos de Lie:

$$\{1\} \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Spin}^G(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}_0(p,q) \longrightarrow \{1\}\,. \tag{2.158}$$

Passando de grupos estruturais a fibrados principais, suponha agora que M é uma variedade pseudo-riemanniana n-dimensional com tensor métrico g de assinatura (p,q), onde $n = p+q$, e que M ainda seja orientada e, no caso lorentziano ($p = 1$ ou $q = 1$), também orientada no tempo. Como antes, denotamos por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ o fibrado dos referenciais lineares de M e por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{O}(p,q))$ o fibrado dos referenciais ortonormais de M (em relação a g), obtido do anterior por redução do grupo estrutural, de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ para $\mathrm{O}(p,q)$. Como a variedade M é orientada, podemos efetuar outra redução de grupo estrutural, de $\mathrm{O}(p,q)$ para $\mathrm{SO}(p,q)$, e assim definir o **fibrado dos referenciais ortonormais orientados de** M (em relação a g e à orientação dada de M), denotado por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}(p,q))$. E finalmente, no caso lorentziano ($p = 1$ ou $q = 1$), usamos a hipótese adicional de que M também seja orientada no tempo para efetuar mais uma redução de grupo estrutural, de $\mathrm{SO}(p,q)$ para $\mathrm{SO}_0(p,q)$, e assim definir o **fibrado dos referenciais ortonormais** (p,q)**-orientados de** M (em relação a g e às orientações dadas – totais e no tempo – de M), denotado por $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q))$. Explicitamente, lembrando que dado um ponto m de M, um referencial linear de M em m é um isomorfismo linear $u_m : \mathbb{R}^n \to T_mM$ enquanto que um referencial ortonormal de M em m é uma isometria $u_m : \mathbb{R}^n \to T_mM$ em relação aos produtos internos η em $\mathbb{R}^n$ e g_m em T_mM, temos que u_m é um referencial ortonormal orientado/(p,q)-orientado de M em m se preserva não apenas os produtos internos mas também as orientações/(p,q)-orientações, levando a(s) respectiva(s) estrutura(s) padrão de $\mathbb{R}^n$ na(s) correspondente(s) de T_mM.

2.26 Definição Com a notação anterior, uma **estrutura espinorial**, ou **estrutura** Spin, em M é uma extensão de grupo estrutural $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(p,q))$ de $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q))$, de $\mathrm{SO}_0(p,q)$ para $\mathrm{Spin}(p,q)$ (veja a Definição 2.17), providenciando uma $\mathrm{Spin}(p,q)$-estrutura sobre M (veja a Definição 2.19). Mais geralmente, dado um grupo de Lie G qualquer que contenha um subgrupo do tipo $\mathbb{Z}_2$ no seu centro, uma **estrutura espinorial estendida**, ou mais precisamente, **estrutura** Spin^G, em M é uma extensão de grupo estrutural $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}^G(p,q))$ de $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q))$, de $\mathrm{SO}_0(p,q)$ para $\mathrm{Spin}^G(p,q)$ (veja a Definição 2.17), providenciando uma $\mathrm{Spin}^G(p,q)$-estrutura sobre M (veja a Definição 2.19).

Em outros termos, podemos dizer que uma estrutura Spin define um recobrimento duplo

$$\Lambda_M : \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(p,q)) \longrightarrow \mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q)) \tag{2.159}$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(p,q)) \arrow[rr, "\Lambda_M"] \arrow[dr] & & \mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q)) \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{2.160}$$

comuta e que é equivariante em relação ao recobrimento duplo (2.154), ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(p,q)) \times \mathrm{Spin}(p,q) \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda_M \times \Lambda"'] & \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(p,q)) \arrow[d, "\Lambda_M"] \\ \mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q)) \times \mathrm{SO}_0(p,q) \arrow[r] & \mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q)) \end{tikzcd} \tag{2.161}$$

também comuta. De forma análoga, uma estrutura Spin^G por G define um homomorfismo

$$\Lambda_M^G : \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}^G(p,q)) \longrightarrow \mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(p,q)) \tag{2.162}$$

tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}^G(p,q)) \arrow[rr, "\Lambda_M^G"] \arrow[dr] & & \mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(p,q)) \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}
\tag{2.163}
$$

comuta e que é equivariante em relação ao homomorfismo (2.157), ou seja, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}^G(p,q)) \times \mathrm{Spin}^G(p,q) \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda_M^G \times \Lambda^G"'] & \mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}^G(p,q)) \arrow[d, "\Lambda_M^G"] \\
\mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(p,q)) \times \mathrm{SO}_0(p,q) \arrow[r] & \mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(p,q))
\end{tikzcd}
\tag{2.164}
$$

também comuta.

A questão da existência e o grau de unicidade de estruturas espinoriais e de estruturas espinoriais estendidas em variedades acaba sendo um problema puramente topológico, independente de qual métrica pseudo-riemanniana, qual orientação e, no caso lorentziano, qual orientação no tempo são empregadas: a única condição é que tais estruturas existam. Por exemplo, isso sempre requer que M seja orientável. No caso riemanniano, essa é a única condição que precisa ser imposta, enquanto que no caso lorentziano, M deve ter característica de Euler igual a zero se for compacta.[17] Então temos

2.4 Teorema *Seja M uma variedade n-dimensional orientável que admite métricas pseudo-riemannianas de assinatura (p,q) e, no caso lorentziano, não é compacta ou, se for compacta, tem característica de Euler igual a zero. Então para qualquer $\mathrm{SO}_0(p,q)$-estrutura sobre M, existe uma estrutura espinorial sobre M que a estende se e somente se a segunda classe de Stiefel-Whitney de M, denotada por $w_2(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, for igual a zero. Neste caso, as estruturas espinoriais inequivalentes sobre M que estendem uma determinada $\mathrm{SO}_0(p,q)$-estrutura sobre M são classificadas pelo grupo de cohomologia $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.*

Um teorema análogo vale para estruturas espinoriais estendidas, mas com condições mais brandas para a existência de tais estruturas e com outro grupo de cohomologia para a classificação; os detalhes dependem da escolha de G. O exemplo mais conhecido são as estruturas Spin^c, que correspondem a $G = U(1)$: neste caso, a condição de existência é que a segunda classe de Stiefel-Whitney de M precisa apenas ser a redução mod 2 de alguma classe de cohomologia que pertence a $H^2(M, \mathbb{Z})$, o que acaba valendo para qualquer variedade complexa: o exemplo clássico de uma variedade 4-dimensional que não admite estrutura Spin mas admite uma estrutura Spin^c é o espaço complexo projetivo $\mathbb{C}P^2$.

FALTA: A CONSTRUÇÃO DA CONEXÃO DE LEVI-CIVITA

Precisamos dela como conexão principal em $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}(p,q)$. Para construir uma conexão em $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}^G(p,q)$, precisamos também de uma conexão G-principal, ou seja, de um campo de calibre associado à simetria interna sob G.

O outro ingrediente essencial para a construção de operadores tipo Dirac, além de estruturas espinoriais, é a escolha de um espaço vetorial complexo $\mathbb{S}$ munido das seguintes estruturas:

[17] É um teorema conhecido da geometria lorentziana que uma variedade admite alguma métrica lorentziana, em relação à qual ela ainda é orientável no tempo, se e somente se ela satisfaz uma das duas seguintes condições: (a) ela não é compacta ou (b) ela é compacta e tem característica de Euler igual a zero. Isso segue do fato que essas são exatamente as condições sob as quais existe na variedade algum campo vetorial que não se anula em nenhum ponto.

- uma representação
$$\Sigma : \mathrm{Spin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{S}) \tag{2.165}$$
do grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$;
- uma aplicação linear
$$\gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{S}) \tag{2.166}$$
chamada de **aplicação símbolo** (por motivos a serem esclarecidos posteriormente), equivariante sob a ação do grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$, ou seja, tal que
$$\gamma(\Lambda(A)v) \;=\; \Sigma(A)\,\gamma(v)\,\Sigma(A)^{-1} \qquad \text{para } A \in \mathrm{Spin}(p,q),\, v \in \mathbb{R}^n\,; \tag{2.167}$$
- um produto interno sesquilinear[18] hermitiano
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} \times \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\phi,\psi) & \longmapsto & \bar{\phi}\,\psi \end{array} \tag{2.168}$$
não-degenerado mas não necessariamente positivo definido,[19] invariante sob a ação do grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$ (i.e., tal que a representação (2.165) é pseudo-unitária) e tal que a aplicação símbolo (2.166) é pseudo-hermitiana, i.e., vale
$$\overline{\Sigma(A)\phi}\,\Sigma(A)\psi \;=\; \bar{\phi}\,\psi \qquad \text{para } A \in \mathrm{Spin}(p,q),\, \phi,\psi \in \mathbb{S}\,, \tag{2.169}$$
e
$$\overline{\gamma(v)\phi}\;\psi \;=\; \bar{\phi}\,\gamma(v)\psi \qquad \text{para } v \in \mathbb{R}^n,\, \phi,\psi \in \mathbb{S}\,; \tag{2.170}$$
- uma involução antilinear
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ \psi & \longmapsto & \psi^c \end{array} \tag{2.171}$$
chamada de **conjugação de carga** (por motivos a serem esclarecidos posteriormente), equivariante sob a ação do grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$ (i.e., tal que a representação (2.165) é real), tal que a aplicação símbolo (2.166) também é real e ainda pseudo-antiunitária, i.e., vale
$$(\Sigma(A)\psi)^c \;=\; \Sigma(A)\psi^c \qquad \text{para } A \in \mathrm{Spin}(p,q),\, \psi \in \mathbb{S}\,, \tag{2.172}$$
$$(\gamma(v)\psi)^c \;=\; \gamma(v)\psi^c \qquad \text{para } v \in \mathbb{R}^n,\, \psi \in \mathbb{S}\,, \tag{2.173}$$
e ainda
$$\overline{\phi^c}\,\psi^c \;=\; \bar{\psi}\,\phi \qquad \text{para } \phi,\psi \in \mathbb{S}\,. \tag{2.174}$$

A escolha destas estruturas define o modelo concreto em que o operador tipo Dirac pertinente agirá. Para ver como, formamos primeiro o fibrado associado
$$SM \;=\; \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(p,q)) \times_{\mathrm{Spin}(p,q)} \mathbb{S}\,, \tag{2.175}$$
que é um fibrado vetorial complexo sobre M chamado o **fibrado de espinores-tensores**, enquanto $\mathbb{S}$ é chamado o **espaço de espinores-tensores**, do modelo em questão. Conforme o princípio de "estruturas herdadas" formulado no final da Seção 4.2 deste capítulo, as três estruturas adicionais sobre o espaço $\mathbb{S}$ listadas acima, devido à sua equivariância ou invariância, induzem estrutura análogas nas fibras do fibrado vetorial SM. Assim, obtemos

[18] Repetimos que na nossa convenção, formas sesquilineares são antilineares na primeira variável e lineares na segunda.

[19] Devido à condição de invariância (2.169) e em função do fato que o grupo $\mathrm{Spin}(p,q)$ é compacto apenas no caso riemanniano ($p=0$ ou $q=0$), concluímos que o produto escalar (2.168) também será positivo definido apenas no caso riemanniano.

- um homomorfismo estrito
$$\gamma : T^*M \longrightarrow \mathrm{L}(SM) \tag{2.176}$$
de fibrados vetoriais sobre M, chamado de **homomorfismo símbolo** (por motivos a serem esclarecidos ainda);
- um produto interno sesquilinear, hermitiano e não-degenerado nas fibras de SM que, para todo ponto m de M, continuamos a escrever na forma
$$\begin{array}{ccc} S_m M \times S_m M & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\phi, \psi) & \longmapsto & \bar{\phi}\,\psi \end{array} \tag{2.177}$$
tal que
$$\overline{\gamma(v)\phi}\,\psi \;=\; \bar{\phi}\,\gamma(v)\psi \qquad \text{para } v \in T_m^*M,\ \phi, \psi \in S_m M\ ; \tag{2.178}$$
- um automorfismo estrito involutivo
$$.^c : SM \longrightarrow SM \tag{2.179}$$
de SM como fibrado vetorial real sobre M, mas antilinear em relação à estrutura de SM como fibrado vetorial complexo sobre M, chamado de **conjugação de carga** (por motivos a serem esclarecidos ainda), tal que
$$(\gamma(v)\psi)^c \;=\; \gamma(v)\psi^c \qquad \text{para } v \in T_m^*M,\ \psi \in S_m M\ , \tag{2.180}$$
e ainda
$$\overline{\phi^c}\,\psi^c \;=\; \bar{\psi}\,\phi \qquad \text{para } \phi, \psi \in S_m M\ . \tag{2.181}$$

Para explicar a terminologia "espinores-tensores", note que o operador $\Sigma(-1)$ em $\mathbb{S}$ comuta com todos os operadores $\Sigma(A)$, $A \in \mathrm{Spin}(p,q)$, e sendo involutivo, deve ser igual a $+\mathrm{id}$ o a $-\mathrm{id}$ em cada subespaço irredutível de $\mathbb{S}$, segundo o lema de Schur. Dizemos que um subespaço irredutível de $\mathbb{S}$ é **tensorial** ou **bosônico** se $\Sigma(-1)$ é igual a $+\mathrm{id}$ nele e que é **espinorial** ou **fermiônico** se $\Sigma(-1)$ é igual a $-\mathrm{id}$ nele. Quando $\Sigma(-1) = +\mathrm{id}$, dizemos que SM é o **fibrado de tensores** e $\mathbb{S}$ é o **espaço de tensores** do modelo em questão, enquanto que quando $\Sigma(-1) = -\mathrm{id}$, dizemos que SM é o **fibrado de espinores** e $\mathbb{S}$ é o **espaço de espinores** do modelo em questão.

Para definir o operador tipo Dirac em SM, como operador diferencial
$$\not{D} : \Gamma(SM) \longrightarrow \Gamma(SM) \tag{2.182}$$
de primeira ordem

2.15 Exemplo (Campos de espinores de Dirac)

Para construir o operador de Dirac no sentido estrito, original, escolhemos $\mathbb{S}$ como sendo o **espaço de espinores de Dirac**, denotado aqui por $\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}}$ e caracterizado, a menos de um isomorfismo linear, como sendo espaço vetorial complexo $\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}}$ em que age a representação irredutível
$$\mathrm{Cliff}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}}) \tag{2.183}$$
da álgebra de Clifford $\mathrm{Cliff}(p,q)$ de $\mathbb{R}^{(p,q)}$, ou melhor, da sua complexificação $\mathrm{Cliff}(n,\mathbb{C})$ (que depende apenas da dimensão total $n = p+q$ e não da assinatura (p,q)); essa representação e única, a menos de um isomorfismo linear, e tem dimensão 2^r, onde r

em termos da teoria de representações da álgebra de Clifford $\mathrm{Cliff}(p,q)$ ou da sua parte par $\mathrm{Cliff}^0(p,q)$, ou melhor, das suas respectivas complexificações $\mathrm{Cliff}(n,\mathbb{C})$ e $\mathrm{Cliff}^0(n,\mathbb{C})$ (que dependem apenas da dimensão total $n = p+q$ e não da assinatura (p,q)).

- Para n par, $n = 2r$, a representação de $\mathrm{Cliff}(p,q)$ é irredutível e estabelece um isomorfismo de álgebras complexas associativas
$$\mathrm{Cliff}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}}) \tag{2.184}$$
com $\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}} \cong \mathbb{C}^N$ onde $N = 2^r$.

- Para n impar, $n = 2r+1$, a representação de $\mathrm{Cliff}^0(p,q)$ é irredutível e estabelece um isomorfismo de álgebras complexas associativas
$$\mathrm{Cliff}^0(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}}) \tag{2.185}$$
com $\mathbb{S}_{\mathrm{Dir}} \cong \mathbb{C}^N$ onde $N = 2^r$.

onde a ação de $\mathrm{Spin}(p,q)$ sobre $\mathbb{C}^N$ é induzida pela única ação irredutível da álgebra de Clifford $C\ell_{p,q}$ e portanto $N = 2^{[n/2]}$. As seções de SM são chamadas de *campos espinoriais*.

Podemos também definir o *fibrado de Clifford $C\ell_{p,q}(M)$* sobre M, onde
$$(C\ell_{p,q})_m M \;=\; C\ell_{p,q}(T_m M)\,.$$
A portanto existe uma ação natural
$$\begin{array}{ccc} C\ell_{p,q}(M) \times SM & \longrightarrow & SM \\ (u_m, \Psi_m) & \mapsto & u_m \cdot \Psi_m \end{array}$$

Como $T^*M \subset C\ell_{p,q}(M)$ temos também uma ação
$$\begin{array}{rccc} \gamma: & T^*M \times SM & \longrightarrow & SM \\ & (u_m, \Psi_m) & \mapsto & \gamma(u_m)\,\Psi_m \end{array}$$
onde $\gamma^\mu = \gamma(\mathrm{d}x^\mu)$.

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita associada à métrica g pode ser transfereida para SM. De fato, se Γ é a sua forma de conexão sobre $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(p,q))$, esta induz uma forma de conexão Γ sobre $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}(p,q))$ que, por sua vez proviencia uma conexão lineaer associada em SM também chamada de conexão de Levi-Civita.

O *operador de Dirac* é o operador diferencial $\not{D} : \Gamma(SM) \to \Gamma(SM)$ definido por
$$\not{D}\Psi \;=\; \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi\,.$$
Lembrando que $\Omega^1(M, SM) = \Gamma(T^*M \otimes SM)$, $\not{D}$ é invariantemente definido com a composição de aplicações
$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(SM) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(T^*M \otimes SM) & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(SM) \\ \Psi & \mapsto & \nabla\Psi & \mapsto & \gamma(\nabla\Psi) \end{array}$$

O quadrado do operador de Dirac se relaciona com o operador de Laplace-Beltrami Δ pela *fórmula de Weitzenböck*:
$$\not{D}^2\Psi \;=\; \Delta\Psi + \text{termos de curvatura.}$$

CAPÍTULO 3

Classes Características

Classes características de um fibrado são classes de cohomologia na sua variedade base.
Isso é meio vago, mas dar uma definição precisa é uma tarefa complicada, devido à grande diversidade entre as várias abordagens possíveis.
Essa diversidade começa pela questão: classes de cohomologia em que sentido? Pois existe uma multidão de teorias de cohomologia: cohomologia singular, cohomologia de Čech, ... Nó contexto do presente livro, em que trabalhamos quase que exclusivamente no âmbito diferenciável (categoria C^∞) e não no âmbito puramente topológico (categoria C^0), uma escolha natural é a cohomologia de de Rham, baseada em formas diferenciais. Mas alertamos desde já que existem classes características que não se enquadram neste contexto; as mais bem conhecidas entre elas são as classes de Stiefel-Whitney.
Com tal abordagem de topologia diferencial, ao invés de topologia algébrica, o método mais natural e ao mesmo tempo elegante de introduzir classes características de fibrados – mais exatamente, de fibrados com grupo estrutural, ou equivalentemente, de fibrados principais – é pelo homomorfismo de Chern-Weil. Essa construção é baseada na teoria de conexões em fibrados principais, como desenvolvida no capítulo anterior.

Isso requer dois passos preliminares, que nós trataremos nas primeiras três seções deste capítulo: (a) uma discussão de polinômios invariantes sob uma representação de um grupo de Lie G, e em particular, de polinômios invariantes sob a representação adjunta de um grupo de Lie, como funções sobre a sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, (b) uma breve apresentação de alguns conceitos fundamentais de álgebra homológica para explicar a terminologia universalmente adotada quando se fala em cohomologia (de qualquer tipo), e (c) uma discussão da cohomologia de álgebras de Lie, tanto como exemplo concreto dos conceitos introduzidos anteriormente como por causa da estreita relação entre este tipo específico de cohomologia, baseada em formas multilineares antissimétricas invariantes sobre $\mathfrak{g}$, e polinômios invariantes sobre $\mathfrak{g}$, que correspondem a formas multilineares simétricas invariantes sobre $\mathfrak{g}$. Estabelecer essa relação, conhecida como *transgressão*, é o passo decisivo para entender a construção do homomorfismo de Chern-Weil.

3.1 Polinômios Invariantes

Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial de dimensão finita com corpo base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A seguir, linearidade, multilinearidade e a construção de produtos ou potências tensoriais (inclusive as simétricas ou antissimétricas) será sempre em relação a este corpo base fixo.

Denotando por $\mathbb{E}^*$ o espaço dual de $\mathbb{E}$, como sempre, por $\bigvee^r \mathbb{E}$ sua r-ésima potência simétrica e por $\bigwedge^r \mathbb{E}$ sua r-ésima potência antissimétrica, ou exterior. Recordamos que $\mathbb{E}^*$ é o espaço das funções lineares sobre $\mathbb{E}$ e que $\bigvee^r \mathbb{E}^*$ pode ser identificado com o espaço dos polinômios homogêneos de grau r sobre $\mathbb{E}$, sendo que uma forma multilinear simétrica α de grau r sobre $\mathbb{E}$ proporciona um polinômio homogêneo P_α de grau r sobre $\mathbb{E}$ por restrição à diagonal,

$$P_\alpha(x) \;=\; \alpha(x,\ldots,x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{E}$$

e, reciprocamente, pode ser recuperada deste polinômio por um processo chamado de *polarização*,

$$\alpha(x_1,\ldots,x_r) \;=\; P_\alpha(x_{\sigma^{-1}(1)} + x_j???$$

A seguir, identificaremos α com P_α, isto é, mediante a escolha de uma base de $\mathbb{E}$ com base dual de $\mathbb{E}^*$, interpretamos uma r-forma totalmente simétrica sobre $\mathbb{E}$ como um polinômio "em n variáveis comutativas", onde $n = \dim \mathbb{E}$. Por analogia, uma r-forma totalmente antissimétrica sobre $\mathbb{E}$ é frequentemente interpretada como um polinômio "em n variáveis anticomutativas"; porém, essa interpretação é puramente formal, uma vez que no caso antissimétrico, a restrição à diagonal se anula identicamente.

Considere agora um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e suponha que $\mathbb{E}$ vem munido de uma representação $\pi : G \to GL(\mathbb{E})$ de G com representação induzida $\dot{\pi} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{E})$, definida por

$$\dot{\pi}(X) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\pi(\exp tX)\,\Big|_{t=0}\,.$$

Essas representações induzem representações correspondentes de G e de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{E}^*$ e sobre todas suas potências tensoriais (inclusive as simétricas ou antissimétricas), e assim a noção de uma r forma invariante – em particular, de um polinômio invariante – está bem definida. Explicitamente, uma r-forma α e um polinômio P são G-invariantes se

$$\alpha(\pi(g)(x_1),\ldots,\pi(g)(x_r)) \;=\; \alpha(x_1,\ldots,x_r) \qquad \text{para } g \in G,\, x_1,\ldots,x_r \in \mathbb{E}\,,$$

$$P(\pi(g)x) \;=\; P(x) \qquad \text{para } g \in G,\, x \in \mathbb{E}\,,$$

e são $\mathfrak{g}$-invariantes se

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha(x_1,\ldots,\dot{\pi}(X)(x_i),\ldots,x_r)) \;=\; 0 \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g},\, x_1,\ldots,x_r \in \mathbb{E}\,,$$

$$P'(x)\cdot\dot{\pi}(X)(x) \;=\; 0 \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g},\, x \in \mathbb{E}\,,$$

onde P' denota a derivada (o gradiente) de P. Obviamente, G-invariância implica $\mathfrak{g}$-invariância, e a afirmação recíproca também é verdadeira se G for conexo.

3.2 Elementos de Álgebra Homológica: Homologia e Cohomologia

3.3 Cohomologia de Álgebras de Lie, Transgressão

3.4 Homomorfismo de Chern-Weil

Capítulo 4

Construções Universais

Todo fibrado principal é pull-back de um fibrado universal, e toda conexão nele é pull-back de uma conexão universal. A base do fibrado universal se chama espaço classificatório. Desta forma, podemos reinterpretar classes características como sendo os pull-backs de classes de cohomologia do espaço classificatório.

4.1 Espaços Homogêneos e Fibrados Principais

Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Considere o espaço homogêneo G/H. Então G é o espaço total e G/H é a variedade base de um fibrado principal, com projeçao

$$G \longrightarrow G/H$$

e grupo estrutural H.

Denotando por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G e por $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de H, como subálgebra de $\mathfrak{g}$, consideramos a representação de H em $\mathfrak{g}$ obtida a partir da representação adjunta de G por restrição,

$$\mathrm{Ad}_G|_H : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

e a representação induzida de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$$

Obviamente, como subespaço de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ é invariante sob essas ações, e as restrições dessas representações a $\mathfrak{h}$ são, respectivamente, a representação adjunta Ad_H de H e a representação adjunta $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{h}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma subalgebra **redutiva** de $\mathfrak{g}$ se existe um subespaço $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ que é H-invariante e complementar a $\mathfrak{h}$, de modo que obtemos uma decomposição direta e H-invariante

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}\;.$$

Note que, obviamente, H-invariância implica $\mathfrak{h}$-invariância, e a afirmação recíproca também é verdadeira se H for conexo.

4.2 Fibrados Universais e Espaços Classificatórios

Invariância de classe de isomorfismo de um fibrado obtido por pull-back sob homotopia.

Índice

Bibliografia

[AM] Abraham, R. & Marsden, J., *Foundations of Mechanics*, 2nd edition. Benjamin-Cummings, Reading 1978.

[BLE] Bleecker, D., *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley, Reading 1981.

[BT] Bott, R. & Tu, L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1995.

[CP] Chari, Y. & Pressley, A., *Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[DIE] Dieudonné, J., *Treatise on Analysis I: Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York 1960.

[FLA] Flanders, H., *Differential Forms, with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York 1963.

[GS] Göckeler, M. & Schücker, T., *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[GHV1] Greub, W., Halperin, S. & Vanstone, R., *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 1, Academic Press, New York 1972.

[GHV2] Greub, W., Halperin, S. & Vanstone, R., *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 2, Academic Press, New York 1973.

[GHV3] Greub, W., Halperin, S. & Vanstone, R., *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 3, Academic Press, New York 1976.

[HIRS] Hirsch, M.W., *Differential Topology*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1997.

[HIRZ] Hirzebruch, F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3^{rd} edition, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1995.

[HUS] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

[KN1] Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience, New York 1963.

[KN2] Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 2, Interscience, New York 1969.

[L] Lang, S. *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1995.

[S] Steenrod, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton 1999.

[W] Warner, F. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1983.