Saldo Capitalizável e Saldo Não Capitalizável: Novos Algoritmos para o Regime de Juros Simples*

Frank Michael Forger †

Departamento de Matemática Aplicada,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66281,
BR–05315-970 São Paulo, S.P., Brasil

Resumo

Introduzimos uma nova metodologia para a administração do fluxo de caixa em contratos de crédito, baseada na subdivisão do saldo devedor em dois sub-saldos: um saldo capitalizável e um saldo não capitalizável, sendo que o saldo tradicional passa a ser a soma dos dois, também chamada de saldo total. Os juros devidos na data de vencimento de cada parcela incidem sobre o saldo capitalizável da data de vencimento da parcela imediatamente anterior mas são incluídos no saldo não capitalizável, sobre o qual não incide juro nenhum. Finalmente, os dois sub-saldos são unificados no momento do encerramento ou da quitação do contrato. Mostramos que combinando este método com uma nova ferramenta chamada de *fator de ponderação*, podemos adaptar qualquer sistema de amortização originalmente desenvolvido para o regime de juros compostos (capitalização exponencial) ao regime de juros simples (capitalização linear), adequando-o assim à proibição da capitalização dos juros, que já se encontra bem amparada na legislação e jurisprudência brasileira mas é amplamente desrespeitada na prática. Demonstramos essa adaptação no caso de sistemas de prestação fixa (SPCs), mostrando que converte a tabela Price (SPC a juros compostos) para o método de Gauss (SPC a juros simples), e no caso de sistemas de amortização fixa (SACs).

Universidade de São Paulo
RT-MAP-0905
Outubro de 2009

*Trabalho registrado junto à Fundação Biblioteca Nacional sob no. 485.462.
†E-mail: forger@ime.usp.br

1 Introdução

Para o público geral, a matemática financeira é um grande mistério. O consumidor leigo que chega no banco porque precisa fazer um empréstimo não entende como é feito o cálculo das prestações e não tem nenhuma ideia quantitativa do custo real do seu crédito – apenas um sentimento vago de que, no Brasil, este custo é muito alto e pode facilmente chegar ao extremo de se transformar em um compromisso impagável, infernizando a sua vida.

Além das taxas de juros praticadas no Brasil que (ainda) são muito altas, apesar das recentes reduções, um dos motivos principais do problema é de natureza estrutural. Trata-se da aplicação generalizada, quase religiosa, do regime de juros compostos. Outros termos utilizados para caracterizar este regime – todos efetivamente sinônimos – são "juros sobre juros", "capitalização dos juros", "capitalização composta", "capitalização exponencial" e "anatocismo".[1]

Como é ensinado logo no início da primeira disciplina sobre matemática financeira em qualquer curso de graduação de economia ou de contabilidade no Brasil e como pode ser facilmente verificado em qualquer um dos livros sobre a área (veja, por exemplo, [1]), existem basicamente dois regimes: o de juros simples e o de juros compostos. Do ponto de vista de um investidor que se compromete a investir um determinado capital C durante um determinado tempo, este expresso como múltiplo inteiro nT de um certo período básico ou período de referência T,[2] e a uma taxa de juros pré-fixada i por período, eles podem ser caracterizados da seguinte forma.

- **Juros Simples (Capitalização Simples ou Linear)**:
  Em cada período T, o investidor recebe juros sobre o capital investido originalmente. Portanto, em cada período, recebe o valor $i\,C$, de modo que após k períodos, o seu saldo passa a ser
  $$S_k \;=\; (1+ik)\,C \;. \tag{1}$$
  Podemos chamar esta equação de *lei de capitalização (evolução do saldo credor) no regime de juros simples*. Observa-se que ela determina S_k como função *linear* (melhor seria dizer: função afim) da variável k, a qual representa o tempo (convenientemente discretizado em múltiplos inteiros do período de referência), o que explica o termo "capitalização linear".

[1]Notamos que, de modo geral, o conceito de capitalização de um valor significa sua inclusão em algum capital sobre o qual, futuramente, incidirão juros. Interpretado assim, o termo "capitalização" pode ser aplicado a qualquer tipo de valor em finanças, não apenas a juros.

[2]Qual é esse período básico ou período de referência depende do tipo de contrato: pode ser um dia, como no uso do cheque especial para déficit em conta corrente, ou um mês, como nos contratos de crédito ao consumidor, ou um ano, como na matemática atuária. Para o desenvolvimento deste trabalho, o seu valor será irrelevante.

- **Juros Compostos (Capitalização Composta ou Exponencial)**:
  Em cada período T, o investidor recebe juros sobre o capital investido originalmente e ainda sobre todos os juros acumulados nos períodos anteriores. Portanto, depois do primeiro período, recebe o valor $i\,C$ e o capitaliza, de modo que seu capital passa a ser $C + i\,C = (1+i)\,C$, depois do segundo período, recebe o valor $i(1+i)\,C$ e o capitaliza, de modo que seu capital passa a ser $(1+i)\,C + i(1+i)\,C = (1+i)^2 C$, e assim em diante. Desta forma, após k períodos, o seu saldo passa a ser

$$S_k \;=\; (1+i)^k\,C \;. \tag{2}$$

  Podemos chamar esta equação de *lei de capitalização (evolução do saldo credor) no regime de juros compostos*. Observa-se que ela determina S_k como função *exponencial* da variável k, a qual representa o tempo (convenientemente discretizado em múltiplos inteiros do período de referência), o que explica o termo "capitalização exponencial".

As mesmas fórmulas, com k substituído por n, valem para o capital C_n acumulado quando se chega ao final do contrato, após n períodos.

Uma medida de quanto se ganha com um determinado investimento, em cada um dos dois regimes, é dada por seu **lucro**, definido como a diferença entre o valor futuro (final) e o valor presente (inicial) do capital investido, dividido por este mesmo, e normalmente expresso na forma de uma porcentagem:

$$\text{Lucro} \;=\; \frac{C_n - C}{C} \;=\; \frac{C_n}{C} \,-\, 1 \;. \tag{3}$$

Como C_n é proporcional a C, o lucro do investimento não depende do capital investido, mas apenas da taxa de juros i e do prazo total nT. Explicitamente, devido às equações (1) e (2), temos

$$\text{Lucro} \;=\; in \qquad \text{para capitalização simples} \;. \tag{4}$$

$$\text{Lucro} \;=\; (1+i)^n - 1 \qquad \text{para capitalização composta} \;. \tag{5}$$

Para identificar as características principais de cada um dos dois regimes, começamos por mencionar alguns pontos que eles têm em comum:

- Primeiro, para todo n, o valor C_n do capital acumulado após n períodos é proporcional ao valor C do capital originalmente investido, como deve ser. Assim, o que importa na comparação dos dois regimes é apenas o fator que multiplica C.

- Segundo, *para pequenos valores de* n, ou seja, *a curto prazo*, a diferença entre os dois regimes não é muito grande; pode chegar a ser quase imperceptível. Em particular, os dois valores de C_1 são rigorosamente iguais!

Por outro lado:

- O valor de C_n no regime de juros compostos é sempre maior que o valor de C_n no regime de juros simples.

- E é *para grandes valores de n*, ou seja, *a longo prazo*, que a diferença entre os dois regimes se torna enorme, até exorbitante!

Para comprovar este fato, não há testemunha melhor que o honorável Reverendo Richard Price que, além de afirmar no cabeçalho de uma das suas próprias tabelas que estas são baseadas em "compound interest" (juros compostos),[3] dá o seguinte exemplo:

> One penny put out at our Saviours's birth to five per cent, compound interest, would, in the present year 1781, have increased to a greater sum than would be contained in TWO HUNDRED MILLION of earths, all solid gold. . . .
>
> (Um centavo de libra emprestado na data de nascimento de nosso Salvador a cinco porcento, juro composto, teria aumentado, no presente ano de 1781, para um valor maior do que o contido em DUAS CENTENAS DE MILHÕES de terras, todas de ouro maciço. . . .)
>
> . . . But, if put out to simple interest, it would, in the same time, have amounted to no more than SEVEN SHILLINGS AND SIX PENCE.
>
> (. . . Porém, se emprestado a juro simples, teria resultado, no mesmo tempo, num montante nada maior do que SETE XELINS E SEIS CENTAVOS.)

E hoje, no ano de 2009, aonde teríamos chegado? Teria banco para pagar essa conta?

Obviamente, o que Richard Price quis demonstrar é o seguinte: *Este regime de juros compostos quebra qualquer um; é só uma questão de tempo!* Outro indicador da consciência de Richard Price perante a problemática, consciência essa que infelizmente não é compartilhada pela grande maioria dos agentes financeiros que hoje aplicam a sua metodologia, é o fato de que, provavelmente no intuito de não dar subsídio a abusos excessivos, ele decidiu limitar as suas tabelas a valores de n até 100 e de i até 5%. E ainda vale observar que o passo de tempo nas tabelas de Price é de um ano, não de um mês (e muito menos de um dia), e que estas tabelas foram desenvolvidas como ferramenta para a matemática atuária (cálculos para seguros de vida e aposentadoria).

Podemos apreciar como se forma uma diferença tão dramática entre os dois regimes considerando um exemplo numérico e fazendo um gráfico do lucro em função de n, com i fixo.

[3] Neste trabalho, não pretendo entrar na polêmica sobre a capitalização dos juros na tabela Price e nos outros sistemas de amortização de crédito utilizados no Brasil. Para uma discussão lúcida dessas questões que a meu ver encerra o assunto, veja [3] e [4].

Exemplo 1 Considere o crescimento de um capital C de 10.000 R$ remunerado a uma taxa mensal de juros de $i = 5\% = 0,05$ durante n mêses, com juros simples (JS) e juros compostos (JC), para valores de n que correspondem a 1 ano, 5 anos e 25 anos:

n	C_n (JS)	Lucro (JS)	C_n (JC)	Lucro (JC)
12	$16.000,00$	60%	$17.958,56$	80%
60	$40.000,00$	300%	$186.791,86$	1.768%
300	$150.000,00$	1.500%	$22.739.961.290,00$	227.399.513%

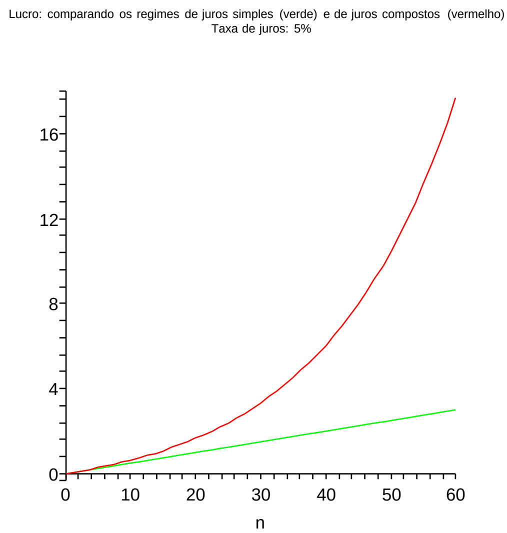

Figura 1: Crescimento do lucro: comparando os regimes de juros simples (crescimento linear, verde) e de juros compostos (crescimento exponencial, vermelho), com valores numéricos como no Exemplo 1.

Assim, identificamos *o vício principal do regime de juros compostos: o crescimento explosivo do lucro*, além de qualquer limite da razão.

Passamos agora ao tema central do presente trabalho – a questão de um algoritmo iterativo que reproduza a evolução do saldo credor descrito acima, primeiro no caso de se tratar de um investimento. Queremos mostrar que tanto a equação (1) como a equação (2) resultam de um algoritmo iterativo que determina, passo a passo, o valor J_k dos juros e o saldo S_k obtido após sua incorporação, no instante k, a partir do saldo S_{k-1} no instante $k-1$. No caso da capitalização composta, este algoritmo é extremamente simples:

$$S_k \;=\; S_{k-1} + J_k \quad , \quad J_k \;=\; i\, S_{k-1} \;, \tag{6}$$

ou equivalentemente

$$S_k \;=\; (1+i)\, S_{k-1} \;. \tag{7}$$

Explicitamente, aplicando este algoritmo com os valores numéricos como no Exemplo 1 acima, obtemos a planilha exibida na Figura 2, na qual as flechas indicam o fluxo dos juros: como são calculados e onde são incluídos.

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDO CREDOR
(EXEMPLO)
CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA (EXPONENCIAL)

VALOR INVESTIDO	R$ 10.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%

A	B	C
NO	SALDO	JUROS
0	R$ 10.000,00	
1	R$ 10.500,00	R$ 500,00
2	R$ 11.025,00	R$ 525,00
3	R$ 11.576,25	R$ 551,25
4	R$ 12.155,06	R$ 578,81
5	R$ 12.762,82	R$ 607,75
6	R$ 13.400,96	R$ 638,14
7	R$ 14.071,00	R$ 670,05
8	R$ 14.774,55	R$ 703,55
9	R$ 15.513,28	R$ 738,73
10	R$ 16.288,95	R$ 775,66
11	R$ 17.103,39	R$ 814,45
12	R$ 17.958,56	R$ 855,17

Figura 2: Evolução do saldo credor no regime de juros compostos, com valores numéricos como no Exemplo 1 ($n = 12$)

De modo geral, prova-se por indução matemática em k que este algoritmo possui como única solução a equação (2). Ademais, ele pode facilmente ser generalizado para descrever a evolução do saldo na presença de depósitos e/ou saques. Contudo, no caso da capitalização simples, parece não existir uma regra tão simples – pelo menos ela não consta da literatura padrão.

Tendo chegado até este ponto, podemos explicar a meta deste trabalho: mostraremos que existe sim um algoritmo simples também para este caso. E além de ser eficiente e de fácil implantação, ele reflete fielmente o princípio de que *no regime de juros simples, não ocorre a capitalização dos juros.* Todavia, sua formulação requer uma mudança de paradigma financeiro:

O procedimento adequado para trabalhar em regime de capitalização simples, ou juros simples, é dividir o saldo – no presente caso, o saldo credor do investidor – em dois subsaldos: um saldo capitalizável, que denotaremos por S^C, e um saldo não capitalizável, que denotaremos por S^N, sendo que o saldo tradicional é simplesmente a soma dos dois:

$$S_k \;=\; S_k^C + S_k^N \;. \tag{8}$$

Então os juros incidem apenas sobre o saldo capitalizável, mas são incluídos apenas no saldo não capitalizável:

$$S_k^C \;=\; S_{k-1}^C \quad , \quad S_k^N \;=\; S_{k-1}^N + J_k \quad , \quad J_k \;=\; i\, S_{k-1}^C \;. \tag{9}$$

Explicitamente, aplicando este algoritmo com os valores numéricos como no Exemplo 1 acima, obtemos a planilha exibida na Figura 3, na qual as flechas indicam o fluxo dos juros: como são calculados e onde são incluídos.

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDOS CREDORES (EXEMPLO)
CAPITALIZAÇÃO SIMPLES (LINEAR)

VALOR INVESTIDO	R$ 10.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%

A	B	C	D	E
NO	SALDO CAPITALIZÁVEL	JUROS	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL
0	R$ 10.000,00		R$ -	R$ 10.000,00
1	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 500,00	R$ 10.500,00
2	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 1.000,00	R$ 11.000,00
3	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 1.500,00	R$ 11.500,00
4	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 2.000,00	R$ 12.000,00
5	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 2.500,00	R$ 12.500,00
6	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 3.000,00	R$ 13.000,00
7	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 3.500,00	R$ 13.500,00
8	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 4.000,00	R$ 14.000,00
9	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 4.500,00	R$ 14.500,00
10	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 5.000,00	R$ 15.000,00
11	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 5.500,00	R$ 15.500,00
12	R$ 10.000,00	R$ 500,00	R$ 6.000,00	R$ 16.000,00

Figura 3: Evolução do saldo credor no regime de juros simples, com valores numéricos como no Exemplo 1 ($n = 12$)

Obviamente, neste caso, o sub-saldo capitalizável permanece constante, $S_k^C = C$, enquanto que o sub-saldo não capitalizável cresce linearmente com k, $S_k^N = ikC$, de modo que este algoritmo possui como única solução a equação (1). Novamente, ele pode facilmente ser generalizado para descrever a evolução do saldo na presença de depósitos e/ou saques (neste caso, o sub-saldo capitalizável deixa de ser constante).

A seguir, mostraremos como implementar o mesmo princípio na construção de sistemas de amortização de crédito.

2 Sistemas de amortização de crédito

Nesta seção, abordamos a questão de como (a) calcular as prestações e (b) demonstrar a evolução do financiamento para os sistemas de amortização de crédito mais utilizados no Brasil, que podem ser classificados como

- sistemas de prestação constante (SPCs);
- sistemas de amortização constante (SACs);
- sistemas de amortização mista (SAMs) ou crescente (SACREs).

Na literatura de matemática financeira, este assunto é desenvolvido quase que exclusivamente com base na capitalização composta (veja, a título de exemplo, a última frase do Capítulo 4.2 em [1, p. 67]), mas enfatizamos que cada um destes sistemas – assim como qualquer outro que porventura ainda venha a ser proposto – vem em duas versões: uma baseada em juros compostos e outra baseada em juros simples. Em particular, os dois possíveis sistemas de prestação constante são mais amplamente conhecidos sob outros nomes:

- Sistema de Prestação Constante a Juros Compostos (SPC-JC) $\equiv$ Tabela Price.
- Sistema de Prestação Constante a Juros Simples (SPC-JS) $\equiv$ Método de Gauss.

Correspondentemente, temos o SAC-JC e o SAC-JS, assim como o SAM-JC ou SACRE-JC e o SAM-JS ou SACRE-JS, sendo que muito pouco se sabe sobre o SAC-JS e praticamente nada sobre o SAM-JS ou SACRE-JS.

O primeiro passo no desenvolvimento de qualquer sistema de amortização consiste em calcular o valor das prestações em função dos dados básicos do contrato, que são

- o **capital inicial** ou **valor** do financiamento C;
- o **prazo** total do financiamento, representado pelo número total n de parcelas;
- a **taxa de juros** i por período;
- a **prestação ideal** P_0, que seria a prestação a ser paga num mundo ideal sem juros, como referência; obviamente,
$$P_0 = C/n \; . \tag{10}$$

No mundo real, com juros, a base para calcular o valor das prestações, em qualquer sistema de amortização e qualquer regime de juros, é o preceito do **equilíbrio das contas no final do contrato**: ele estipula que o capital inicial C, devidamente capitalizado, deve ser igual à soma de todas as prestações, cada uma também devidamente capitalizada. Como C capitaliza durante n períodos enquanto que a primeira prestação P_1 capitaliza durante $n-1$ períodos, a segunda prestação P_2 capitaliza durante $n-2$ períodos, e assim em diante, até a penúltima prestação P_{n-1}, que capitaliza durante apenas 1 período, e a última prestação P_n, que não capitaliza, essa condição assume a seguinte forma:

- No regime de juros compostos,
$$C\,(1+i)^n \;=\; \sum_{k=1}^{n} P_k\,(1+i)^{n-k} \; . \tag{11}$$
- No regime de juros simples,
$$C\,\big(1+in\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} P_k\,\big(1+i(n-k)\big) \; . \tag{12}$$

No caso dos sistemas de prestação constante, onde P_k não depende de k e portanto pode simplesmente ser denotado por P, podemos executar estas somatórias usando a *fórmula binomial*
$$\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} \;\equiv\; x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \;=\; \frac{x^n-1}{x-1} \; , \tag{13}$$

(válida para $x \neq 1$ e facilmente provada multiplicando os dois lados por $x - 1$), com $x = 1 + i$, no primeiro caso, e a *fórmula de Gauss* para a soma de todos os números inteiros de 1 até $n - 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k) \;\equiv\; (n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 \;=\; \frac{n(n-1)}{2}\;, \tag{14}$$

no segundo caso, para chegar às seguintes bem conhecidas fórmulas para a prestação P:

- No SPC a juros compostos (tabela Price):

$$P \;=\; C\,i\,\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\;. \tag{15}$$

- No SPC a juros simples (método de Gauss):

$$P \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{1+in}{1+i(n-1)/2}\;. \tag{16}$$

O mesmo princípio pode ser usado para deduzir fórmulas explícitas para as prestações em outros sistemas de amortização, como será demonstrado mais adiante no caso dos SACs.

Uma medida de quanto se gasta com um determinado financiamento, em cada um dos dois regimes, é dada por seu **custo**, definido como a média das diferenças entre o valor de cada prestação e a prestação ideal, divididas por esta mesmo, e normalmente expresso na forma de uma porcentagem:

$$\text{Custo} \;=\; \frac{\bar{P}-P_0}{P_0} \;=\; \frac{\bar{P}}{P_0}-1 \qquad \text{onde} \qquad \bar{P} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P_k\;. \tag{17}$$

No caso dos sistemas de prestação constante, $\bar{P}$ é igual a P, e como P é proporcional a C, o custo do financiamento não depende do capital investido, mas apenas da taxa de juros i e do prazo total nT. Explicitamente, devido às equações (15) e (16), temos que

- No SPC a juros compostos (tabela Price):

$$\text{Custo} \;=\; \frac{(in-1)(1+i)^n-1}{(1+i)^n-1}\;. \tag{18}$$

- No SPC a juros simples (método de Gauss):

$$\text{Custo} \;=\; \frac{i(n+1)/2}{1+i(n-1)/2}\;. \tag{19}$$

As fórmulas correspondentes para os SACs serão deduzidas mais adiante.

Para identificar as características principais de cada um dos dois regimes, continuamos considerando o caso dos sistemas de prestação constante (sendo que as conclusões para outros sistemas de amortização são essencialmente as mesmas), começando por mencionar alguns pontos que eles têm em comum:

- Primeiro, o valor P da prestação é proporcional ao valor C do financiamento, como deve ser. Assim, o que importa na comparação dos dois regimes é apenas o fator que multiplica C.

- Segundo, *para pequenos valores de* n, ou seja, *a curto prazo*, a diferença entre os dois regimes não é muito grande; pode chegar a ser quase imperceptível. Em particular, os dois valores de P para $n = 1$ (pagamento em parcela única) são rigorosamente iguais!

- Terceiro, quando $i = 0$, os dois valores de P são iguais à prestação ideal P_0 (no caso da fórmula (15), isso se prova considerando o limite $i \to 0$ e aplicando a regra de L'Hôpital).

Por outro lado:

- O valor de P no regime de juros compostos é sempre maior que o valor de P no regime de juros simples.

- E é *para grandes valores de* n, ou seja, *a longo prazo*, que a diferença entre os dois regimes se torna enorme, até exorbitante!

Para comprovar este fato, não podemos citar Richard Price, mas podemos apreciar como se forma, mais uma vez, uma diferença dramática entre os dois regimes considerando um exemplo numérico e fazendo um gráfico do custo em função de n, com i fixo.

Exemplo 2 Considere o financiamento de um capital C emprestado a uma taxa mensal de juros de $i = 5\% = 0,05$ durante n mêses, com prestação ideal $P_0 = C/n$ de 1.000 R$, com juros simples (JS) e juros compostos (JC), para valores de n que correspondem a 1 ano, 5 anos e 25 anos:

n	C	P (JS)	Custo (JS)	P (JC)	Custo (JC)
12	12.000	1.254, 90	25%	1.353, 90	35%
60	60.000	1.616, 16	62%	3.169, 69	217%
300	300.000	1.887, 91	89%	15.000, 01	1.400%

Assim, identificamos *o vício principal do regime de juros compostos: o crescimento explosivo do custo*, além de qualquer limite da razão.

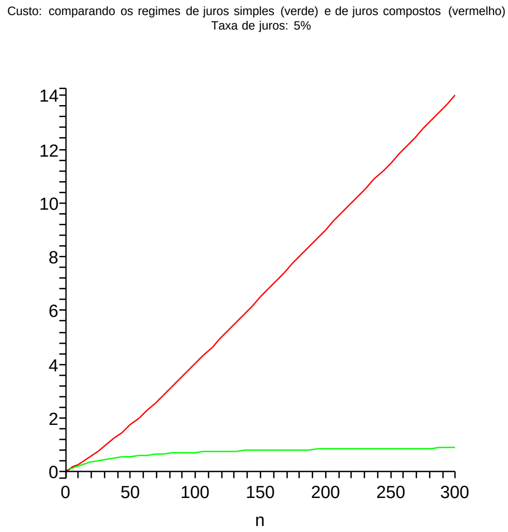

Figura 4: Crescimento do custo: comparando os regimes de juros simples (verde) e de juros compostos (vermelho), com valores numéricos como no Exemplo 2.

Observamos, ainda, que no método de Gauss, há uma *limitação do custo*, pois a prestação nunca pode ultrapassar o dobro da prestação ideal, ou seja, o custo não pode ultrapassar os 100%, para qualquer valor de i e n. (Na prática, mesmo em contratos de longa duração, o custo não ultrapassa os 60%; por exemplo, para $i = 1\%$ e $n = 240$, ele é de 55%). Também observamos que aumentando o prazo n, é possível diminuir o valor da prestação de tal modo que ela fique abaixo de qualquer valor desejado. *Este tipo de dívida é sempre pagável.* Por outro lado, na tabela Price, existe a noção de uma **prestação crítica** P_{crit}, que também chamamos de **prestação da dívida eterna** pois se a prestação efetivamente paga for igual ou inferior a este valor, a dívida nunca poderá ser paga: torna-se eterna. (Mais exatamente, se a prestação efetivamente paga for igual à prestação crítica, a dívida se mantém constante, pois a amortização é reduzida a zero e só se pagam os juros, enquanto que se a prestação efetivamente paga for inferior à prestação crítica, a dívida ainda cresce, e de forma exponencial: temos uma explosão da dívida.) O valor desta prestação crítica, pela tabela Price, é

$$P_{\text{crit}} \; = \; C\,i \; . \tag{20}$$

Note que ela independe de n, i.e., não adianta aumentar o prazo do financiamento, que nem assim ela abaixa. *Este tipo de dívida pode facilmente se tornar impagável.*

Passamos agora a discutir o segundo passo no desenvolvimento de qualquer sistema de amortização, que consiste na definição do algoritmo que permite construir demonstrativos de evolução do financiamento ao longo do tempo. Ocorre que, atualmente, existe um único tal algoritmo que é universalmente aceito e utilizado no mercado financeiro, mas que infelizmente, como veremos, implica em capitalização dos juros! Não parece haver nada análogo que seja condizente com o regime de capitalização simples.

Como veremos, a metodologia a ser desenvolvida neste trabalho nos permitirá preencher esta lacuna, de maneira natural, lógica e coerente.

Para evitar repetições desnecessárias e até cansativas, consideraremos a seguir a situação geral de um empréstimo cuja devolução ocorre através de uma série de pagamentos com periodicidade constante (esta representada por um período básico ou período de referência T que pode ser um dia, um mês ou um ano, por exemplo, como antes), porém não necessariamente a valores constantes, e a termos vencidos, ou postecipados.[4] Nossa meta principal será não apenas calcular o valor das prestações mas também estabelecer princípios gerais para elaborar planilhas de evolução do financiamento. Como veremos, o tratamento adequado desta evolução no regime de capitalização simples requer, desde o início, a subdivisão do saldo devedor, assim como da amortização e das prestações, em uma "parte C" e uma "parte N". Assim, como antes, denotaremos

- por C o **capital inicial** ou **valor** do financiamento, emprestado no instante t_0;
- por n o número total de parcelas que representa o **prazo** total nT do financiamento;
- por i a **taxa de juros** por período T convencionada;
- por P_0 a **prestação ideal**, $P_0 = C/n$;

e ainda,

- por J_k o valor dos **juros** vencidos no instante $t_0 + kT$ $(k = 1, \ldots, n)$;
- por S_k o **saldo devedor** no instante $t_0 + kT$ $(k = 1, \ldots, n)$, após pagamento da prestação P_k, geralmente dividido em duas partes: o **saldo devedor capitalizável** S_k^C e o **saldo devedor não capitalizável** S_k^N,
$$S_k \;=\; S_k^C + S_k^N \;; \tag{21}$$
- por A_k a **amortização** do saldo devedor efetuada no instante $t_0 + kT$ $(k = 1, \ldots, n)$, geralmente dividida em duas partes: a **amortização do saldo capitalizável** ou **amortização do capital** A_k^C e a **amortização do saldo não capitalizável** ou **amortização dos juros** A_k^N,
$$A_k \;=\; A_k^C + A_k^N \;; \tag{22}$$
- e, finalmente, por P_k o valor da k-ésima **prestação** ou **parcela**, que vence no instante $t_0 + kT$ $(k = 1, \ldots, n)$, geralmente dividida em duas partes: a **parte da prestação destinada à amortização do saldo devedor capitalizável**, P_k^C, e a **parte da prestação destinada à amortização do saldo devedor não capitalizável**, P_k^N,
$$P_k \;=\; P_k^C + P_k^N \;; \tag{23}$$

[4] Toda a análise a seguir se aplica também a séries de pagamentos a termos antecipados: basta substituir, para qualquer sistema de amortização, o prazo n por $n-1$ e diminuir o capital inicial C, subtraindo a primeira parcela que, neste caso, vence juntamente com a liberação do crédito.

onde notamos que os valores concretos de t_0 e de T são irrelevantes. Pela definição da palavra "amortização", temos

$$A_k \;=\; S_{k-1} - S_k \;. \tag{24}$$

De modo semelhante,

$$A_k^C \;=\; S_{k-1}^C - S_k^C \quad , \quad A_k^N \;=\; S_{k-1}^N - S_k^N \;. \tag{25}$$

Finalmente, vale

$$P_k \;=\; A_k + J_k \;. \tag{26}$$

Ainda estendemos a definição de S_k, S_k^C e S_k^N ao caso $k = 0$, o que fixa a *condição inicial* e evita a necessidade de fazer distinções de casos em algumas das fórmulas a seguir. Soma-se a esta uma *condição final*, que na prática é uma meta para a execução do contrato ao longo de sua duração: trata-se de outra expressão do preceito do **equilíbrio das contas no final do contrato**, estipulando que no momento do encerramento do contrato (ou seja, no instante $t_0 + nT$), todos os saldos devedores devem estar zerados:

$$S_n \;=\; 0 \quad , \quad S_n^C \;=\; 0 \quad , \quad S_n^N \;=\; 0 \;. \tag{27}$$

Porém, existem exceções a essa regra, que fazem com o que pode, no final do contrato, sobrar um **saldo residual** ou **saldo remanescente**, a favor de uma parte ou de outra. Isso ocorre, por exemplo, em sistemas híbridos de amortização (tais como a versão do SACRE utilizado por vários bancos brasileiros, entre eles a Caixa Econômica Federal, no financiamento habitacional), onde a primeira prestação é calculada por um algoritmo (do SAC, no caso), mas depois a amortização ocorre por uma mistura deste com outro (do SPC, no caso).[5] Mas, obviamente, também ocorre quando há divergências entre os valores das parcelas previamente calculados e as prestações efetivamente pagas, seja por fatores sistêmicos tais como a correção monetária, cuja evolução no tempo naõ pode ser prevista *a priori* mas só será completamente conhecida *a posteriori*, logo após o encerramento do contrato, seja por circunstâncias individuais tais como pagamentos atrasados, inadimplência temporária do devedor, etc.. Portanto, não basta construir esquemas sofisticados para calcular valores teóricos de parcelas, como acontece em praticamente todos os livros de matemática financeira. O que é preciso é poder acompanhar a evolução do financiamento ao longo do tempo, passo a passo, o que requer um algoritmo *iterativo*, ou seja, uma regra ou um conjunto de regras que permita determinar os valores dos diversos saldos em cada instante $t_0 + kT$ (i.e., S_k, S_k^C e S_k^N) em termos dos seus valores no instante imediatamente anterior $t_0 + (k-1)T$ (i.e., S_{k-1}, S_{k-1}^C e S_{k-1}^N). Ademais, é desejável que seja um algoritmo prático, de fácil implementação, e ao mesmo tempo robusto e flexível, no sentido de ser capaz de acomodar os inevitáveis desvios entre a realidade e o plano de pagamento teórico originalmente estabelecido, seja qual for o motivo destes desvios.

[5]Obviamente, tal procedimento é pouco razoável e até reflete falta de profissionalismo, pois gera uma inconsistência matemática, mesmo quando se permanece estritamente dentro do regime de capitalização composta. Será demonstrado em outro trabalho como construir algoritmos mais corretos para o SACRE, inclusive para corrigir essa deficiência [2].

3 Algoritmos para a atualização do saldo

Os algoritmos principais utilizados na matemática financeira para calcular a evolução de saldos devedores são todos "markovianos", no mesmo sentido em que o termo "processo de Markov" é empregado na Física Matemática, mais precisamente na Mecânica Estatística, a saber, para descrever "sistemas sem memória" em que o estado em cada instante depende apenas do seu estado no instante imediatamente anterior. Neste caso, o algoritmo em questão é precisamente a regra (ou o conjunto de regras) que determina como o estado do sistema deve mudar quando passamos de um determinado instante para o próximo, e é dessa forma que se constitui a lei básica para a evolução do sistema no tempo. No contexto de sistemas de amortização de crédito, ele se expressa como "critério de apropriação" dos juros (e dos demais encargos).

3.1 Amortização no regime de capitalização composta

No regime de capitalização composta, as subdivisões do saldo devedor, da amortização e das prestações efetuadas nas equações (21)–(23) acima tornam-se supérfluas e podem ser eliminadas, pondo

$$S_k^C = S_k \quad , \quad S_k^N = 0 \quad , \quad A_k^C = A_k \quad , \quad A_k^N = 0 \quad , \quad P_k^C = P_k \quad , \quad P_k^N = 0 \; . \tag{28}$$

Neste caso, existe um algoritmo bem conhecido e amplamente usado (veja, por exemplo, [1, p. 321 ff]) que satisfaz a todas as exigências já apontadas:

> **Critério exponencial de apropriação**: O valor dos juros em cada instante é calculado multiplicando o saldo devedor do instante imediatamente anterior pela taxa de juros e é acrescido ao saldo devedor, deduzindo-se em seguida o valor da prestação para fins de amortização.

Formalmente, essa prescrição está contida nas equações (24) e (26), segundo as quais

$$S_k \;=\; S_{k-1} - A_k \;=\; S_{k-1} + J_k - P_k \; , \tag{29}$$

em conjunto com a condição

$$J_k \;=\; iS_{k-1} \; , \tag{30}$$

e com a condição inicial $S_0 = C$. A mesma regra de acréscimo ao saldo devedor costuma ser aplicada a outros encargos: a título de exemplo, veja a discussão de como incluir a correção monetária na Seção 4 deste trabalho.

Podemos motivar o uso do termo "critério exponencial" mostrando que, no caso de uma série uniforme de pagamentos (onde P_k é independente de k), ele leva a um comportamento exponencial do saldo devedor no tempo que é típico para o regime de capitalização composta. Porém, podemos formular um resultado muito mais geral, que se aplica mesmo quando a série de pagamentos não for uniforme:

Teorema 1 *O critério exponencial de apropriação, inevitavelmente, implica em capitalização composta, ou seja, na capitalização dos juros (assim como de qualquer outro encargo incorporado ao saldo devedor pelo mesmo algoritmo). Explicitamente, dados o capital inicial C, o prazo n, a taxa de juros i e a sequência de prestações $P_1, \ldots, P_k$, o algoritmo leva à seguinte fórmula para a evolução do saldo devedor até o instante $t_0 + kT$:*

$$S_k \;=\; (1+i)^k\, C \;-\; \sum_{l=1}^{k} (1+i)^{k-l} P_l \;. \tag{31}$$

Convenção: Somatórias do tipo

$$\sum_{l=p}^{q} a_l$$

devem ser entendidos como tendo o valor 0 quando $p > q$.

Demonstração : Por indução matemática sobre k. Como já foi mencionado, começamos com a condição inicial $S_0 = C$. Após o primeiro passo ($k = 1$), temos

$$\begin{aligned} J_1 \;&=\; i\, S_0 \;=\; i\, C \;, \\ S_1 \;&=\; S_0 + J_1 - P_1 \;=\; C + i\, C - P_1 \;=\; (1+i)\, C - P_1 \;. \end{aligned}$$

Após o segundo passo ($k = 2$), vem

$$\begin{aligned} J_2 \;&=\; i\, S_1 \;=\; i(1+i)\, C - iP_1 \;, \\ S_2 \;&=\; S_1 + J_2 - P_2 \;=\; (1+i)\, C - P_1 + i(1+i)\, C - iP_1 - P_2 \\ &=\; (1+i)^2 C - (1+i) P_1 - P_2 \;. \end{aligned}$$

e assim em diante. A indução matemática consiste em supor que a fórmula (31) seja verdadeira com k substituído por $k - 1$ e então, usando esta hipótese e o algoritmo, provar que ela também é verdadeira para k mesmo. Suponha portanto que vale

$$S_{k-1} \;=\; (1+i)^{k-1}\, C \;-\; \sum_{l=1}^{k-1} (1+i)^{k-l-1} P_l \;.$$

Então conforme as equações (29) e (30), segue que

$$\begin{aligned} S_k \;&=\; S_{k-1} - P_k + J_k \;=\; (1+i)\, S_{k-1} - P_k \\ &=\; (1+i)^k\, C \;-\; \sum_{l=1}^{k-1} (1+i)^{k-l} P_l \;-\; P_k \\ &=\; (1+i)^k\, C \;-\; \sum_{l=1}^{k} (1+i)^{k-l} P_l \;. \end{aligned}$$

$\square$

Aplicando a equação (31) com $k = n$, segue que as duas condições de equilíbrio das contas no final do contrato formuladas acima, a saber, as equações (11) e (27), são equivalentes, ou seja: a condicão de saldo final zero poderá ser alcançada se, e somente se, as prestações são calculadas em conformidade com o equação (11), válida no regime de capitalização composta – independentemente de como for a distribuição das parcelas ao longo do contrato!

Para entender melhor como ocorre a capitalização dos juros embutida neste algoritmo, note que ela se evidencia a partir do segundo passo, pois no regime de capitalização simples, o valor de S_2 seria $(1+2i)\,C-(1+i)P_1-P_2$, em vez de $(1+i)^2C-(1+i)P_1-P_2$, sendo que a diferença, i^2C, é o termo provindo da incidência, no cálculo de J_2, de juro sobre o juro J_1 calculado no passo anterior. Uma afirmação análoga vale para todos os termos J_k com $k > 2$, sendo que a diferença se torna cada vez mais acentuada, na medida em que k cresce. De fato a capitalização dos juros só pode ser percebida quando contemplamos (pelo menos) dois passos consecutivos: no primeiro passo, usa-se parte da prestação P_{k-1} para pagar o juro J_{k-1} e não para diminuir o saldo devedor, o que faz com que no segundo passo, o juro seguinte J_k será igual a $i(S_{k-1} - A_{k-1}) = i(S_{k-1} - P_{k-1} + J_{k-1})$ e não a $i(S_{k-1} - P_{k-1})$ – uma diferença no valor de $iJ_{k-1} = i^2S_{k-1}$. Isso indica que *um ótimo indicador de que há capitalização de juros é quando a taxa de juros i aparece em potências >1.* Porém, este critério é apenas suficiente mas não é necessário, pois existem situações em que isso não acontece e mesmo assim pode se comprovar que há capitalização de juros (o SAC a juros compostos discutido abaixo é um exemplo).

Um argumento semelhante pode ser utilizado para determinar a evolução do saldo devedor em termos de uma sequência prescrita $A_1, \ldots, A_k$ de amortizações, ao invés de uma sequência prescrita $P_1, \ldots, P_k$ de prestações. Como precisaremos de apenas um caso especial deste resultado (amortizações constantes), deixaremos a tarefa de formular o resultado geral para o leitor como exercício.

Como é bem conhecido, existem, dentro do regime de capitalização composta, dois sistemas de amortização amplamente utilizados no mercado financeiro:

- Sistema de prestação constante (SPC) a juros compostos:

$$P_k = P \quad \text{independente de } k\ . \tag{32}$$

Neste caso, que corresponde à aplicação da "tabela Price", a equação (31) assume a forma

$$S_k \;=\; C\,(1+i)^k \;-\; P\,\sum_{l=1}^{k}(1+i)^{k-l}$$

Usando a fórmula binomial (13) com n substituído por k,

$$\sum_{l=1}^{k} x^{k-l} \;\equiv\; x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1 \;=\; \frac{x^k-1}{x-1} \tag{33}$$

e com $x = 1 + i$, vimos que ela simplifica para

$$S_k \;=\; C\,(1+i)^k \;-\; P\,\frac{(1+i)^k - 1}{i}\;.$$

Usando a condição final (27), chegamos à fórmula padrão (15) para P, que implica a fórmula (18) para o custo, e obtemos

$$S_k \;=\; C\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}\;. \tag{34}$$

Ademais, inserindo a equação (34) na equação (30), vem

$$J_k \;=\; C\,i\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\;, \tag{35}$$

e, devido à equação (26),

$$A_k \;=\; C\,i\,\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\;. \tag{36}$$

- Sistema de amortização constante (SAC) a juros compostos:

$$A_k = A \quad \text{independente de } k\;. \tag{37}$$

Neste caso, a evolução do saldo devedor, que depende apenas da equação (24), se resolve de forma imediata, pois por definição, ele deve diminuir de forma linear, do seu valor inicial $S_0 = C$ ao seu valor final $S_n = 0$, em passos iguais de tamanho A; portanto, vale

$$A \;=\; \frac{C}{n}\;, \tag{38}$$

assim como

$$S_k \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\;. \tag{39}$$

Ademais, inserindo a equação (39) na equação (30), vem

$$J_k \;=\; C\,i\,\frac{n-k+1}{n}\;, \tag{40}$$

e, devido à equação (26),

$$P_k \;=\; \frac{C}{n}\big(1 \,+\, i(n-k+1)\big)\;. \tag{41}$$

Utilizando a fórmula de Gauss (14), obtemos para a prestação média

$$\bar{P} \;=\; \frac{C}{n}\big(1 + i(n+1)/2\big)\;,$$

e portanto para o custo

$$\text{Custo} \;=\; i(n+1)/2\;. \tag{42}$$

> Vale enfatizar que *o fato de que as equações (38)–(41) mostrarem apenas uma dependência linear no tempo (i.e., da variável k)* ***não*** *significa que estejamos em um regime de capitalização simples*: esta propriedade não tem nada a ver com o regime de capitalização pois provém exclusivamente da exigência de que a amortização seja constante.

Finalmente, verificamos que em ambos os casos, a solução encontrada satisfaz o critério de equilíbrio das contas no final do contrato, que no regime de capitalização composta é a equação (11). No caso do sistema de prestação constante, isso é garantido pelo argumento que levou ao valor da prestação dado pela equação (15), enquanto que no caso do sistema de amortização constante, o cálculo é um pouco mais intricado, envolvendo, além da primeira formula binomial (33), a *segunda fórmula binomial*

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k} (k-l+1)\, x^{k-l} \;&\equiv\; kx^{k-1} + (k-1)x^{k-2} + \ldots + 2x + 1 \\ &=\; \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2} \end{aligned} \tag{43}$$

(válida para $x \neq 1$, que segue da primeira, com k substituído por $k+1$, tomando a derivada em relação a x), com $x = 1 + i$. Juntas, elas implicam

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_k\, (1+i)^{n-k} \;-\; C\,(1+i)^n \\ &\quad=\; \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} \big(1 \,+\, i(n-k+1)\big) \;-\; C\,(1+i)^n \\ &\quad=\; \frac{C}{n} \Big(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \,+\, i\, \frac{n(1+i)^{n+1} - (n+1)(1+i)^n + 1}{i^2} \Big) \;-\; C\,(1+i)^n \\ &\quad=\; \frac{C}{n}\, (1+i)^n\, \frac{1 + n(1+i) - (n+1)}{i} \;-\; C\,(1+i)^n \\ &\quad=\; 0\;. \end{aligned}$$

3.2 Amortização no regime de capitalização simples

No regime de capitalização simples, as subdivisões do saldo devedor, da amortização e das prestações efetuadas nas equações (21)–(23) são imprescindíveis para formular o novo algoritmo a ser apresentado aqui e que constitui o ponto central do presente trabalho:

> **Critério linear de apropriação**: O valor dos juros em cada instante é calculado multiplicando o saldo devedor capitalizável do instante imediatamente anterior pela taxa de juros e é acrescido ao saldo devedor não capitalizável correspondente, deduzindo-se em seguida o valor de cada uma das duas partes da prestação do correspondente saldo devedor para fins de amortização.

Formalmente, essa prescrição está contida nas equações

$$S_k^C \;=\; S_{k-1}^C - A_k^C \;=\; S_{k-1}^C - P_k^C \quad , \quad S_k^N \;=\; S_{k-1}^N - A_k^N \;=\; S_{k-1}^N + J_k - P_k^N \; , \tag{44}$$

em conjunto com a condição

$$J_k \;=\; i S_{k-1}^C \; , \tag{45}$$

e com a condição inicial

$$S_0^C \;=\; Cf \quad , \quad S_0^N \;=\; C(1-f) \; , \tag{46}$$

onde f é uma fração (i.e., $0 \leqslant f \leqslant 1$) que chamaremos de **fator de ponderação** e por enquanto trataremos como um parâmetro livre, a ser determinado posteriormente. Definimos ainda a **taxa de juros ponderada** como o produto

$$i_p \;=\; if \; . \tag{47}$$

A mesma regra de acréscimo ao saldo devedor capitalizável ou ao saldo devedor não capitalizável deve ser aplicada a outros encargos, conforme especificação legal se são capitalizáveis ou não: a título de exemplo, veja a discussão na Seção 4 deste trabalho que trata da questão da correção monetária.

Novamente, podemos motivar o uso do termo "critério linear" mostrando que, no caso de uma série uniforme de pagamentos (onde P_k^C e P_k^N são independentes de k), ele leva a um comportamento polinomial dos dois tipos de saldo devedor no tempo (um linear e o outro quadrático) que é típico para o regime de capitalização simples. Porém, podemos formular um resultado muito mais geral, que se aplica mesmo quando a série de pagamentos não for uniforme:

Teorema 2 *O critério linear de apropriação implica em capitalização simples, ou seja, na ausência de capitalização dos juros (assim como de qualquer outro encargo incorporado ao saldo devedor pelo mesmo algoritmo). Explicitamente, dados o capital inicial C, o prazo n, a taxa de juros i, a sequência de prestações $P_1, \ldots, P_k$ e a decomposição de cada uma na sua parte P_l^C destinada à amortização do saldo devedor capitalizável e sua parte P_l^N destinada à amortização do saldo devedor não capitalizável, o algoritmo leva às seguintes fórmulas para a evolução dos três tipos de saldo devedor até o instante $t_0 + kT$:*

$$S_k^C \;=\; Cf \,-\, \sum_{l=1}^{k} P_l^C \; . \tag{48}$$

$$S_k^N \;=\; C(1-f) \,-\, i \sum_{l=1}^{k} (k-l) P_l^C \,-\, \sum_{l=1}^{k} (P_l^N - Cif) \; . \tag{49}$$

$$S_k \;=\; C \,-\, \sum_{l=1}^{k} \big(1 + i(k-l)\big) P_l^C \,-\, \sum_{l=1}^{k} (P_l^N - Cif) \; . \tag{50}$$

Demonstração : Obviamente, a equação (50) é obtida somando as equações (48) e (49), as quais provaremos por indução matemática sobre k, começando pela condição inicial (46) que afirma que elas estão corretas para $k = 0$ (início da indução). Aplicando o algoritmo das equações (44) e (45), temos após o primeiro passo ($k = 1$)

$$\begin{aligned} J_1 &= i\, S_0^C \;=\; Cif \;, \\ S_1^C &= S_0^C - P_1^C \;=\; Cf - P_1^C \;, \\ S_1^N &= S_0^N + J_1 - P_1^N \;=\; C(1-f) + Cif - P_1^N \;, \end{aligned}$$

Após o segundo passo ($k = 2$), vem

$$\begin{aligned} J_2 &= i\, S_1^C \;=\; Cif - iP_1^C \;, \\ S_2^C &= S_1^C - P_2^C \;=\; Cf - P_1^C - P_2^C \;, \\ S_2^N &= S_1^N + J_2 - P_2^N \;=\; C(1-f) + 2Cif - iP_1^C - P_1^N - P_2^N \;, \end{aligned}$$

após o terceiro ($k = 3$), vem

$$\begin{aligned} J_3 &= i\, S_2^C \;=\; Cif - iP_1^C - iP_2^C \;, \\ S_3^C &= S_2^C - P_3^C \;=\; Cf - P_1^C - P_2^C - P_3^C \;, \\ S_3^N &= S_2^N + J_3 - P_3^N \;=\; C(1-f) + 3Cif - 2iP_1^C - iP_2^C - P_1^N - P_2^N - P_3^N \;, \end{aligned}$$

e assim em diante. A indução matemática consiste em supor que as fórmulas (48) e (49) sejam verdadeiras com k substituído por $k-1$ e então, usando esta hipótese e o algoritmo, provar que elas também são verdadeiras para k mesmo. Suponha portanto que vale

$$S_{k-1}^C \;=\; Cf \;-\; \sum_{l=1}^{k-1} P_l^C \;,$$

e

$$S_{k-1}^N \;=\; C(1-f) \;-\; i \sum_{l=1}^{k-1} (k-l-1) P_l^C \;-\; \sum_{l=1}^{k-1} (P_l^N - Cif) \;.$$

Então aplicação do algoritmo das equações (44) e (45) implica que

$$S_k^C \;=\; S_{k-1}^C - P_k^C \;=\; Cf \;-\; \sum_{l=1}^{k-1} P_l^C \;-\; P_k^C \;=\; Cf \;-\; \sum_{l=1}^{k} P_l^C \;,$$

e

$$
\begin{aligned}
S_k^N &= S_{k-1}^N + J_k - P_k^N \;=\; S_{k-1}^N + iS_{k-1}^C - P_k^N \\
&= C(1-f) \,-\, i\sum_{l=1}^{k-1}(k-l-1)P_l^C \,-\, \sum_{l=1}^{k-1}(P_l^N - Cif) \,+\, Cif \,-\, i\sum_{l=1}^{k-1}P_l^C - P_k^N \\
&= C(1-f) \,-\, i\sum_{l=1}^{k-1}(k-l)P_l^C \,-\, \sum_{l=1}^{k}(P_l^N - Cif) \\
&= C(1-f) \,-\, i\sum_{l=1}^{k}(k-l)P_l^C \,-\, \sum_{l=1}^{k}(P_l^N - Cif)\;.
\end{aligned}
$$

□

Um argumento semelhante pode ser utilizado para determinar a evolução dos saldos devedores em termos de sequências prescritas $A_1^C, \ldots, A_k^C$ e $A_1^N, \ldots, A_k^N$ de amortizações, ao invés de sequências prescritas $P_1^C, \ldots, P_k^C$ e $P_1^N, \ldots, P_k^N$ de prestações. Como precisaremos de apenas um caso especial deste resultado (amortizações constantes), deixaremos a tarefa de formular o resultado geral para o leitor como exercício.

No regime de capitalização simples, assim como no regime de capitalização composta, existem dois sistemas de amortização de importância prática e que constituem os casos especiais de nosso interesse a seguir:

- Sistema de prestação constante (SPC) a juros simples:

$$
P_k^C = P^C \quad , \quad P_k^N = P^N \quad \text{independentes de } k\;. \tag{51}
$$

- Sistema de amortização constante (SAC) a juros simples:

$$
A_k^C = A^C \quad , \quad A_k^N = A^N \quad \text{independentes de } k\;. \tag{52}
$$

Como $P_k^C = A_k^C$ (veja a equação (44)), a análise das consequências destas hipóteses, na sua fase inicial, é igual nos dois casos; ela usa repetidamente a fórmula de Gauss (14) com n substituído por k,

$$
\sum_{l=1}^{k}(k-l) \;\equiv\; (k-1)+(k-2)+\ldots+2+1 \;=\; \frac{k(k-1)}{2}\;. \tag{53}
$$

Primeiro, em ambos os casos, a evolução do saldo devedor capitalizável, que depende apenas da equação (25), se resolve de forma imediata, pois por definição, ele deve diminuir de forma linear, do seu valor inicial $S_0^C = Cf$ ao seu valor final $S_n^C = 0$, em passos iguais de tamanho $P^C = A^C$; portanto, vale

$$
P^C \;=\; A^C \;=\; \frac{C}{n}\,f\;, \tag{54}
$$

assim como

$$S_k^C \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,f\;, \tag{55}$$

e, usando a fórmula de Gauss (53) para efetuar a segunda soma na equação (49),

$$S_k^N \;=\; C(1-f)\;-\;C\,i\,\frac{k(k-1)}{2n}\,f\;-\;\sum_{l=1}^{k}(P_l^N - Cif)\;. \tag{56}$$

Ademais, inserindo a equação (55) na equação (45), vem

$$J_k \;=\; C\,i\,\frac{n-k+1}{n}\,f\;. \tag{57}$$

Logo, a relação entre a parte da prestação destinada à amortização do saldo devedor não capitalizável e a amortização do saldo não capitalizável, $P_k^N = A_k^N + J_k$ (veja a equação (44)), assume a forma

$$P_k^N - Cif \;=\; A_k^N\;-\;C\,i\,\frac{k-1}{n}\,f\;, \tag{58}$$

de modo que a equação (56) pode ser reescrita como

$$S_k^N \;=\; C(1-f)\;-\;C\,i\,\frac{k(k-1)}{2n}\,f\;-\;\sum_{l=1}^{k}(A_l^N\;-\;C\,i\,\frac{l-1}{n}\,f)\;.$$

Aplicando mais uma vez a fórmula de Gauss (53) para efetuar a soma no último termo, vemos que o resultado cancela o segundo termo, e resta apenas

$$S_k^N \;=\; C(1-f)\;-\;\sum_{l=1}^{k}A_l^N\;. \tag{59}$$

A partir deste ponto, é necessário distinguir entre prestação constante e amortização constante.

- Sistema de prestação constante (SPC) a juros simples:

  Simplificamos a equação (56) para

  $$S_k^N \;=\; C(1-f)\;-\;C\,i\,\frac{k(k-1)}{2n}\,f\;-\;k(P^N - Cif)$$

  e usamos a condição final (27) para expressar a constante P^N em termos das demais, sendo igual a

  $$P^N \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f)\;+\;C\,i\,\frac{n+1}{2n}\,f\;, \tag{60}$$

de modo que, devido à equação (58),

$$A_k^N \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \,+\, C\,i\,\frac{2k-n-1}{2n}\,f \;, \tag{61}$$

enquanto que a fórmula anterior para S_k^N assume a forma

$$S_k^N \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,\Big((1-f) \,+\, ikf/2\Big) \;. \tag{62}$$

- Sistema de amortização constante (SAC) a juros simples:

  Simplificamos a equação (59) para

  $$S_k^N \;=\; C(1-f) \,-\, kA^N$$

  e usamos a condição final (27) para expressar a constante A^N em termos das demais, sendo igual a

  $$A^N \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \;, \tag{63}$$

  de modo que, devido à equação (58),

  $$P_k^N \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \,+\, C\,i\,\frac{n-k+1}{n}\,f \;, \tag{64}$$

  enquanto que a fórmula anterior para S_k^N assume a forma

  $$S_k^N \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,(1-f) \;. \tag{65}$$

Existe, ainda, o sistema de amortização mista (SAM) a juros simples, que é definido pela exigência de que a prestação seja a média aritmética da prestação do SPC e do SAC. Mais geralmente, podemos considerar um sistema de amortização onde a prestação P_k é uma média ponderada da prestação P_{Gauss} do SPC e da prestação $P_{\mathrm{SAC-JS}}$ do SAC, i.e.,

$$P_k \;=\; (1-\lambda)P_{\mathrm{Gauss}} \,+\, \lambda(P_{\mathrm{SAC-JS}})_k \;, \tag{66}$$

com um parâmetro λ tal que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$: assim,

- no SPC, $\lambda = 0$,
- no SAC, $\lambda = 1$,
- no SAM, $\lambda = \frac{1}{2}$,

sendo que outros valores de λ também seriam possíveis mas nunca foram implementados na prática. Como a parte destinada à amortização do saldo devedor capitalizável é sempre a mesma (veja a equação (54)), isso significa que

$$P_k^N \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \,+\, C\,i\,\frac{(1-\lambda)(n+1)+2\lambda(n-k+1)}{2n}\,f \;. \tag{67}$$

Somando as equações (54) e (67) e aplicando a fórmula de Gauss (14), obtemos para a prestação média, em termos da taxa de juros ponderada $i_p = if$,

$$\bar{P} \;=\; \frac{C}{n}\,\big(1 + i_p(n+1)/2\big)\;,$$

e portanto para o custo

$$\text{Custo} \;=\; i_p(n+1)/2\;. \tag{68}$$

Finalmente, precisamos verificar que em todos os casos, a solução encontrada satisfaz o critério de equilíbrio das contas no final do contrato, que no regime de capitalização simples é a equação (12): como veremos, é este o critério que fixa o fator de ponderação f. Para tanto, usamos a fórmula geral (67), o que permite tratar o SPC, o SAC e o SAM de uma vez só, eliminando repetições desnecessárias. Também usamos, além da primeira formula de Gauss (53), a *segunda fórmula de Gauss*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(n-k) \;&\equiv\; n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 3{\cdot}2 + 2{\cdot}1 \\ &=\; \frac{(n+1)n(n-1)}{3}\end{aligned} \tag{69}$$

Somando as equações (54), (60) (multiplicada por $1-\lambda$) e (64) (multiplicada por λ), obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} P_k\,\big(1 + i(n-k)\big) \;-\; C\,(1+in) \\ &\quad=\; \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(1+i(n-k)\big)\Big(1 \,+\, i(1-\lambda)\,\frac{n+1}{2}\,f \,+\, i\lambda(n-k+1)f\Big) \;-\; C\,(1+in) \\ &\quad=\; C\left(\Big(1 \,+\, i\,\frac{n-1}{2}\Big)\Big(1 \,+\, i(1-\lambda)\,\frac{n+1}{2}\,f\Big) \,+\, i\lambda\,\frac{n+1}{2}f \,+\, i^2\lambda\,\frac{(n-1)(n+1)}{3}f\right) \\ &\qquad -\; C\,(1+in) \\ &\quad=\; C\,i\,\frac{n+1}{2}\left(-\,1 \,+\, \Big(1 \,+\, i\,\frac{n-1}{2}\Big)(1-\lambda)f \,+\, \lambda f \,+\, i\lambda\,\frac{2(n-1)}{3}f\right) \\ &\quad=\; C\,i\,\frac{n+1}{2}\left(\Big(1 \,+\, i(n-1)\big(\tfrac{1}{2}\,(1-\lambda) \,+\, \tfrac{2}{3}\,\lambda\big)\Big)f \,-\, 1\right)\,,\end{aligned}$$

e para que esta expressão se anule, o fator de ponderação deve ser dado por

$$f \;=\; \frac{1}{1 + i(n-1)(\lambda+3)/6}\;. \tag{70}$$

e a taxa de juros ponderada por

$$i_p \;=\; \frac{i}{1 + i(n-1)(\lambda+3)/6}\;. \tag{71}$$

Em particular, temos que

- no SPC,

$$f = \frac{1}{1+i(n-1)/2} \quad , \quad i_p = \frac{i}{1+i(n-1)/2} \; , \tag{72}$$

- no SAC,

$$f = \frac{1}{1+2\,i(n-1)/3} \quad , \quad i_p = \frac{i}{1+2\,i(n-1)/3} \; , \tag{73}$$

- no SAM,

$$f = \frac{1}{1+7\,i(n-1)/12} \quad , \quad i_p = \frac{i}{1+7\,i(n-1)/12} \; , \tag{74}$$

e assim todos os parâmetros da evolução estão completamente determinados. Observamos ainda que, no caso do SPC-JS (método de Gauss) e no caso do SAC-JS, o produto da parcela ideal $P_0 = C/n$ com a taxa de juros ponderada $i_p = if$, ou seja, a expressão

$$\frac{C}{n}\, if \; ,$$

é exatamente o respectivo "índice de ponderação" considerado na literatura [3, 4]; veja, por exemplo, [4, p. 70, eq. 29 e p. 112, eq. 35]. Porém, gostaríamos de evitar o termo "índice" neste contexto, porque um "índice" não deveria depender do capital inicial C.

3.3 Um resumo das fórmulas mais importantes

Para melhor visualização, confrontamos os algoritmos para atualização do(s) saldo(s) devedor(es):

Algoritmo para capitalização composta:

$$\boxed{\begin{aligned} J_k &= iS_{k-1} \\ S_k = S_{k-1} - A_k &= S_{k-1} + J_k - P_k \end{aligned} \qquad \text{para capitalização composta}}$$

Algoritmo para capitalização simples:

$$\boxed{\begin{aligned} J_k &= iS^C_{k-1} \\ S^C_k = S^C_{k-1} - A^C_k &= S^C_{k-1} - P^C_k \\ S^N_k = S^N_{k-1} - A^N_k &= S^N_{k-1} + J_k - P^N_k \end{aligned} \qquad \text{para capitalização simples}}$$

Também juntamos as fórmulas mais importantes dos quatro sistemas de amortização mais importantes:

3.3.1 Sistema de prestação constante a juros compostos = tabela Price

Prestação:

$$\boxed{P \;=\; C\,i\,\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}}$$

Amortização:

$$\boxed{A_k \;=\; C\,i\,\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}}$$

Juros:

$$\boxed{J_k \;=\; C\,i\,\frac{(1+i)^n-(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}}$$

Saldo devedor:

$$\boxed{S_k \;=\; C\,\frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1}}$$

Custo:

$$\boxed{\text{Custo} \;=\; \frac{(in-1)(1+i)^n-1}{(1+i)^n-1}}$$

3.3.2 Sistema de amortização constante (SAC) a juros compostos

Prestação:

$$\boxed{P_k \;=\; \frac{C}{n}\Big(1\,+\,i\,(n-k+1)\Big)}$$

Amortização:

$$\boxed{A \;=\; \frac{C}{n}}$$

Juros:

$$\boxed{J_k \;=\; \frac{C}{n}\,i\,(n-k+1)}$$

Saldo devedor:

$$\boxed{S_k \;=\; \frac{C}{n}\,(n-k)}$$

Custo:

$$\boxed{\text{Custo} \;=\; i(n+1)/2}$$

3.3.3 Sistema de prestação constante a juros simples = método de Gauss

Fator de ponderação:

$$\boxed{f \;=\; \frac{1}{1+i(n-1)/2}}$$

Prestação:

$$\boxed{P \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{1+in}{1+i(n-1)/2}}$$

Parte da prestação destinada à amortização do saldo capitalizável
e amortização do saldo capitalizável:

$$\boxed{P^C \;=\; A^C \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{1}{1+i(n-1)/2}}$$

Parte da prestação destinada à amortização do saldo não capitalizável:

$$\boxed{P^N \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{in}{1+i(n-1)/2}}$$

Amortização do saldo não capitalizável:

$$\boxed{A_k^N \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{i(k-1)}{1+i(n-1)/2}}$$

Juros:

$$\boxed{J_k \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{i(n-k+1)}{1+i(n-1)/2}}$$

Saldo devedor capitalizável:

$$\boxed{S_k^C \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,\frac{1}{1+i(n-1)/2}}$$

Saldo devedor não capitalizável:

$$\boxed{S_k^N \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,\frac{i(n+k-1)/2}{1+i(n-1)/2}}$$

Custo:

$$\boxed{\text{Custo} \;=\; \frac{i(n+1)/2}{1+i(n-1)/2}}$$

3.3.4 Sistema de amortização constante (SAC) a juros simples

Fator de ponderação:

$$\boxed{f \;=\; \frac{1}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Prestação:

$$\boxed{P_k \;=\; \frac{C}{n}\Big(1 \,+\, \frac{i\,(n-k+1)}{1+2\,i(n-1)/3}\Big)}$$

Parte da prestação destinada à amortização do saldo capitalizável
e amortização do saldo capitalizável:

$$\boxed{P^C \;=\; A^C \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{1}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Parte da prestação destinada à amortização do saldo não capitalizável:

$$\boxed{P_k^N \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{i(n-k+1)+2\,i(n-1)/3}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Amortização do saldo não capitalizável:

$$\boxed{A^N \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{2\,i(n-1)/3}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Juros:

$$\boxed{J_k \;=\; \frac{C}{n}\,\frac{i(n-k+1)}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Saldo devedor capitalizável:

$$\boxed{S_k^C \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,\frac{1}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Saldo devedor não capitalizável:

$$\boxed{S_k^N \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,\frac{2\,i(n-1)/3}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Custo:

$$\boxed{\text{Custo} \;=\; \frac{i(n+1)/2}{1+2\,i(n-1)/3}}$$

Notamos que todas essas fórmulas podem ser implementadas em planilhas Excel e simuladores baseados nestes algoritmos já estão sendo desenvolvidos.

3.4 Um exemplo numérico

Exemplo 3 Como exemplo prático e ao mesmo tempo computacionalmente simples considere o financiamento de um capital C de 120.000 R\$ emprestado a uma taxa mensal de juros de $i = 1\% = 0,01$ durante 10 anos, ou seja, com $n = 120$, para aquisição de um imóvel. A prestação ideal P_0 é de 1.000 R\$.

Neste caso, a prestação fixa conforme a tabela Price é de

$$P_{\text{Price}} = 1.721,65 \text{ R\$ },$$

enquanto que a primeira e a última prestação no SAC a juros compostos são de

$$P_1^{\text{SAC}-\text{JC}} = 2.200,00 \text{ R\$} \quad \ldots \quad P_n^{\text{SAC}-\text{JC}} = 1.010,00 \text{ R\$}$$

com decréscimo constante em passos de $10,00$ R\$ por mês. Graficamente, a evolução do saldo devedor, da prestação, dos juros e da amortização é mostrada nas Figuras 5 e 6.

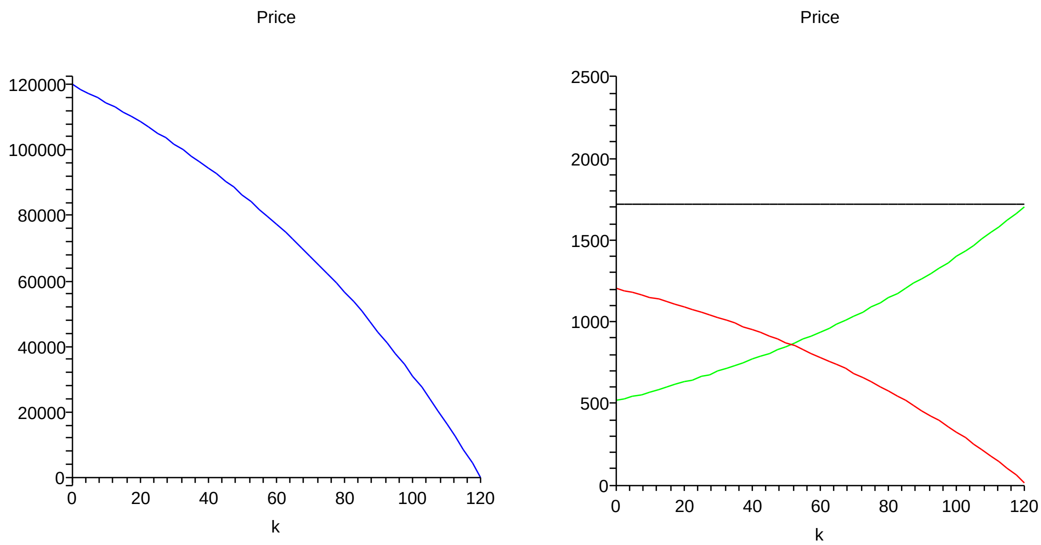

Figura 5: Evolução do saldo devedor (azul), da prestação (preto), da amortização (verde) e dos juros (vermelho) (valores como no Exemplo 3), conforme a tabela Price.

Por outro lado, a prestação fixa conforme o método de Gauss é de

$$P_{\text{Gauss}} = 1.379,31 \text{ R\$ },$$

enquanto que a primeira e a última prestação no SAC a juros simples são de

$$P_1^{\text{SAC}-\text{JS}} = 1.669,14 \text{ R\$} \quad \ldots \quad P_n^{\text{SAC}-\text{JS}} = 1.005,58 \text{ R\$}$$

com decréscimo constante em passos de $5,58$ R\$ por mês. Graficamente, a evolução dos saldos devedores, da prestação, dos juros e da amortização é mostrada nas Figuras 7 e 8.

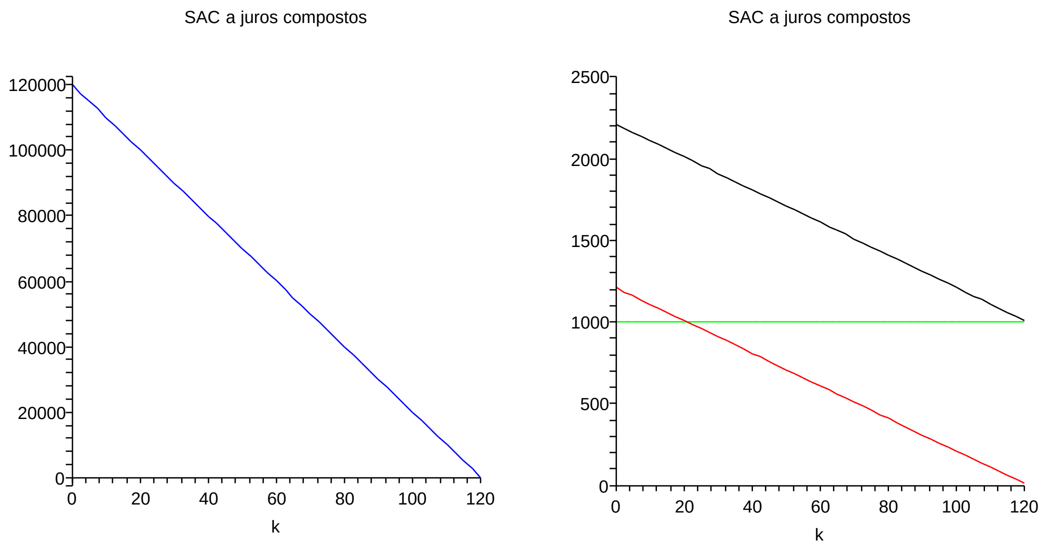

Figura 6: Evolução do saldo devedor (azul), da prestação (preto), da amortização (verde) e dos juros (vermelho) (valores como no Exemplo 3), conforme o SAC a juros compostos.

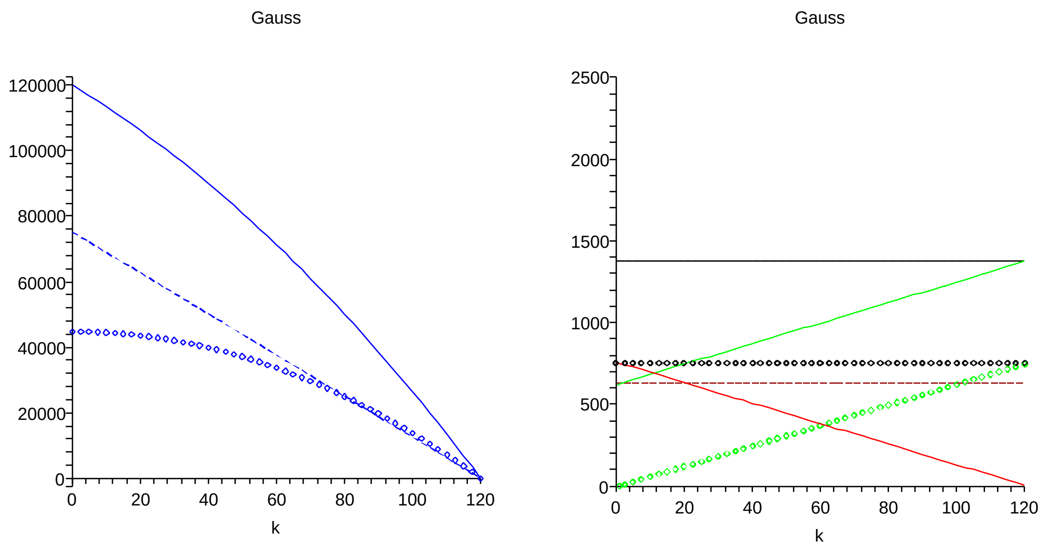

Figura 7: Evolução do saldo devedor (azul), do saldo devedor capitalizável (azul riscado), do saldo devedor não capitalizável (azul pontilhado), da prestação (preto), da amortização (verde), da parte da prestação destinada à amortização do saldo capitalizável e amortização do saldo capitalizável (marron riscado), da parte da prestação destinada à amortização do saldo não capitalizável (preto pontilhado), da amortização do saldo não capitalizável (verde pontilhado) e dos juros (vermelho) (valores como no Exemplo 3), conforme o método de Gauss.

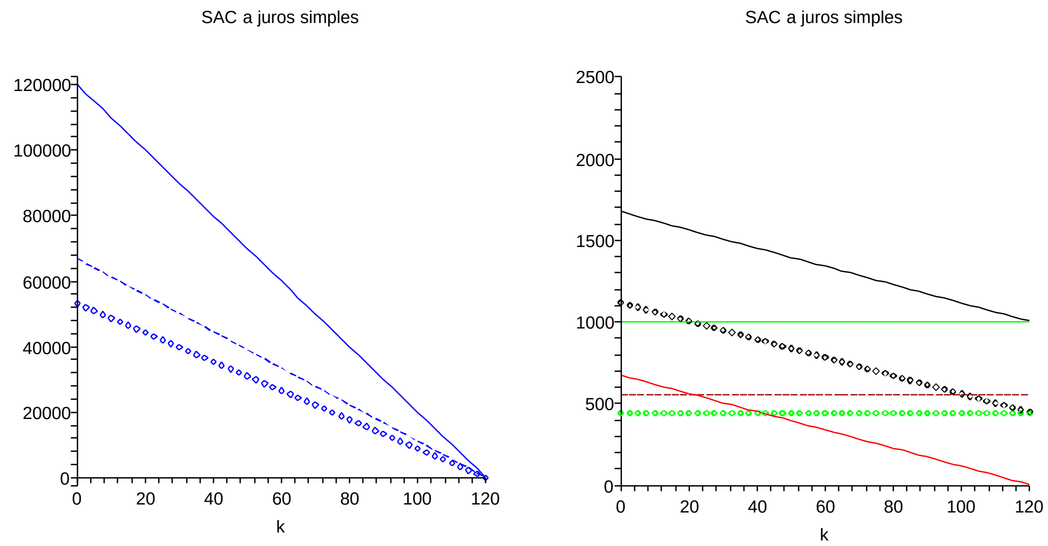

Figura 8: Evolução do saldo devedor (azul), do saldo devedor capitalizável (azul riscado), do saldo devedor não capitalizável (azul pontilhado), da prestação (preto), da amortização (verde), da parte da prestação destinada à amortização do saldo capitalizável e amortização do saldo capitalizável (marron riscado), da parte da prestação destinada à amortização do saldo não capitalizável (preto pontilhado), da amortização do saldo não capitalizável (verde pontilhado) e dos juros (vermelho) (valores como no Exemplo 3), conforme o SAC a juros simples.

3.5 Planilhas de evolução de financiamento

Para que o novo paradigma financeiro da divisão do saldo devedor em uma “Parte C” (saldo devedor capitalizável) e uma “Parte N” (saldo devedor não capitalizável) possa ter utilidade prática, precisamos ainda demonstrar como implementá-lo na elaboração de planilhas de evolução de financiamento. Para isso, trabalharemos com um exemplo um pouco diferente do anterior, caracterizado por um prazo menor e uma taxa de juros maior, para evitarmos um número excessivo de linhas na planilha e ainda assim podermos visualizar com clareza as diferenças marcantes entre os regimes de capitalização composta e de capitalização simples.

Exemplo 4 Como no Exemplo 2 anterior, considere o financiamento de um capital C de 12.000 R$ emprestado a uma taxa mensal de juros de $i = 5\% = 0,05$ durante 1 ano, ou seja, com $n = 12$ – valores típicos de um empréstimo pessoal. Novamente, a prestação ideal P_0 é de 1.000 R$.

Inicialmente, na Figura 9, exibimos a planilha padrão para este financiamento, elaborada conforme a tabela Price.

PLANILHA PADRÃO DE EVOLUÇÃO DE SALDO DEVEDOR (EXEMPLO) TABELA PRICE

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
PRESTAÇÃO	R$ 1.353,90

A	B	C	D	E
NO	PRESTAÇÃO	SALDO	JUROS	NO
0		R$ 12.000,00		0
1	R$ 1.353,90	R$ 11.246,10	R$ 600,00	1
2	R$ 1.353,90	R$ 10.454,49	R$ 562,30	2
3	R$ 1.353,90	R$ 9.623,31	R$ 522,72	3
4	R$ 1.353,90	R$ 8.750,58	R$ 481,17	4
5	R$ 1.353,90	R$ 7.834,20	R$ 437,53	5
6	R$ 1.353,90	R$ 6.872,00	R$ 391,71	6
7	R$ 1.353,90	R$ 5.861,70	R$ 343,60	7
8	R$ 1.353,90	R$ 4.800,88	R$ 293,08	8
9	R$ 1.353,90	R$ 3.687,02	R$ 240,04	9
10	R$ 1.353,90	R$ 2.517,46	R$ 184,35	10
11	R$ 1.353,90	R$ 1.289,43	R$ 125,87	11
12	R$ 1.353,90	R$ 0,00	R$ 64,47	12

Figura 9: Exemplo de planilha padrão de evolução de saldo devedor: tabela Price.

Podemos reescrever esta planilha fazendo uso das novas noções de saldo capitalizável e saldo não capitalizável, se bem que, neste contexto, esta distinção ainda está completamente sem função: ela é introduzida apenas para preparar a passagem para o próximo passo. O resultado pode ser contemplado na Figura 10, onde ainda mostramos o fluxo de informação que rege o cálculo dos juros e a sua incorporação no saldo devedor: aqui, no saldo devedor capitalizável.

A título de contraste, apresentamos na Figura 11 a mesma planilha elaborada conforme o método de Gauss. Novamente, mostramos ainda o fluxo de informação que rege o cálculo dos juros e a sua incorporação no saldo devedor: agora, no saldo devedor não capitalizável.

Nas Figuras 12 e 13, mostramos a mesma comparação entre planilhas elaborados no SAC, a juros compostos na Figura 12 e a juros simples na Figura 13.

A comparação entre as tabelas demonstra claramente como acontece a capitalização dos juros pelo algoritmo tradicional: ocorre através da sua incorporação ao saldo devedor, na medida em que os juros dos períodos seguintes incidem sobre este saldo indiscriminadamente, independente da origem dos recursos que o compõem. Também demonstra como superar este problema, dentro de um determinado contrato de crédito: pela simples subdivisão deste saldo em uma parte capitalizável, sobre a qual incidem novos juros, e uma parte não capitalizável, sobre a qual não. Obviamente, uma questão de fundamental importância é como fazer essa subdivisão no início do contrato.

PLANILHA ESTENDIDA DE EVOLUÇÃO DE SALDO DEVEDOR (EXEMPLO)
TABELA PRICE

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
PRESTAÇÃO	R$ 1.353,90

A	B	C	D	E	F	G	H	I
NO PR	PRESTAÇÃO TOTAL	PRESTAÇÃO PARTE C	SALDO CAPITALIZÁVEL	JUROS SOBRE SALDO C	PRESTAÇÃO PARTE N	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL	NO PR
0			R$ 12.000,00			R$ -	R$ 12.000,00	0
1	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 11.246,10	R$ 600,00	R$ -	R$ -	R$ 11.246,10	1
2	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 10.454,49	R$ 562,30	R$ -	R$ -	R$ 10.454,49	2
3	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 9.623,31	R$ 522,72	R$ -	R$ -	R$ 9.623,31	3
4	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 8.750,58	R$ 481,17	R$ -	R$ -	R$ 8.750,58	4
5	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 7.834,20	R$ 437,53	R$ -	R$ -	R$ 7.834,20	5
6	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 6.872,00	R$ 391,71	R$ -	R$ -	R$ 6.872,00	6
7	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 5.861,70	R$ 343,60	R$ -	R$ -	R$ 5.861,70	7
8	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 4.800,88	R$ 293,08	R$ -	R$ -	R$ 4.800,88	8
9	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 3.687,02	R$ 240,04	R$ -	R$ -	R$ 3.687,02	9
10	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 2.517,46	R$ 184,35	R$ -	R$ -	R$ 2.517,46	10
11	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 1.289,43	R$ 125,87	R$ -	R$ -	R$ 1.289,43	11
12	R$ 1.353,90	R$ 1.353,90	R$ 0,00	R$ 64,47	R$ -	R$ -	R$ 0,00	12

Figura 10: Exemplo de planilha estendida de evolução de saldo devedor: tabela Price.

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDOS DEVEDORES (EXEMPLO)
MÉTODO DE GAUSS

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
PRESTAÇÃO	R$ 1.254,90
FATOR DE PONDERAÇÃO	0,784314

A	B	C	D	E	F	G	H	I
NO PR	PRESTAÇÃO TOTAL	PRESTAÇÃO PARTE C	SALDO CAPITALIZÁVEL	JUROS SOBRE SALDO C	PRESTAÇÃO PARTE N	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL	NO PR
0			R$ 9.411,76			R$ 2.588,24	R$ 12.000,00	0
1	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 8.627,45	R$ 470,59	R$ 470,59	R$ 2.588,24	R$ 11.215,69	1
2	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 7.843,14	R$ 431,37	R$ 470,59	R$ 2.549,02	R$ 10.392,16	2
3	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 7.058,82	R$ 392,16	R$ 470,59	R$ 2.470,59	R$ 9.529,41	3
4	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 6.274,51	R$ 352,94	R$ 470,59	R$ 2.352,94	R$ 8.627,45	4
5	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 5.490,20	R$ 313,73	R$ 470,59	R$ 2.196,08	R$ 7.686,27	5
6	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 4.705,88	R$ 274,51	R$ 470,59	R$ 2.000,00	R$ 6.705,88	6
7	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 3.921,57	R$ 235,29	R$ 470,59	R$ 1.764,71	R$ 5.686,27	7
8	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 3.137,25	R$ 196,08	R$ 470,59	R$ 1.490,20	R$ 4.627,45	8
9	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 2.352,94	R$ 156,86	R$ 470,59	R$ 1.176,47	R$ 3.529,41	9
10	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 1.568,63	R$ 117,65	R$ 470,59	R$ 823,53	R$ 2.392,16	10
11	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 784,31	R$ 78,43	R$ 470,59	R$ 431,37	R$ 1.215,69	11
12	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 0,00	R$ 39,22	R$ 470,59	R$ 0,00	R$ 0,00	12

Figura 11: Exemplo de planilha de evolução de saldos devedores: método de Gauss.

PLANILHA ESTENDIDA DE EVOLUÇÃO DE SALDO DEVEDOR (EXEMPLO)
SAC A JUROS COMPOSTOS

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
AMORTIZAÇÃO	R$ 1.000,00

A	B	C	D	E	F	G	H	I
NO PR	PRESTAÇÃO TOTAL	PRESTAÇÃO PARTE C	SALDO CAPITALIZÁVEL	JUROS SOBRE SALDO C	PRESTAÇÃO PARTE N	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL	NO PR
0			R$ 12.000,00			R$ -	R$ 12.000,00	0
1	R$ 1.600,00	R$ 1.600,00	R$ 11.000,00	R$ 600,00	R$ -	R$ -	R$ 11.000,00	1
2	R$ 1.550,00	R$ 1.550,00	R$ 10.000,00	R$ 550,00	R$ -	R$ -	R$ 10.000,00	2
3	R$ 1.500,00	R$ 1.500,00	R$ 9.000,00	R$ 500,00	R$ -	R$ -	R$ 9.000,00	3
4	R$ 1.450,00	R$ 1.450,00	R$ 8.000,00	R$ 450,00	R$ -	R$ -	R$ 8.000,00	4
5	R$ 1.400,00	R$ 1.400,00	R$ 7.000,00	R$ 400,00	R$ -	R$ -	R$ 7.000,00	5
6	R$ 1.350,00	R$ 1.350,00	R$ 6.000,00	R$ 350,00	R$ -	R$ -	R$ 6.000,00	6
7	R$ 1.300,00	R$ 1.300,00	R$ 5.000,00	R$ 300,00	R$ -	R$ -	R$ 5.000,00	7
8	R$ 1.250,00	R$ 1.250,00	R$ 4.000,00	R$ 250,00	R$ -	R$ -	R$ 4.000,00	8
9	R$ 1.200,00	R$ 1.200,00	R$ 3.000,00	R$ 200,00	R$ -	R$ -	R$ 3.000,00	9
10	R$ 1.150,00	R$ 1.150,00	R$ 2.000,00	R$ 150,00	R$ -	R$ -	R$ 2.000,00	10
11	R$ 1.100,00	R$ 1.100,00	R$ 1.000,00	R$ 100,00	R$ -	R$ -	R$ 1.000,00	11
12	R$ 1.050,00	R$ 1.050,00	R$ -	R$ 50,00	R$ -	R$ -	R$ -	12

Figura 12: Exemplo de planilha estendida de evolução de saldo devedor: SAC-JC.

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDOS DEVEDORES (EXEMPLO)
SAC A JUROS SIMPLES

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
AMORTIZAÇÃO SALDO C	R$ 731,71
AMORTIZAÇÃO SALDO N	R$ 268,29
FATOR DE PONDERAÇÃO	0,731707

A	B	C	D	E	F	G	H	I
NO PR	PRESTAÇÃO TOTAL	PRESTAÇÃO PARTE C	SALDO CAPITALIZÁVEL	JUROS SOBRE SALDO C	PRESTAÇÃO PARTE N	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL	NO PR
0			R$ 8.780,49			R$ 3.219,51	R$ 12.000,00	0
1	R$ 1.439,02	R$ 731,71	R$ 8.048,78	R$ 439,02	R$ 707,32	R$ 2.951,22	R$ 11.000,00	1
2	R$ 1.402,44	R$ 731,71	R$ 7.317,07	R$ 402,44	R$ 670,73	R$ 2.682,93	R$ 10.000,00	2
3	R$ 1.365,85	R$ 731,71	R$ 6.585,37	R$ 365,85	R$ 634,15	R$ 2.414,63	R$ 9.000,00	3
4	R$ 1.329,27	R$ 731,71	R$ 5.853,66	R$ 329,27	R$ 597,56	R$ 2.146,34	R$ 8.000,00	4
5	R$ 1.292,68	R$ 731,71	R$ 5.121,95	R$ 292,68	R$ 560,98	R$ 1.878,05	R$ 7.000,00	5
6	R$ 1.256,10	R$ 731,71	R$ 4.390,24	R$ 256,10	R$ 524,39	R$ 1.609,76	R$ 6.000,00	6
7	R$ 1.219,51	R$ 731,71	R$ 3.658,54	R$ 219,51	R$ 487,80	R$ 1.341,46	R$ 5.000,00	7
8	R$ 1.182,93	R$ 731,71	R$ 2.926,83	R$ 182,93	R$ 451,22	R$ 1.073,17	R$ 4.000,00	8
9	R$ 1.146,34	R$ 731,71	R$ 2.195,12	R$ 146,34	R$ 414,63	R$ 804,88	R$ 3.000,00	9
10	R$ 1.109,76	R$ 731,71	R$ 1.463,41	R$ 109,76	R$ 378,05	R$ 536,59	R$ 2.000,00	10
11	R$ 1.073,17	R$ 731,71	R$ 731,71	R$ 73,17	R$ 341,46	R$ 268,29	R$ 1.000,00	11
12	R$ 1.036,59	R$ 731,71	R$ (0,00)	R$ 36,59	R$ 304,88	R$ -	R$ (0,00)	12

Figura 13: Exemplo de planilha de evolução de saldos devedores: SAC-JS.

É exatamente neste ponto que entra a nova ferramenta do *fator de ponderação* f: é o fator que determina como fazer essa subdivisão – realmente algo a ser bem ponderado. Note que ele não depende do capital inicial C; depende apenas da taxa de juros i e do prazo do financiamento n, além do sistema de amortização, é claro. Sua função principal para planilhas de evolução de financiamento é determinar a divisão do capital inicial C, no instante do início do contrato (valor presente), em sua parte capitalizável, que é Cf, e uma parte não capitalizável, que é $C(1-f)$, e ele é completamente determinado por um único critério: deve ser escolhido de tal forma que se atinja a meta do equilíbrio das contas no final do contrato, ou seja, a igualdade do valor futuro do capital inicial e da soma de todas as prestações, conforme expressa pela equação (12). É interessante notar que isso implica, necessaria e inevitavelmente, que $f < 1$: *a atribuição de uma parte do capital inicial C ao saldo devedor não capitalizável é um aspecto indissociável do regime de capitalização simples, e se esta atribuição não for efetuada com o fator correto, é impossível atingir a meta de que os dois tipos de saldo devedor devem estar zerados no fim do contrato!* Também percebemos que o saldo devedor capitalizável sempre decresce linearmente, i.e., em passos constantes, de modo que a mesma afirmação vale para os juros. A diferença entre os vários sistemas de amortização reside na forma da curva de decréscimo do saldo devedor não capitalizável e da curva de sua derivada, que é a “parte N” da amortização: no SPC (método de Gauss), esta cresce linearmente para compensar o decréscimo linear dos juros e assim produzir uma prestação constante, enquanto que no SAC, ela é constante e assim a queda linear dos juros acarreta uma queda linear correspondente das prestações.

4 Correção monetária

Uma das várias vantagens do novo algoritmo introduzido neste trabalho é que, assim como o algoritmo tradicional, ele pode facilmente ser modificado para acomodar uma eventual correção monetária: basta aplicar a mesma regra (multiplicar o saldo devedor do instante imediatamente anterior pelo indexador pertinente) a cada um dos três tipos de saldo devedor, assim como à prestação devida e às suas duas partes. A título de exemplo, mostramos nas Figuras 14 e 15 as planilhas que resultam das planilhas das Figuras 11 e 13, respectivamente, após incorporação de uma típica correção monetária.

Gostaria de enfatizar aqui que, em qualquer um dos regimes de capitalização (simples ou composto), deve ser respeitado *o princípio de sempre reajustar a prestação junto com o saldo devedor, e pelo mesmo índice, concomitante e proporcionalmente, sendo que a prática de desvincular estes reajustes deve ser condenada, pois é matematicamente inconsistente e leva a distorções na evolução do financiamento.* De fato, este tipo de distorção ocorreu em grande escala, por interferência do estado, no sistema de financiamento habitacional (SFH), mais especificamente no plano de equiparação salarial (PES), onde esse princípio foi grosseiramente desrespeitado, levando à acumulação de gigantescos saldos devedores remanescentes, muitas vezes impagáveis, arruinando mutuários ainda anos após o encerramento dos seus contratos. Portanto, *sugere-se fortemente que essa prática seja*

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDOS DEVEDORES COM CORREÇÃO MONETÁRIA PELA TR (EXEMPLO): MÉTODO DE GAUSS

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
PRESTAÇÃO	R$ 1.254,90
FATOR DE PONDERAÇÃO	0,784314
DATA INICIAL	22/09/2004

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
NO DATA	PRESTAÇÃO TOTAL	PRESTAÇÃO PARTE C	SALDO CAPITALIZÁVEL	JUROS SOBRE SALDO C	PRESTAÇÃO PARTE N	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL	FATOR DE CORREÇÃO	CORREÇÃO ACUMULADA
0	R$ 1.254,90	R$ 784,31	R$ 9.411,76		R$ 470,59	R$ 2.588,24	R$ 12.000,00		
22/10/2004			R$ 9.423,81			R$ 2.591,55	R$ 12.015,36	1,001280	1,00128000
1	R$ 1.256,51	R$ 785,32	R$ 8.638,49	R$ 471,19	R$ 471,19	R$ 2.591,55	R$ 11.230,04		
22/11/2004			R$ 8.646,37			R$ 2.593,91	R$ 11.240,28	1,000912	1,00219317
2	R$ 1.257,65	R$ 786,03	R$ 7.860,34	R$ 432,32	R$ 471,62	R$ 2.554,61	R$ 10.414,95		
22/12/2004			R$ 7.876,26			R$ 2.559,79	R$ 10.436,05	1,002026	1,00422361
3	R$ 1.260,20	R$ 787,63	R$ 7.088,64	R$ 393,81	R$ 472,58	R$ 2.481,02	R$ 9.569,66		
22/01/2005			R$ 7.106,71			R$ 2.487,35	R$ 9.594,05	1,002549	1,00678338
4	R$ 1.263,41	R$ 789,63	R$ 6.317,07	R$ 355,34	R$ 473,78	R$ 2.368,90	R$ 8.685,97		
22/02/2005			R$ 6.326,22			R$ 2.372,33	R$ 8.698,55	1,001448	1,00824120
5	R$ 1.265,24	R$ 790,78	R$ 5.535,44	R$ 316,31	R$ 474,47	R$ 2.214,18	R$ 7.749,62		
22/03/2005			R$ 5.546,27			R$ 2.218,51	R$ 7.764,78	1,001956	1,01021332
6	R$ 1.267,72	R$ 792,32	R$ 4.753,95	R$ 277,31	R$ 475,39	R$ 2.020,43	R$ 6.774,37		
22/04/2005			R$ 4.765,34			R$ 2.025,27	R$ 6.790,61	1,002397	1,01263480
7	R$ 1.270,76	R$ 794,22	R$ 3.971,12	R$ 238,27	R$ 476,53	R$ 1.787,00	R$ 5.758,12		
22/05/2005			R$ 3.980,99			R$ 1.791,45	R$ 5.772,44	1,002487	1,01515322
8	R$ 1.273,92	R$ 796,20	R$ 3.184,79	R$ 199,05	R$ 477,72	R$ 1.512,78	R$ 4.697,57		
22/06/2005			R$ 3.193,02			R$ 1.516,68	R$ 4.709,70	1,002582	1,01777435
9	R$ 1.277,21	R$ 798,25	R$ 2.394,76	R$ 159,65	R$ 478,95	R$ 1.197,38	R$ 3.592,14		
22/07/2005			R$ 2.401,99			R$ 1.200,99	R$ 3.602,98	1,003017	1,02084497
10	R$ 1.281,06	R$ 800,66	R$ 1.601,33	R$ 120,10	R$ 480,40	R$ 840,70	R$ 2.442,02		
22/08/2005			R$ 1.605,44			R$ 842,86	R$ 2.448,30	1,002570	1,02346855
11	R$ 1.284,35	R$ 802,72	R$ 802,72	R$ 80,27	R$ 481,63	R$ 441,50	R$ 1.244,22		
22/09/2005			R$ 805,12			R$ 442,82	R$ 1.247,94	1,002994	1,02653281
12	R$ 1.288,20	R$ 805,12	R$ 0,00	R$ 40,26	R$ 483,07	R$ (0,00)	R$ (0,00)		

Figura 14: Exemplo de planilha de evolução de saldos devedores com correção monetária: método de Gauss.

terminantemente proibida, através de legislação específica. Em particular, isso significa que não deveria ser permitido incluir correção monetária em contratos baseados em sistemas de prestação constante (tabela Price ou método de Gauss). Já nos sistemas de amortização constante (SAC), tal problema deixa de existir: pelo contrário, a correção monetária tende a ser compensada, pelo menos parcialmente, pela queda natural das prestações ao longo do contrato. Em tempos de inflação baixa, acarreta apenas uma queda mais lenta.

5 Séries de pagamentos irregulares

Finalmente, não podemos deixar de abordar uma questão de eminente importância prática: como lidar, dentro da metodologia aqui proposta, com séries de pagamentos irregulares. Em princípio, existem dois tipos de irregularidades: (a) os pagamentos efetuados pontualmente, nas suas respectivas datas de vencimento, porém com valores diferentes dos valores devidos, e (b) os pagamentos efetuados em datas diferentes das suas respectivas datas de vencimento, tipicamente com atraso. Ambos levam a desvios da evolução "real"

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDOS DEVEDORES COM CORREÇÃO MONETÁRIA PELA TR (EXEMPLO)
SAC A JUROS SIMPLES

VALOR FINANCIADO	R$ 12.000,00
PRAZO (MESES)	12
TAXA DE JUROS	5,00%
PRESTAÇÃO IDEAL	R$ 1.000,00
AMORTIZAÇÃO SALDO C	R$ 731,71
AMORTIZAÇÃO SALDO N	R$ 268,29
FATOR DE PONDERAÇÃO	0,731707
DATA INICIAL	22/09/2004

A NO DATA	B PRESTAÇÃO TOTAL	C PRESTAÇÃO PARTE C	D SALDO CAPITALIZÁVEL	E JUROS SOBRE SALDO C	F PRESTAÇÃO PARTE N	G SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	H SALDO TOTAL	I FATOR DE CORREÇÃO	J CORREÇÃO ACUMULADA
0			R$ 8.780,49			R$ 3.219,51	R$ 12.000,00		
22/10/2004			R$ 8.791,73			R$ 3.223,63	R$ 12.015,36	1,001280	1,00128000
1	R$ 1.440,87	R$ 732,64	R$ 8.059,08	R$ 439,59	R$ 708,22	R$ 2.955,00	R$ 11.014,08		
22/11/2004			R$ 8.066,43			R$ 2.957,69	R$ 11.024,12	1,000912	1,00219317
2	R$ 1.405,51	R$ 733,31	R$ 7.333,12	R$ 403,32	R$ 672,20	R$ 2.688,81	R$ 10.021,93		
22/12/2004			R$ 7.347,98			R$ 2.694,26	R$ 10.042,24	1,002026	1,00422361
3	R$ 1.371,62	R$ 734,80	R$ 6.613,18	R$ 367,40	R$ 636,82	R$ 2.424,83	R$ 9.038,01		
22/01/2005			R$ 6.630,04			R$ 2.431,01	R$ 9.061,05	1,002549	1,00678338
4	R$ 1.338,29	R$ 736,67	R$ 5.893,37	R$ 331,50	R$ 601,61	R$ 2.160,90	R$ 8.054,27		
22/02/2005			R$ 5.901,90			R$ 2.164,03	R$ 8.065,93	1,001448	1,00824120
5	R$ 1.303,34	R$ 737,74	R$ 5.164,16	R$ 295,09	R$ 565,60	R$ 1.893,53	R$ 7.057,69		
22/03/2005			R$ 5.174,26			R$ 1.897,23	R$ 7.071,49	1,001956	1,01021332
6	R$ 1.268,93	R$ 739,18	R$ 4.435,08	R$ 258,71	R$ 529,75	R$ 1.626,20	R$ 6.061,28		
22/04/2005			R$ 4.445,71			R$ 1.630,10	R$ 6.075,81	1,002397	1,01263480
7	R$ 1.234,92	R$ 740,95	R$ 3.704,76	R$ 222,29	R$ 493,97	R$ 1.358,41	R$ 5.063,17		
22/05/2005			R$ 3.713,98			R$ 1.361,79	R$ 5.075,77	1,002487	1,01515322
8	R$ 1.200,85	R$ 742,80	R$ 2.971,18	R$ 185,70	R$ 458,06	R$ 1.089,43	R$ 4.060,61		
22/06/2005			R$ 2.978,85			R$ 1.092,25	R$ 4.071,10	1,002582	1,01777435
9	R$ 1.166,72	R$ 744,71	R$ 2.234,14	R$ 148,94	R$ 422,00	R$ 819,18	R$ 3.053,32		
22/07/2005			R$ 2.240,88			R$ 821,66	R$ 3.062,53	1,003017	1,02084497
10	R$ 1.132,89	R$ 746,96	R$ 1.493,92	R$ 112,04	R$ 385,93	R$ 547,77	R$ 2.041,69		
22/08/2005			R$ 1.497,76			R$ 549,18	R$ 2.046,94	1,002570	1,02346855
11	R$ 1.098,36	R$ 748,88	R$ 748,88	R$ 74,89	R$ 349,48	R$ 274,59	R$ 1.023,47		
22/09/2005			R$ 751,12			R$ 275,41	R$ 1.026,53	1,002994	1,02653281
12	R$ 1.064,09	R$ 751,12	R$ (0,00)	R$ 37,56	R$ 312,97	R$ -	R$ (0,00)		

Figura 15: Exemplo de planilha de evolução de saldos devedores com correção monetária: SAC-JS.

do financiamento em relação à sua evolução "teórica" que precisam ser tratados de forma correta, tanto quando se trata de desvios a favor do credor, principalmente em função de atrasos no pagamento, como quando se trata de desvios a favor do devedor, provindos de cobranças excessivas, seja pelo cálculo do valor da parcela usando juros compostos em vez de juros simples, seja pela inclusão de encargos não permitidos pela legislação vigente.

O método mais simples e eficiente para lidar com tais desvios é incluí-los no saldo, o que significa que a partir do período seguinte, eles geram juros. No regime de juros simples, o princípio correspondente deve ser de incluí-los no saldo capitalizável e os juros que geram – como todo e qualquer tipo de juros – no saldo não capitalizável. Nos planos de amortização mais comuns e mais simples (que são o SPC e o SAC discutidos neste trabalho, sem correção monetária), onde é fácil calcular os valores das prestações devidas em cada instante, o método mais adequado é exibir, na coluna entitulada "saldo capitalizável", apenas as diferenças entre as prestações efetivamente pagas e as prestações devidas, em ordem cronológica segundo as respectivas datas de pagamento ou vencimento, e na coluna entituada "saldo não capitalizável", apenas os juros acumulados em função destas diferenças. Assim, a primeira destas colunas evidencia a *oscilação da evolução do financiamento em torno da meta*. Ademais, desta forma, é possível incorporar multas e juros de mora, em cada data de vencimento. Segundo o código de defesa do consumidor, o valor da multa deve ser de, no máximo, 2% sobre o mínimo entre (a) o saldo (total), caso este for negativo, e (b) a diferença entre valor do pagamento efetuado e valor da prestação devida, caso esta for negativa, ambos na data de vencimento anterior, devendo ser incluído no saldo capitalizável, enquanto que o valor dos juros de mora deve ser de, no máximo, 1% sobre o saldo (capitalizável) na data de vencimento anterior, caso este for negativo, devendo ser incluído no saldo não capitalizável. Somam-se a isso ainda os juros sobre o saldo capitalizável, calculados por multiplicação pela taxa de juros i pactuada no contrato, que também devem ser incluídos no saldo não capitalizável. Prosseguindo assim, passo a passo, apura-se o saldo capitalizável e o saldo não capitalizável, a favor do devedor quando forem positivos e do credor quando forem negativos, representando o estado "real" do contrato em relação ao seu estado "teórico", no momento da análise.

A título de exemplo, mostramos na Figura 16 uma planilha que resulta da planilha da Figura 11 quando o devedor pagou, ao invés do valor devido que consta da coluna B da Figura 11, o valor que consta da coluna B da Figura 10, mas atrasou o pagamento da sexta parcela e deixou de pagar a última parcela; mesmo assim, permaneceu com um saldo positivo de $119,14$ R$ no final do contrato.

PLANILHA DE EVOLUÇÃO DE SALDO DE CONTRATO DE FINANCIAMENTO
VALOR FINANCIADO: R$ 12.000,00, PRAZO: 12 MÊSES

TAXA DE JUROS	5,00%

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
NO PR	DATA DO VENCIMENTO	VALOR DEVIDO	DATA DO PAGAMENTO	VALOR PAGO	SALDO CAPITALIZÁVEL	MULTA 2%	JUROS REMUNER	JUROS DE MORA 1%	SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL	SALDO TOTAL
1	22/10/2004	R$ 1.254,90	22/10/2004	R$ 1.353,90	99,00	0,00	0,00	0,00	0,00	99,00
2	22/11/2004	R$ 1.254,90	22/11/2004	R$ 1.353,90	198,00	0,00	4,95	0,00	4,95	202,95
3	22/12/2004	R$ 1.254,90	22/12/2004	R$ 1.353,90	297,00	0,00	9,90	0,00	14,85	311,85
4	22/01/2005	R$ 1.254,90	24/01/2005	R$ 1.353,90	396,00	0,00	14,85	0,00	29,70	425,70
5	22/02/2005	R$ 1.254,90	22/02/2005	R$ 1.353,90	495,00	0,00	19,80	0,00	49,50	544,50
6	22/03/2005	R$ 1.254,90			-759,90	0,00	24,75	0,00	74,25	-685,65
			02/04/2005	R$ 1.394,52	634,62					
7	22/04/2005	R$ 1.254,90	22/04/2005	R$ 1.353,90	719,91	-13,71	-38,00	-7,60	28,66	748,56
8	22/05/2005	R$ 1.254,90	22/05/2005	R$ 1.353,90	818,91	0,00	36,00	0,00	64,65	883,56
9	22/06/2005	R$ 1.254,90	22/06/2005	R$ 1.353,90	917,91	0,00	40,95	0,00	105,60	1.023,50
10	22/07/2005	R$ 1.254,90	22/07/2005	R$ 1.353,90	1.016,91	0,00	45,90	0,00	151,49	1.168,40
11	22/08/2005	R$ 1.254,90	22/08/2005	R$ 1.353,90	1.115,91	0,00	50,85	0,00	202,34	1.318,24
12	22/09/2005	R$ 1.254,90			-138,99	0,00	55,80	0,00	258,13	119,14

Figura 16: Exemplo de planilha de evolução real de saldos devedores.

Obviamente, este esquema pode ainda ser estendido de tal forma a também incorporar correção monetária, conforme o princípio explicado na seção anterior, e pode ser adaptado a incorporar outras regras, conforme mandam a legislação e normas emitidas pelo Banco Central, por exemplo.

6 Demonstrativos de evolução de financiamento

Tendo em vista a importância da nova metodologia para o funcionamento de sistemas de amortização de crédito dentro do regime de juros simples, apresentamos a seguir um roteiro para a construção de um demonstrativo de evolução "teórica" de financiamento neste âmbito que funciona para qualquer sistema de amortização e ainda pode ser adaptado para acomodar correção monetária e pagamentos irregulares.

6.1 As principais novidades

O novo tipo de demonstrativo se caracteriza por dois ingredientes que não existem na versão tradicional:

1. a subdivisão do saldo devedor em uma parte chamada de *saldo capitalizável* e uma parte chamada de *saldo não capitalizável*, mantendo-se o *saldo total* como a soma dos dois;

2. a introdução do *fator de ponderação* f, um número entre 0 e 1 que desempenha um papel central no esquema e é fixado no início do contrato, uma vez por todas, não podendo ser alterado de forma alguma, e de tal modo a garantir o cumprimento da meta do equilíbrio das contas – ou seja, a condição de que ambos os saldos estejam zerados – no final do contrato,
$$S_n^C \;=\; 0 \quad , \quad S_0^N \;=\; 0 \;.$$
em conjunto com a condição de igualdade do valor futuro do capital inicial e da soma de todas as prestações, no regime de capitalização simples, conforme expressa pela equação
$$C\left(1+in\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} P_k \left(1+i(n-k)\right) \;.$$
Usando este critério, o fator de ponderação é completamente determinado pelo plano de amortização escolhido, através de uma fórmula explícita, dependendo apenas da taxa de juros i e do prazo n, mas não do capital inicial C.

6.2 A lei de evolução

As regras básicas que constituem o roteiro para construir demonstrativos da evolução "teórica" do financiamento, passo a passo, são as seguintes.

1. Como condição inicial, usa-se o fator de ponderação f para dividir o saldo total S_0, que é igual ao capital C emprestado, em uma parte capitalizável S_0^C e uma parte não capitalizável S_0^N, conforme a seguinte regra:
$$S_0^C \;=\; Cf \quad , \quad S_0^N \;=\; C(1-f) \;.$$

2. A amortização do saldo capitalizável acontece em passos constantes, iguais entre eles, reservando-se para tanto uma parte fixa P^C de cada prestação P_k:

$$S_{k-1}^C - S_k^C \;=\; A^C \;=\; P^C \;=\; \frac{C}{n}\,f \quad\Longrightarrow\quad S_k^C \;=\; C\,\frac{n-k}{n}\,f\;.$$

3. A amortização do saldo não capitalizável acontece de forma variável, destinando-se a parte remanescente $P_k^N = P_k - P^C$ de cada prestação P_k a esta amortização e ao pagamento dos juros:

$$S_{k-1}^N - S_k^N \;=\; A_k^N \;=\; P_k^N - J_k\;.$$

4. A cada passo, os juros incidem apenas sobre o saldo capitalizável imediatamente anterior e, conforme já mendionado no item anterior, são incluídos apenas no saldo não capitalizável:

$$J_k \;=\; iS_{k-1}^C \;=\; C\,i\,\frac{n-k+1}{n}\,f\;.$$

Com essa prescrição, quebra-se a “retroação” dos juros no saldo que gera outros juros, ou seja, elimina-se o anatocismo, e se o fator f for corretamente escolhido, o resultado será que no final do contrato, ambos os saldos serão zerados!

Para a construção de demonstrativos da evolução “real” do financiamento, procede-se da forma indicada nas duas seções anteriores.

7 Conclusões

Inicialmente, demonstramos neste trabalho, com rigor matemático, que a metodologia usual e atualmente praticada pelas instituições financeiras no Brasil na administração de créditos, que consiste em utilizar as prestações para primeiro pagar os juros e depois aproveitar apenas o restante para a amortização do crédito original, implica, necessaria e inevitavelmente, em capitalização de juros, ainda que de forma camuflada. Portanto, o fato de que este procedimento é tolerado pelos tribunais, apesar da proibição da capitalização de juros, configura uma das grandes contradições na jurisprudência sobre o assunto no Brasil.

Como ponto central do trabalho, apresentamos uma nova metodologia que permite evitar este problema e fazer com que finalmente se cumpra a lei. A ideia básica é usar dois tipos de saldo devedor, um capitalizável e um não capitalizável, sendo que juros incidem apenas sobre o primeiro e são creditados ou debitados apenas no segundo. Sistemas de amortização de crédito como o método de Gauss e o SAC a juros simples se enquadram naturalmente nesta abordagem e assim recebem um novo e mais sólido fundamento teórico. Ademais, este fundamento é formulado em termos de um algoritmo iterativo, o qual permite não apenas formular planos idealizados que, na realidade, servem mais como "metas de pagamento" – de modo semelhante à estrategia das metas de inflação – do que como esquemas rígidos, mas também é capaz de acomodar e tratar os inevitáveis desvios destas metas.

Finalmente, é claro que uma adoção generalizada de um regime de juros simples para crédito, apesar de ser exigida por preceitos legais, deve ser implementada com muita cautela, devido ao seu profundo impacto na economia. Porém, é fácil prever que a médio e longo prazo, tal transição trará importantes benefícios para a sociedade em geral, entre eles uma redução significativa dos custos do crédito para contratos de longa duração, uma redução não menos significativa da inadimplência, em particular a eliminação da distorção sistêmica e moralmente inaceitável da possibilidade da "dívida eterna" e, finalmente, uma maior estabilidade do sistema financeiro como um todo: um sistema que não permite explosões incontroláveis de dívidas certamente trará mais estabilidade do que alguns dos atuais mecanismos que permitem a formação de bolhas especulativas, cujas graves consequências o mundo acabou de vivenciar.[6] O presente trabalho foi desenvolvido com este intuito, visando providenciar ferramentas para os profissionais da área para lidar com o desafio de alcançar o equilíbrio.

Referências

[1] José Vieira Dutra Sobrinho: *Matemática Financeira*, 7ª edição, Editora Atlas, São Paulo 2008.

[2] Frank Michael Forger: *Algoritmos para o Sistema Crescente de Amortização (SACRE)*, em preparação.

[3] José Jorge Meschiatti Nogueira: *Tabela Price – Mitos e Paradigmas*, 2ª edição, Editora Millennium, Campinas 2008.

[4] Edson Rovina: *Uma Nova Visão da Matemática Financeira*, Editora Millennium, Campinas 2009.

[6]Nota-se que a crise atual iniciou-se nos EUA, justamente no setor imobiliário, que é caracterizado pelos financiamentos de mais longa duração, tendo sido desencadeada por um leve aumento da taxa de juros que, no entanto, acarretou um aumento brusco da inadimplência. Trata-se de uma lição exemplar não apenas sobre os riscos de uma alavancagem excessiva, mas também sobre a inerente instabilidade do regime de juros compostos em financiamentos a longo prazo.