# Algoritmos para o Sistema de Amortização Crescente (SACRE)*

Frank Michael Forger †

Departamento de Matemática Aplicada,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66281,
BR–05315-970 São Paulo, S.P., Brasil

**Resumo**

Neste trabalho, estabelecemos a base matemática do sistema de amortização crescente (SACRE), que é amplamente utilizado no financiamento imobiliário no Brasil, mas que há décadas vem sendo aplicado de forma incoerente e, a rigor, incorreta, por falta de uma fundamentação matemática adequada. Formulamos este sistema não apenas no regime de juros compostos, mas também no regime de juros simples. Isso requer a utilização de uma nova metodologia, introduzida em um trabalho anterior [1], que é baseada na subdivisão do saldo devedor em dois sub-saldos: um saldo capitalizável e um saldo não capitalizável, sendo que os juros devidos na data de vencimento de cada parcela incidem sobre o saldo capitalizável da data de vencimento da parcela imediatamente anterior, mas são incluídos no saldo não capitalizável, sobre o qual não incide juro nenhum. As fórmulas para os valores das prestações são novas, e demonstra-se que elas satisfazem a condição de equilíbrio, a qual exige que o(s) saldo(s) devedor(es) deve(m) ser zerado(s) no final do contrato. Como no caso dos sistemas de prestação constante (tabela Price / método de Gauss) e de amortização constante (SAC), o esquema permite incorporar, sem dificuldade alguma, correção monetária e desvios do roteiro previamente traçado ocasionados por atrasos de pagamentos.

Universidade de São Paulo
RT-MAP-1001
Abril de 2010

---

*Trabalho registrado junto à Fundação Biblioteca Nacional sob no. 518.006.
†E-mail: forger@ime.usp.br

# 1 Introdução

No mercado de crédito ao consumidor no Brasil, com pagamento em parcelas, existem hoje vários *sistemas de amortização* que proporcionam o arcabouço matemático para calcular as prestações e demonstrar a evolução do financiamento ao longo do tempo. O mais conhecido entre eles é sem dúvida a "tabela Price", mas há vários outros, tais como o "SAC", por exemplo.[1] Grosso modo, eles podem ser classificados como

- sistemas de prestação constante (SPCs);
- sistemas de amortização constante (SACs);
- sistemas de amortização mista (SAMs) ou crescente (SACREs).

Aqui, usamos o plural porque cada um deles, assim como qualquer outro, vem em duas versões, dependendo do regime de juros empregado: juros compostos, com a capitalização de juros embutida, e juros simples, onde não há capitalização de juros. Em particular, o sistema de prestação constante a juros compostos é exatamente a "tabela Price", enquanto que o sistema de prestação constante a juros simples é conhecido como "método de Gauss":

- SPC-JC = tabela Price;
- SPC-JS = método de Gauss.

Ressalta-se que na literatura padrão de matemática financeira, o assunto é desenvolvido quase que exclusivamente com base na capitalização composta: há uma escassez notável de trabalhos sobre os esquemas correspondentes com capitalização simples, com algumas poucas exceções recentes [1–3].

No caso dos SPCs e SACs, a matemática já se encontra consolidada e razoavelmente bem documentada, em ambos os regimes de juros. Em particular, em um trabalho recente deste autor [1], foi desenvolvida uma nova metodologia para a demonstração da evolução do financiamento quando se adota o regime de juros simples, expurgando a capitalização de juros, com validade comprovada, matematicamente, no âmbito dos SPCs e dos SACs.

Infelizmente, o mesmo não vale para o SACRE, *nem sequer no âmbito do regime de juros compostos*!

O SACRE é um sistema híbrido entre o SPC e o SAC, amplamento utilizado no SFH (sistema financeiro de habitação), ou seja, em contratos para a aquisição de imóveis que, naturalmente, são de longa duração – tipicamente entre 10 e 20 anos. A ideia básica é atraente: o prazo total do financiamento é dividido em um certo número de subperíodos iguais e a prestação é mantida constante durante cada um deles, como no SPC, mas decresce linearmente, em passos iguais, quando se passa de qualquer um deles ao próximo,

[1] O rótulo "tabela Price", amplamente utilizado no Brasil, é quase que desconhecido no mercado internacional, onde este sistema é conhecido como "sistema francês de amortização" e o SAC como "sistema italiano de amortização".

como no SAC.[2] Assim, combinam-se as principais vantagens do SAC em relação ao SPC – a saber: (i) prestações inicialmente mais altas, mas decrescentes ao longo do tempo (em conformidade com o fator psicológico de que todo ser humano tem a tendência de estar disposto a pagar um valor maior para um bem novo do que para um bem que já possui há anos) e (ii) uma redução significativa do valor total a ser pago – com a principal vantagem do SPC – a saber: uma prestação constante ao longo do tempo, o que para o leigo facilita o planejamento do orçamento. O decréscimo das prestações que é típico do SAC ocorre apenas em ritmo anual, agradando o mutuário que vê sua prestação cair, ao contrário dos aumentos anuais de preços e custos, mas também de salários.

Sendo assim, e tendo em vista a importância do SACRE na prática, uma vez que a Caixa Econômica Federal, como a instituição financeira líder neste segmento, dispõe de uma carteira de milhões de contratos baseados no SACRE, e todos de valores altos, seria de se esperar que este sistema seja baseado em uma modelagem matemática adequada. Infelizmente, não é isso que ocorre – muito pelo contrário! Pois quando perguntamos qual é o método empregado pelas instituições financeiras para determinar as prestações neste sistema, deparamo-nos com o seguinte algoritmo: a primeira prestação é calculada simplesmente pela mesma fórmula do SAC, porém é mantida constante durante um ano, e as prestações nos anos seguintes são calculadas, mais uma vez, pela mesma fórmula do SAC, só que aplicada ao saldo devedor constatado no final do ano anterior e com o prazo remanescente. É fácil ver que *este procedimento simplista é matematicamente inconsistente, ferindo o princípio mais importante da matemática financeira para o cálculo das prestações em qualquer sistema de amortização: o preceito do equilíbrio das contas no final do contrato*, segundo o qual as prestações devem ser calculadas de tal forma que o saldo devedor esteja zerado no final do contrato. De fato, basta inspecionar a planilha de evolução de financiamento de qualquer contrato baseado neste sistema para ver que a conta nunca fecha: no final, sempre aparece um saldo remanescente a favor do mutuário que requer um reajuste manual, através de uma redução no valor da última parcela. (A título de exemplo, veja a planilha na Figura 12 abaixo.) Por este motivo, chamaremos esse algoritmo de *SACRE falso*. É verdade que a correção a ser efetuada no final é de menor porte, mas segundo os princípios da matemática financeira – os únicos que protegem o devedor da arbitrariedade total por parte do credor na hora de se calcular as prestações – não deveria haver correção nenhuma: a sua mera presença assinala um defeito estrutural na metodologia adotada, configurando uma *gritante falta de profissionalismo* por parte das instituições financeiras que utilizam o SACRE.

O que é mais grave ainda é que *a metodologia acima descrita implica, automatica e inevitavelmente, e de forma camuflada, em capitalização dos juros*: isso ocorre na medida em que, no cômputo das prestações, utiliza-se o saldo devedor no final do ano anterior, no qual foram incluídos os juros pagos nos anos anteriores. (Veja o Teorema 1 em [1].) Assim, o método é totalmente inadequado para construir um SACRE a juros simples.

[2]Obviamente, nos contratos de financiamento de imóveis, temos subperíodos de um ano, mas em princípio, o sistema pode ser adaptado a outros subperíodos (por exemplo, semestres, trimestres ou quadrimestres) para contemplar outras finalidades.

E como se tudo isso não bastasse, ainda se comete outra atrocidade contra as leis da matemática financeira, que são as mesmas que as do bom senso: no que diz respeito à correção monetária, permite-se que o saldo devedor seja reajustado mensalmente, enquanto que a prestação é reajustada apenas anualmente. Não se precisa de nenhum conhecimento de matemática para concluir que tal regra desequilibra qualquer contrato, e de forma imprevisível, pois o índice de reajuste (não importa se for a TR ou qualquer outro) é apenas conhecido “a posteriori”.

A meta deste trabalho é remediar essa situação e construir um SACRE livre de todos esses defeitos e ainda em duas versões: uma para o regime de juros compostos e uma para o regime de juros simples. Como veremos, este sistema é bastante geral, pois inclui como casos especiais tanto o SPC como o SAC!

## 2 Cálculo das prestações

Como já foi mencionado, todo e qualquer cálculo em sistemas de amortização de crédito deve ser baseado no preceito do **equilíbrio das contas no final do contrato**: ele exige que o capital inicial $C$, devidamente capitalizado, deve ser igual à soma de todas as prestações, cada uma também devidamente capitalizada, e pela mesma regra. Quando o contrato prevê a devolução do empréstimo em uma série uniforme de $n$ prestações consecutivas, mesmo que não sejam iguais, temos que $C$ capitaliza durante $n$ períodos, enquanto que a primeira prestação $P_1$ capitaliza durante $n-1$ períodos, a segunda prestação $P_2$ capitaliza durante $n-2$ períodos, e assim em diante, até a penúltima prestação $P_{n-1}$, que capitaliza durante apenas 1 período, e a última prestação $P_n$, que não capitaliza. Assim, a referida condição de equilíbrio assume a seguinte forma [1]:

- No regime de juros compostos,

$$C\,(1+i)^n \;=\; \sum_{k=1}^{n} P_k\,(1+i)^{n-k} \;. \tag{1}$$

- No regime de juros simples,

$$C\,\big(1+in\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} P_k\,\big(1+i(n-k)\big) \;. \tag{2}$$

No SACRE, dividimos o prazo total do financiamento, que é de $n$ períodos básicos, em $r$ subperíodos iguais, cada um dos quais consiste de $s$ períodos básicos; assim, vale

$$n \;=\; rs \;. \tag{3}$$

Nesta situação, é sempre conveniente decompor o índice $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ que aparece nas somas acima, e nas a seguir, conforme o algoritmo euclideano:

$$k \;=\; (p-1)\,s+q \quad (1 \leqslant p \leqslant r,\, 1 \leqslant q \leqslant s) \;. \tag{4}$$

Obviamente, no sistema de financiamento habitacional, o período básico é de um mês e o subperíodo é de um ano, de modo que $s = 12$; então $n$ representa o prazo total do financiamento em meses enquanto que $r$ representa o mesmo prazo total do financiamento em anos. Mas podemos ainda recuperar o SPC pondo $r = 1$, $s = n$ e o SAC pondo $r = n$, $s = 1$.

O preceito fundamental que caracteriza o sistema de amortização chamado de SACRE é que as prestações (i) sejam constantes durante cada subperíodo e (ii) decresçam linearmente, em passos iguais, quando se passa de qualquer um deles ao próximo. A primeira condição significa que $P_{(p-1)s+q}$ depende apenas de $p$ e não de $q$, de modo que podemos simplificar a notação, escrevendo

$$P_{(p-1)s+q} \;=\; P'_p \,,$$

ou mais explicitamente,

$$P_{(p-1)s+1} = \ldots = P_{ps} \;=\; P'_p \,.$$

A segunda condição significa então que

$$P_{(p-1)s+q} \;=\; P'_p \;=\; R'_0(r-p+1) + P'_0 \,, \tag{5}$$

com apenas duas constantes $R'_0$ e $P'_0$, que precisam ser escolhidas de acordo com o princípio do equilíbrio das contas no final do contrato, sendo que a primeira delas é chamada de *razão de decréscimo*. Claramente, os valores destas constantes dependerão fortemente do regime de juros aplicado.

### 2.1 SACRE a juros compostos

Reescrevendo a somatória sobre $k$ na equação (1) como soma dupla sobre $p$ e $q$, podemos usar a *primeira fórmula binomial*

$$\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} \;\equiv\; x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \;=\; \frac{x^n - 1}{x - 1} \,, \tag{6}$$

(válida para $x \neq 1$ e facilmente provada multiplicando os dois lados por $x - 1$), com $x = 1 + i$, para executar a soma sobre $q$:

$$\begin{aligned} C\,(1+i)^n \;&=\; \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s} P_{(p-1)s+q}\,(1+i)^{rs-(p-1)s-q} \\ &=\; \sum_{p=1}^{r} P'_p\,(1+i)^{(r-p)s}\,\sum_{q=1}^{s}(1+i)^{s-q} \\ &=\; \frac{(1+i)^s - 1}{i}\,\sum_{p=1}^{r} P'_p\,\big((1+i)^s\big)^{r-p} \end{aligned}$$

Inserindo a equação (5) e aplicando novamente a mesma fórmula, em conjunto com a *segunda fórmula binomial*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\,x^{n-k} &\equiv nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+2x+1\\ &= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(x-1)^2} = \frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}\end{aligned} \tag{7}$$

(válida para $x \neq 1$, que segue da primeira, com $n$ substituído por $n+1$, tomando a derivada em relação a $x$), com $x = (1+i)^s$, obtemos

$$\begin{aligned}C\,(1+i)^{rs} &= \frac{(1+i)^s-1}{i}\left\{R_0'\sum_{p=1}^{r}(r-p+1)\big((1+i)^s\big)^{r-p} + P_0'\sum_{p=1}^{r}\big((1+i)^s\big)^{r-p}\right\}\\ &= \frac{1}{i}\left\{R_0'\,r(1+i)^{rs} - R_0'\,\frac{(1+i)^{rs}-1}{(1+i)^s-1} + P_0'\,((1+i)^{rs}-1)\right\},\end{aligned}$$

com solução óbvia

$$P_0' = \frac{C}{r}\,\frac{i}{(1+i)^s-1} \quad , \quad R_0' = \frac{C}{r}\,i\,.$$

Assim, chegamos ao resultado:

$$P_{(p-1)s+q} = P_p' = \frac{C}{r}\,i\left((r-p+1) + \frac{1}{(1+i)^s-1}\right). \tag{8}$$

Note que esta fórmula inclui como casos especiais a da prestação do SPC a juros compostos (tabela Price) quando $r = p = 1$, $s = n$, $q = k$ e também a prestação do SAC a juros compostos quando $r = n$, $p = k$, $s = q = 1$.

## 2.2 SACRE a juros simples

Reescrevendo a somatória sobre $k$ na equação (2) como soma dupla sobre $p$ e $q$, podemos usar a *primeira fórmula de Gauss*

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k) \equiv (n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}\,, \tag{9}$$

para executar a soma sobre $q$:

$$\begin{aligned}C\,(1+in) &= \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s}P_{(p-1)s+q}\big(1+i(rs-(p-1)s-q)\big)\\ &= \sum_{p=1}^{r}P_p'\sum_{q=1}^{s}\big(1+is(r-p)+i(s-q)\big)\\ &= s\sum_{p=1}^{r}P_p'\big(1+is(r-p)+i(s-1)/2\big)\,.\end{aligned}$$

Inserindo a equação (5) e aplicando novamente a mesma fórmula, em conjunto com a *segunda fórmula de Gauss*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(n-k) \;&\equiv\; n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 3{\cdot}2 + 2{\cdot}1 \\ &=\; \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \;, \end{aligned} \tag{10}$$

obtemos

$$\begin{aligned} C\,(1+irs) \;=\;& R_0'\,is^2 \sum_{p=1}^{r} (r-p+1)(r-p) \;+\; R_0'\,s\,\big(1+i(s-1)/2\big) \sum_{p=1}^{r} (r-p+1) \\ &+\; P_0'\,is^2 \sum_{p=1}^{r} (r-p) \;+\; P_0'\,s\,\big(1+i(s-1)/2\big)\,r \\ =\;& iR_0'\,(r+1)r(r-1)s^2/3 \;+\; R_0'\,(r+1)rs\,\big(1+i(s-1)/2\big)/2 \\ &+\; iP_0'\,r(r-1)s^2/2 \;+\; P_0'\,rs\,\big(1+i(s-1)/2\big) \;. \end{aligned}$$

Aqui, a solução está longe de ser óbvia, mas podemos chegar nela considerando a expansão de Taylor em $i$ dos coeficientes $P_0'$ e $R_0'$. Primeiro, ambos são obviamente proporcionais a $C/n$, e quando $i = 0$ (juro zero), temos que $P_0'$ é igual à prestação ideal $C/n$ enquanto que $R_0'$ se anula. Isso constitui parte da motivação que nos leva a introduzir um novo coeficiente $f$ tal que

$$P_0' \;=\; \frac{C}{n}\big(1 - if(s-1)/2\big) \quad , \quad R_0' \;=\; \frac{C}{n}\,ifs \;, \tag{11}$$

em termos do qual a equação anterior, após cancelamento de um termo $C$ seguida pela divisão por um fator $Ci$, assume a forma

$$\begin{aligned} rs \;=\;& if(r+1)(r-1)s^2/3 \;+\; f(r+1)s\,\big(1+i(s-1)/2\big)/2 \\ &+\; (r-1)s/2 \;-\; if(r-1)s(s-1)/4 \;+\; (s-1)/2 \;-\; f(s-1)\big(1+i(s-1)/2\big)/2 \;, \end{aligned}$$

ou após rearranjo dos termos e multiplicação por 12,

$$\begin{aligned} 6(1-f)(n+1) \;&=\; 6(1-f)(1+rs) \\ &=\; if\,\Big(4(r+1)(r-1)s^2 \;+\; 3(r+1)s(s-1) \;-\; 3(r-1)s(s-1) \;-\; 3(s-1)^2\Big) \\ &=\; if\,\Big(4r^2s^2 - 4s^2 + 6s(s-1) - 3s^2 + 6s - 3\Big) \\ &=\; if\,\Big(4n^2 - s^2 - 3\Big) \;, \end{aligned}$$

com solução

$$f = \frac{1}{1 + i\,\dfrac{4n^2 - s^2 - 3}{6(n+1)}} \,. \tag{12}$$

Assim, chegamos ao resultado:

$$P_{(p-1)s+q} = P'_p = \frac{C}{n}\left(1 - \frac{i(s-1)/2}{1 + i\,\dfrac{4n^2 - s^2 - 3}{6(n+1)}} + \frac{is(r-p+1)}{1 + i\,\dfrac{4n^2 - s^2 - 3}{6(n+1)}}\right) \tag{13}$$

Note que esta fórmula inclui como casos especiais a da prestação do SPC a juros simples (método de Gauss) quando $r = p = 1$, $s = n$, $q = k$ e também a prestação do SAC a juros simples quando $r = n$, $p = k$, $s = q = 1$.

Finalmente, devemos observar que as equações (8) e (13) não são as únicas soluções das respectivas condições de equilíbrio (1) e (2): afinal, essa constitui apenas uma equação, enquanto que a equação (5) contém dois parâmetros livres, de modo que não há como se pode esperar unicidade da solução. Na próxima seção, aprofundaremos nossa argumentação para demonstrar que as fórmulas acima são realmente as corretas.

# 3 Evolução do financiamento no SACRE

Nesta seção, apresentamos a metodologia para construir planilhas de evolução do financiamento de um contrato no SACRE. No caso do SACRE a juros compostos, o procedimento é o tradicional, mas para tratar do SACRE a juros simples, é imprescindível aplicar a metodologia desenvolvida na Ref. [1], baseada na subdivisão de prestação, saldo e amortização em uma parte capitalizável e uma parte não capitalizável.

Começamos por recordar os algoritmos iterativos para a atualização do saldo devedor conforme apresentados na Ref. [1], que são gerais no sentido de se aplicarem a séries de pagamentos uniformes no tempo mas com valores arbitrários, de modo que valem para *qualquer* sistema de amortização. Inicialmente, fixamos a notação: denotaremos

- por $C$ o **capital inicial** ou **valor** do financiamento;
- por $n$ o número total de parcelas que representa o **prazo** total do financiamento;
- por $i$ a **taxa de juros** por período básico convencionada;
- por $P_0$ a **prestação ideal** ou **prestação sem juros**, $P_0 = C/n$;

e ainda, para $1 \leqslant k \leqslant n$,

- por $P_k$ o valor da $k$-ésima **prestação** ou **parcela**, que para tratar do regime de juros simples deve ser dividida em duas partes: a **parte da prestação destinada à amortização do saldo devedor capitalizável**, $P_k^C$, e a **parte da prestação destinada à amortização do saldo devedor não capitalizável e ao pagamento dos juros**, $P_k^N$,
$$P_k \;=\; P_k^C + P_k^N \;; \tag{14}$$

- por $S_k$ o **saldo devedor** após $k$ períodos básicos, i.e., após pagamento da prestação $P_k$, que para tratar do regime de juros simples deve ser dividido em duas partes: o **saldo devedor capitalizável** $S_k^C$ e o **saldo devedor não capitalizável** $S_k^N$,
$$S_k \;=\; S_k^C + S_k^N \;; \tag{15}$$

- por $A_k$ a **amortização** do saldo devedor que resulta do pagamento da prestação $P_k$, que para tratar do regime de juros simples deve ser dividida em duas partes: a **amortização do saldo devedor capitalizável** $A_k^C$ e a **amortização do saldo devedor não capitalizável** $A_k^N$,
$$A_k \;=\; A_k^C + A_k^N \;; \tag{16}$$

- e, finalmente, por $J_k$ o valor dos **juros** vencidos após $k$ períodos básicos.

Obviamente, pela definição da palavra “amortização”, temos
$$A_k \;=\; S_{k-1} - S_k \;, \tag{17}$$
e de modo semelhante, no regime de juros simples,
$$A_k^C \;=\; S_{k-1}^C - S_k^C \quad , \quad A_k^N \;=\; S_{k-1}^N - S_k^N \;. \tag{18}$$
Ainda estendemos a definição de $S_k$, $S_k^C$ e $S_k^N$ ao caso $k = 0$, o que fixa a *condição inicial* e evita a necessidade de fazer distinções de casos em algumas das fórmulas a seguir. Soma-se a esta uma *condição final*, que na prática é uma meta para a execução do contrato ao longo de sua duração: trata-se de outra expressão do preceito do **equilíbrio das contas no final do contrato**, estipulando que no momento do encerramento do contrato, i.e., após pagamento da $n$-ésima e última prestação, todos os saldos devedores devem estar zerados:
$$S_n \;=\; 0 \quad , \quad S_n^C \;=\; 0 \quad , \quad S_n^N \;=\; 0 \;. \tag{19}$$
Isso posto, podemos resumir o algoritmo de cada um dos dois regimes de juros da seguinte forma:

- O regime de juros compostos é regido pelo **critério exponencial de apropriação**: o valor dos juros em cada passo é calculado multiplicando o saldo devedor do passo imediatamente anterior pela taxa de juros e é acrescido ao saldo devedor, deduzindo-se em seguida o valor da prestação para fins de amortização. Formalmente, essa prescrição está contida na equação (17) em conjunto com as equações

$$P_k \;=\; A_k + J_k \;, \tag{20}$$

e

$$J_k \;=\; i S_{k-1} \;, \tag{21}$$

que ainda devem ser completadas pela condição inicial

$$S_0 \;=\; C \;. \tag{22}$$

- O regime de juros simples é regido pelo **critério linear de apropriação**: o valor dos juros em cada passo é calculado multiplicando o saldo devedor capitalizável do passo imediatamente anterior pela taxa de juros e é acrescido ao saldo devedor não capitalizável correspondente, deduzindo-se em seguida o valor de cada uma das duas partes da prestação do correspondente saldo devedor para fins de amortização. Formalmente, essa prescrição está contida na equação (18) em conjunto com as equações

$$P_k^C \;=\; A_k^C \quad , \quad P_k^N \;=\; A_k^N + J_k \;, \tag{23}$$

e

$$J_k \;=\; i S_{k-1}^C \;, \tag{24}$$

que ainda devem ser completadas pela condição inicial

$$S_0^C \;=\; Cf \quad , \quad S_0^N \;=\; C(1-f) \;, \tag{25}$$

onde $f$ é uma fração (i.e., $0 \leqslant f \leqslant 1$) chamado de **fator de ponderação** que por enquanto será tratado como um parâmetro livre, a ser determinado posteriormente. Define-se ainda a **taxa de juros ponderada** como o produto

$$i_p \;=\; if \;. \tag{26}$$

No caso do SACRE, aplicaremos as decomposições (3) e (4) não apenas às prestações, como na seção anterior, mas também aos saldos, às amortizações e aos juros.

## 3.1 SACRE a juros compostos

Para calcular a evolução do saldo devedor, que segundo o Teorema 1 da Ref. [1] é dada pela fórmula

$$S_k \;=\; C\,(1+i)^k - \sum_{\tilde{k}=1}^{k} P_{\tilde{k}}\,(1+i)^{k-\tilde{k}} \;, \tag{27}$$

precisamos fixar a dependência da prestação e/ou amortização em relação ao tempo, ou seja, à variável $k$. No caso do SACRE, como híbrido entre SPC (prestação constante durante cada subperíodo) e SAC (soma das amortizações em cada subperíodo também constante), as condições pertinentes são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} P_{(p-1)s+q} & \text{depende apenas de } p: & P_{(p-1)s+q} = P'_p \\ \sum_{q=1}^{s} A_{(p-1)s+q} & \text{não depende de } p: & \sum_{q=1}^{s} A_{(p-1)s+q} = A' \end{array} \tag{28}$$

O valor da constante $A'$ que aparece na segunda condição segue diretamente da definição da palavra "amortização" (veja a equação (17)), conforme a qual o saldo devedor no final de cada subperíodo é dado por

$$S_{ps} \;=\; S_0 \,-\, \sum_{\tilde{p}=1}^{p} \sum_{\tilde{q}=1}^{s} A_{(\tilde{p}-1)s+\tilde{q}} \;=\; S_0 \,-\, p\,A' \;,$$

o que, devido à condição inicial (22) e a condição final (19), admite uma única solução:

$$A' \;=\; \frac{C}{r} \quad , \quad S_{ps} \;=\; \frac{C}{r}\,(r-p)\;. \tag{29}$$

Por outro lado, a primeira condição permite reescrever a equação (27) acima como [3]

$$\begin{aligned} S_{(p-1)s+q} \;&=\; C\,(1+i)^{(p-1)s+q} \,-\, \sum_{\tilde{p}=1}^{p-1} \sum_{\tilde{q}=1}^{s} P'_{\tilde{p}}\,(1+i)^{(p-\tilde{p})s+(q-\tilde{q})} \,-\, \sum_{\tilde{q}=1}^{q} P'_p\,(1+i)^{q-\tilde{q}} \\ &=\; C\,(1+i)^{(p-1)s+q} \,-\, \sum_{\tilde{p}=1}^{p-1} P'_{\tilde{p}}\,(1+i)^{(p-\tilde{p}-1)s+q}\,\frac{(1+i)^s-1}{i} \,-\, P'_p\,\frac{(1+i)^q-1}{i}\;, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade foi obtida aplicando a primeira fórmula binomial (6) para executar a soma sobre $\tilde{q}$; em particular, tomando $q=s$, obtém-se para o saldo devedor no final de cada subperíodo,

$$S_{ps} \;=\; C\,(1+i)^{ps} \,-\, \sum_{\tilde{p}=1}^{p} P'_{\tilde{p}}\,(1+i)^{(p-\tilde{p})s}\,\frac{(1+i)^s-1}{i}\;. \tag{30}$$

Subtraíndo esta fórmula, com $p$ substituído por $p-1$, da anterior, vem

$$\begin{aligned} S_{(p-1)s+q} \;&=\; S_{(p-1)s} \,+\, C\,(1+i)^{(p-1)s}\big((1+i)^q-1\big) \\ &\qquad -\, \sum_{\tilde{p}=1}^{p-1} P'_{\tilde{p}}\,(1+i)^{(p-\tilde{p}-1)s}\,\frac{(1+i)^s-1}{i}\,\big((1+i)^q-1\big) \,-\, P'_p\,\frac{(1+i)^q-1}{i} \\ &=\; S_{(p-1)s} \,+\, C\,(1+i)^{(p-1)s}\big((1+i)^q-1\big) \\ &\qquad +\, \big(S_{(p-1)s} \,-\, C\,(1+i)^{(p-1)s}\big)\big((1+i)^q-1\big) \,-\, P'_p\,\frac{(1+i)^q-1}{i}\;, \end{aligned}$$

[3] A soma sobre $\tilde{p}$, de 1 a $p-1$, deve ser entendida como valendo 0 quando $p=1$.

ou seja

$$S_{(p-1)s+q} \;=\; S_{(p-1)s}\,(1+i)^q \;-\; P'_p\,\frac{(1+i)^q-1}{i}\;. \tag{31}$$

Combinando as equações (29) e (30), obtemos

$$S_{ps} \;-\; S_{(p-1)s}\,(1+i)^s \;=\; \frac{C}{r}\Big((r-p+1) \;-\; (r-p+1)(1+i)^s \;-\; 1\Big)\;,$$

da primeira e

$$S_{ps} \;-\; S_{(p-1)s}\,(1+i)^s \;=\; P'_p\,\frac{1-(1+i)^s}{i}$$

da segunda, o que leva imediatamente à equação (8) para as prestações, desta vez sem nenhuma ambiguidade. Finalmente, inserindo este resultado na equação (31), obtemos como resultado final para a evolução do saldo

$$S_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r}\left((r-p+1) \;-\; \frac{(1+i)^q-1}{(1+i)^s-1}\right)\;. \tag{32}$$

Usando as equações (17) e (21), obtemos para a amortização

$$A_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r}\;i\;\frac{(1+i)^{q-1}}{(1+i)^s-1}\;, \tag{33}$$

e para os juros

$$J_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r}\;i\left((r-p+1) \;-\; \frac{(1+i)^{q-1}-1}{(1+i)^s-1}\right)\;. \tag{34}$$

## 3.2 SACRE a juros simples

Novamente, queremos calcular a evolução dos saldos devedores, que segundo o Teorema 2 da Ref. [1] são dadas pelas fórmulas

$$S_k^C \;=\; Cf \;-\; \sum_{l=1}^{k} P_l^C\;. \tag{35}$$

$$S_k^N \;=\; C(1-f) \;-\; i\sum_{l=1}^{k} P_l^C(k-l) \;-\; \sum_{l=1}^{k}(P_l^N - Cif)\;. \tag{36}$$

Para calcular a evolução do saldo devedor capitalizável, usamos a mesma condição que já vale tanto no SPC a juros simples (método de Gauss) como no SAC a juros simples, sendo que no SACRE, que é um sistema híbrido entre SPC e SAC, não pode ser diferente:

$$P_k^C = A_k^C \quad \text{não depende de } k\text{:} \quad P_k^C = P^C = A^C = A_k^C\;. \tag{37}$$

Assim, como sempre, o saldo devedor capitalizável deve diminuir de forma linear, do seu valor inicial $S_0^C = Cf$ ao seu valor final $S_n^C = 0$, em passos iguais de tamanho $P^C = A^C$:

$$P^C \;=\; A^C \;=\; \frac{C}{n}\, f \;, \tag{38}$$

$$S_k^C \;=\; \frac{C}{n}\, f\,(n-k) \;. \tag{39}$$

Usando a equação (24), obtemos para os juros

$$J_k \;=\; \frac{C}{n}\, if\,(n-k+1) \;. \tag{40}$$

Para calcular a evolução do saldo devedor não capitalizável, precisamos fixar a dependência da prestação e/ou amortização não capitalizável em relação ao tempo, ou seja, à variável $k$. No caso do SACRE, como híbrido entre SPC (prestação constante durante cada subperíodo) e SAC (soma das amortizações durante cada subperíodo também constante), as condições pertinentes (que valem igualmente para o valor total e para a parte não capitalizável), são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} P_{(p-1)s+q}^N & \text{depende apenas de } p: & P_{(p-1)s+q}^N = P_p^{N\prime} \\ \displaystyle\sum_{q=1}^{s} A_{(p-1)s+q}^N & \text{não depende de } p: & \displaystyle\sum_{q=1}^{s} A_{(p-1)s+q}^N = A^{N\prime} \end{array} \tag{41}$$

O valor da constante $A^{N\prime}$ que aparece na segunda condição segue diretamente da definição da palavra "amortização" (veja a equação (18)), conforme a qual o saldo devedor não capitalizável no final de cada subperíodo é dado por

$$S_{ps}^N \;=\; S_0^N \,-\, \sum_{\tilde p=1}^{p}\sum_{\tilde q=1}^{s} A_{(\tilde p-1)s+\tilde q}^N \;=\; S_0^N \,-\, p\, A^{N\prime} \;,$$

o que, devido à condição inicial (25) e a condição final (19), admite uma única solução:

$$A^{N\prime} \;=\; \frac{C}{r}\,(1-f) \quad , \quad S_{ps}^N \;=\; \frac{C}{r}\,(1-f)\,(r-p) \;. \tag{42}$$

Reescrevendo a equação (40) na forma

$$J_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\, if\,\big((r-p+1)s-(q-1)\big) \;, \tag{43}$$

podemos então usar a primeira condição para calcular a parte da prestação destinada à amortização do saldo não capitalizável,

$$\begin{aligned} P_{(p-1)s+q}^N \;=\; P_p^{N\prime} \;&=\; \frac{1}{s}\sum_{\tilde q=1}^{s} P_{(p-1)s+\tilde q}^N \;=\; \frac{1}{s}\sum_{\tilde q=1}^{s} A_{(p-1)s+\tilde q}^N + \frac{1}{s}\sum_{\tilde q=1}^{s} J_{(p-1)s+\tilde q} \\ &=\; \frac{1}{s}\, A^{N\prime} + \frac{1}{s}\,\frac{C}{n}\, if \sum_{\tilde q=1}^{s}\big((r-p+1)s-(\tilde q-1)\big) \;, \end{aligned}$$

e aplicando a primeira fórmula de Gauss (9) para executar a soma sobre $\tilde{q}$,

$$P^N_{(p-1)s+q} \;=\; P^{N\prime}_p \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \,+\, \frac{C}{n}\,if\,\big((r-p+1)s-(s-1)/2\big)\;. \tag{44}$$

Combinando as equações (23), (43) e (44), otemos para a própria amortização do saldo não capitalizável

$$\begin{aligned} A^N_{(p-1)s+q} \;&=\; P^N_{(p-1)s+q} - J_{(p-1)s+q} \\ &=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \,+\, \frac{C}{n}\,if\,\big((r-p+1)s-(s-1)/2\big) \\ &\quad\; -\, \frac{C}{n}\,if\,\big((r-p+1)s-(q-1)\big) \end{aligned}$$

ou seja,

$$A^N_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f) \,+\, \frac{C}{n}\,if\,\big((q-1)-(s-1)/2\big)\;. \tag{45}$$

Usando, mais uma vez, a definição da palavra "amortização" (veja a equação (18)), concluímos que o saldo devedor não capitalizável é dado por [3]

$$\begin{aligned} S^N_{(p-1)s+q} \;&=\; S^N_0 \,-\, \sum_{\tilde{p}=1}^{p-1}\sum_{\tilde{q}=1}^{s} A^N_{(\tilde{p}-1)s+\tilde{q}} \,-\, \sum_{\tilde{q}=1}^{q} A^N_{(p-1)s+\tilde{q}} \\ &=\; S^N_0 \,-\, (p-1)A^{N\prime} \,-\, \sum_{\tilde{q}=1}^{q} A^N_{(p-1)s+\tilde{q}} \\ &=\; C(1-f) \,-\, \frac{C}{r}\,(1-f)\,(p-1) \,-\, \frac{C}{n}\,(1-f)\,q \\ &\quad\; -\, \frac{C}{n}\,if\,\big(q(q-1)/2-q(s-1)/2\big) \end{aligned}$$

onde, mais uma vez, a última igualdade foi obtida aplicando a primeira fórmula de Gauss (9) para executar a soma sobre $\tilde{q}$, ou seja,

$$S^N_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f)\,(n-k) \,+\, \frac{C}{n}\,if\,\frac{q(s-q)}{2}\;. \tag{46}$$

Finalmente, falta apenas determinar o fator de ponderação $f$. Mas somando as expressões nas equações (38) e (44), notamos que a pestação total é exatamente da forma dada pela equação (5) com a restrição de que as constantes $R'_0$ e $P'_0$ são determinadas a partir de uma única constante $f$ conforme a equação (11), e como já foi demonstrado na Seção 2.2, isso implica que a condição do equilíbrio das contas no final do contrato, equação (2), será satisfeita se (e somente se) $f$ for dado pela equação (12): não há necessidade de repetir este argumento aqui.

## 3.3 Um resumo das fórmulas mais importantes

Para melhor visualização, juntamos as fórmulas mais importantes do SACRE, pondo $n = rs$ e, para $1 \leqslant k \leqslant n$, escrevendo $k = (p-1)s + q$ com $1 \leqslant p \leqslant r$ e $1 \leqslant q \leqslant s$. Como se vê, a prestação não depende de $q$ e a amortização não depende de $p$, e as fórmulas se reduzem às expressões conhecidas do SPC (tabela Price ou método de Gauss) quando $r = p = 1$, $s = n$, $q = k$ e do SAC quando $r = n$, $p = k$, $s = q = 1$.

### 3.3.1 SACRE a juros compostos

Prestação:

$$\boxed{P_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r}\, i \left( (r-p+1) \;+\; \frac{1}{(1+i)^s - 1} \right)}$$

Amortização:

$$\boxed{A_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r}\, i\, \frac{(1+i)^{q-1}}{(1+i)^s - 1}}$$

Juros:

$$\boxed{J_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r}\, i \left( (r-p+1) \;-\; \frac{(1+i)^{q-1} - 1}{(1+i)^s - 1} \right)}$$

Saldo devedor:

$$\boxed{S_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{r} \left( (r-p+1) \;-\; \frac{(1+i)^{q} - 1}{(1+i)^s - 1} \right)}$$

### 3.3.2 SACRE a juros simples

Fator de ponderação:

$$\boxed{f \;=\; \frac{1}{1 \;+\; i\, \dfrac{4n^2 - s^2 - 3}{6(n+1)}}}$$

Prestação:

$$\boxed{P_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\Big(1 \,-\, if(s-1)/2 \,+\, ifs\,(r-p+1)\Big)}$$

Parte da prestação destinada à amortização do saldo capitalizável
e amortização do saldo capitalizável:

$$\boxed{P^C \;=\; A^C \;=\; \frac{C}{n}\,f}$$

Parte da prestação destinada à amortização do saldo não capitalizável:

$$\boxed{P^N_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\Big((1-f) \,-\, if(s-1)/2 \,+\, ifs\,(r-p+1)\Big)}$$

Amortização do saldo não capitalizável:

$$\boxed{A^N_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\Big((1-f) \,-\, if(s-1)/2 \,+\, if(q-1)\Big)}$$

Juros:

$$\boxed{J_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\,if\,\big((r-p+1)s-(q-1)\big)}$$

Saldo devedor capitalizável:

$$\boxed{S^C_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\,f\,\big((r-p+1)s-q\big)}$$

Saldo devedor não capitalizável:

$$\boxed{S^N_{(p-1)s+q} \;=\; \frac{C}{n}\,(1-f)\,\big((r-p+1)s-q\big) \,+\, \frac{C}{n}\,if\,\frac{q(s-q)}{2}}$$

Notamos que todas essas fórmulas podem ser implementadas em planilhas Excel e simuladores baseados nestes algoritmos já estão sendo desenvolvidos.

## 3.4 Representação gráfica – um exemplo

A seguir, analisamos graficamente um exemplo com valores típicos para um contrato de financiamento de imóvel, escolhidos de modo a simplificar os cálculos: são os mesmos do Exemplo 3 da Ref. [1] (na mesma Seção 3.4), para facilitar a comparação.

**Exemplo 1** Considere o financiamento de um capital $C$ de 120.000 R\$ remunerado a uma taxa mensal de juros de $i = 1\% = 0,01$ durante 10 anos, e no caso do SACRE, com parcelas mantidas constantes durante 1 ano, ou seja, com $r = 10$, $s = 12$ e $n = 120$ – valores típicos de um financiamento de imóvel. A prestação ideal $P_0$ é de 1.000 R\$.

Neste caso, a prestação fixa conforme a tabela Price é de

$$P_{\text{Price}} = 1.721,65 \text{ R\$ },$$

enquanto que a primeira e a última prestação no SAC a juros compostos são de

$$\begin{aligned} P_1^{\text{SAC}-\text{JC}} &= 2.200,00 \text{ R\$ }, \\ &\vdots \\ P_{120}^{\text{SAC}-\text{JC}} &= 1.010,00 \text{ R\$ }, \end{aligned}$$

com razão de decréscimo mensal de $10,00$ R\$; finalmente, a primeira e a última prestação no SACRE a juros compostos são de

$$\begin{aligned} P_1^{\text{SACRE}-\text{JC}} = \ldots = P_{12}^{\text{SACRE}-\text{JC}} &= 2.146,19 \text{ R\$ }, \\ &\vdots \\ P_{109}^{\text{SACRE}-\text{JC}} = \ldots = P_{120}^{\text{SACRE}-\text{JC}} &= 1.066,19 \text{ R\$ }, \end{aligned}$$

com razão de decréscimo anual de $120,00$ R\$. Por outro lado, a prestação fixa conforme o método de Gauss é de

$$P_{\text{Gauss}} = 1.379,31 \text{ R\$ },$$

enquanto que a primeira e a última prestação no SAC a juros simples são de

$$\begin{aligned} P_1^{\text{SAC}-\text{JS}} &= 1.669,14 \text{ R\$ }, \\ &\vdots \\ P_n^{\text{SAC}-\text{JS}} &= 1.005,58 \text{ R\$ }, \end{aligned}$$

com razão de decréscimo mensal de $5,58$ R\$; finalmente, a primeira e a última prestação no SACRE a juros simples são de

$$\begin{aligned} P_1^{\text{SACRE}-\text{JC}} = \ldots = P_{12}^{\text{SACRE}-\text{JC}} &= 1.639,18 \text{ R\$ }, \\ &\vdots \\ P_{109}^{\text{SACRE}-\text{JC}} = \ldots = P_{120}^{\text{SACRE}-\text{JC}} &= 1.036,29 \text{ R\$ }, \end{aligned}$$

com razão de decréscimo anual de $66,99$ R\$.

Na Figura 1 abaixo, exibimos a evolução destas prestações em cada sistema de amortização graficamente, comparando os dois regimes: juros compostos (esquerda) e juros simples (direita).

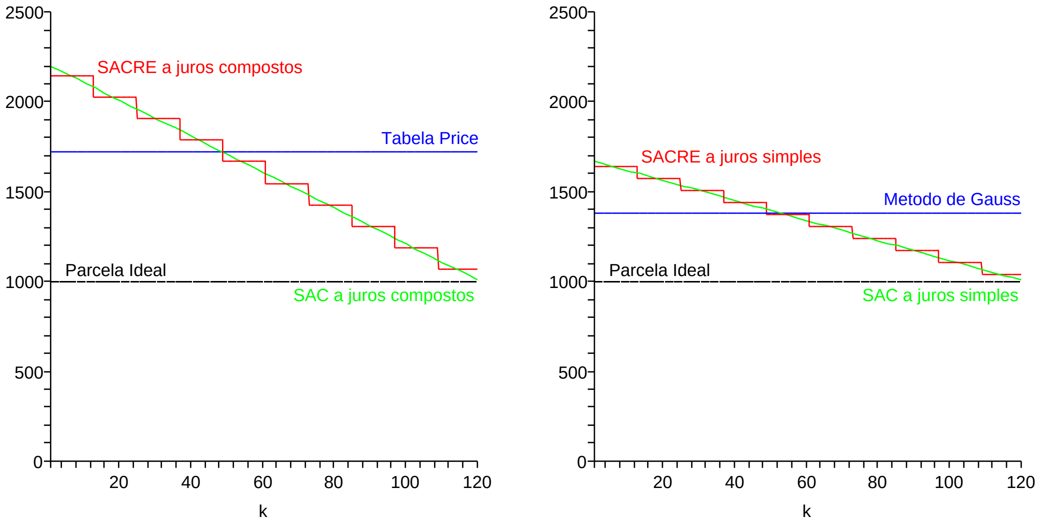


Figura 1: Evolução das prestações nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 1\%$, $n = 120$, $r = 10$, $s = 12$.

Nas Figuras 2-4, mostramos os gráficos da evolução do saldo devedor, da amortização e dos juros em cada sistema de amortização, sempre comparando os dois regimes: juros compostos (esquerda) e juros simples (direita).

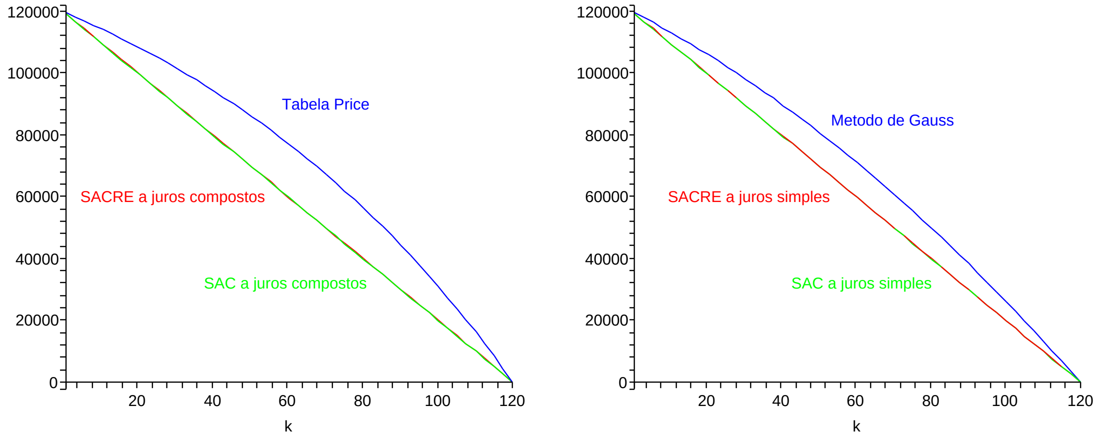


Figura 2: Evolução do saldo total nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 1\%$, $n = 120$, $r = 10$, $s = 12$.

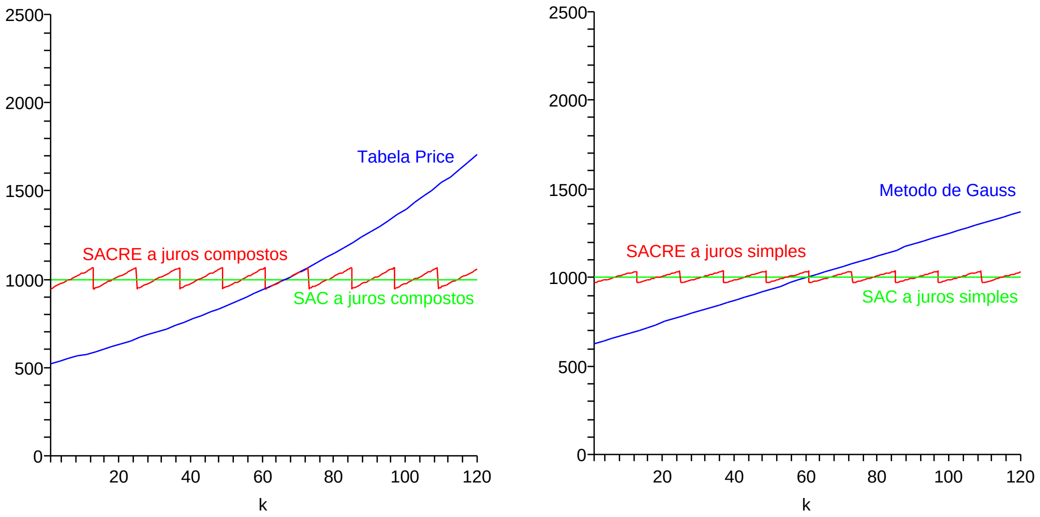


Figura 3: Evolução da amortização nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 1\%$, $n = 120$, $r = 10$, $s = 12$.

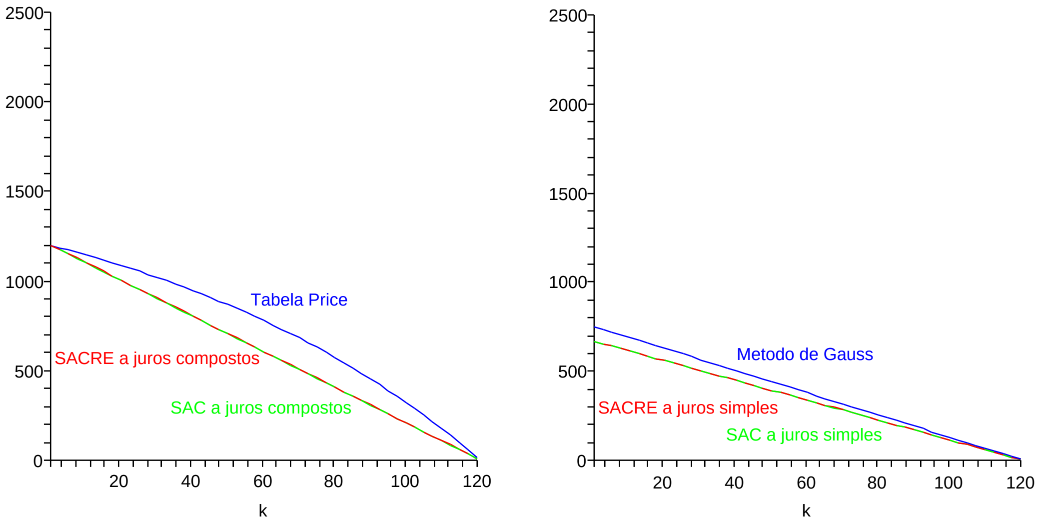


Figura 4: Evolução dos juros pagos nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 1\%$, $n = 120$, $r = 10$, $s = 12$.

Finalmente, na Figura 5, exibimos, agora exclusivamente para o regime de juros simples, a evolução do saldo capitalizável (esquerda) e do saldo não capitalizável (direita) em cada sistema de amortização.

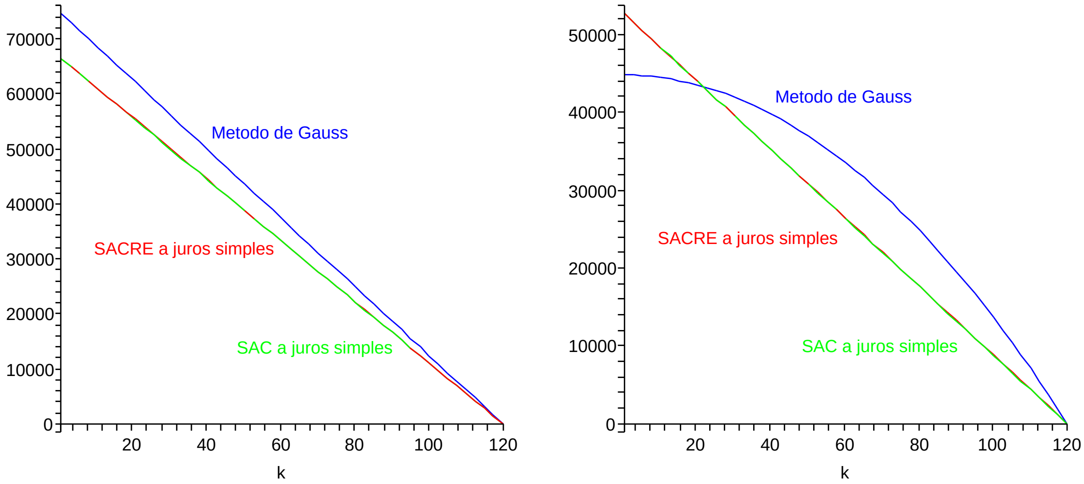


Figura 5: Evolução do saldo capitalizável (esquerda) e do saldo não capitalizável (direita), no regime de juros simples, nos diversos sistemas de amortização, com $i = 1\%$, $n = 120$, $r = 10$, $s = 12$.

Percebe-se que, em vários aspectos, o SACRE e o SAC se comportam quase que identicamente: algumas das curvas pertinentes se sobrepõem. Diferenças mais pronunciadas aparecem apenas se mudarmos alguns dos parâmetros do exemplo anterior: por exemplo,

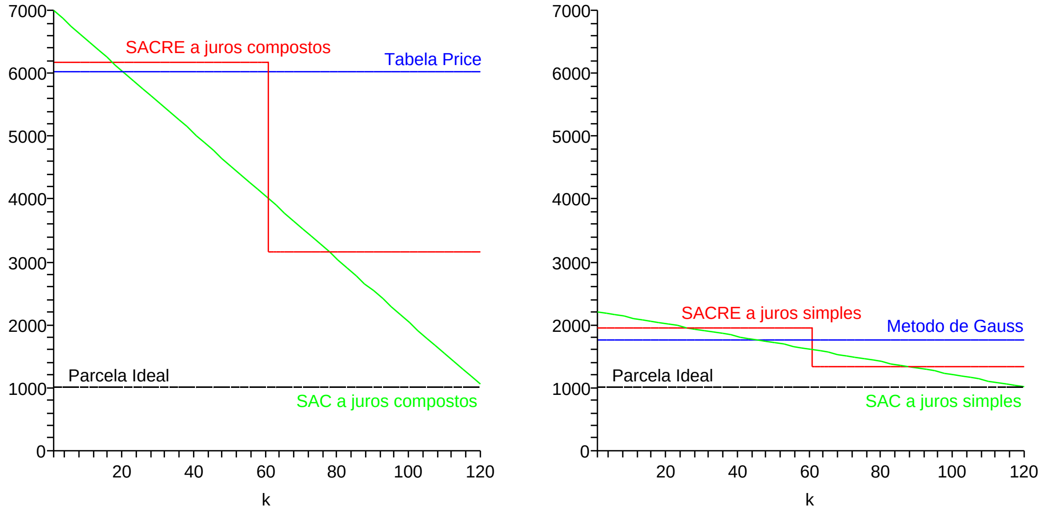


Figura 6: Evolução das prestações nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 5\%$, $n = 120$, $r = 2$, $s = 60$.

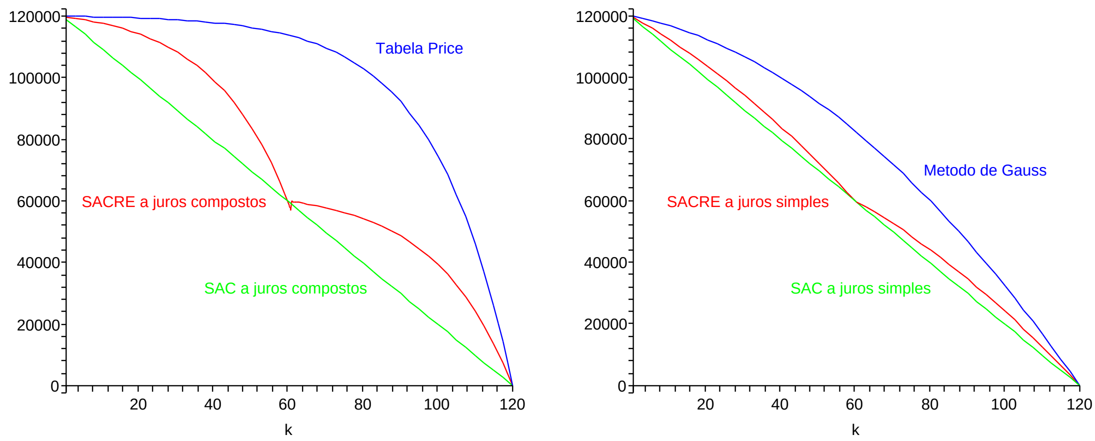


Figura 7: Evolução do saldo total nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 5\%$, $n = 120$, $r = 2$, $s = 60$.

se escolhermos uma taxa de juros bem mais alta, digamos $i = 5\% = 0{,}05$, e ainda considerarmos uma subdivisão do prazo total de 10 anos em apenas dois subperíodos de 5 anos cada um, ou seja, se $r = 2$ e $s = 60$. Ressalta-se que para um financiamento

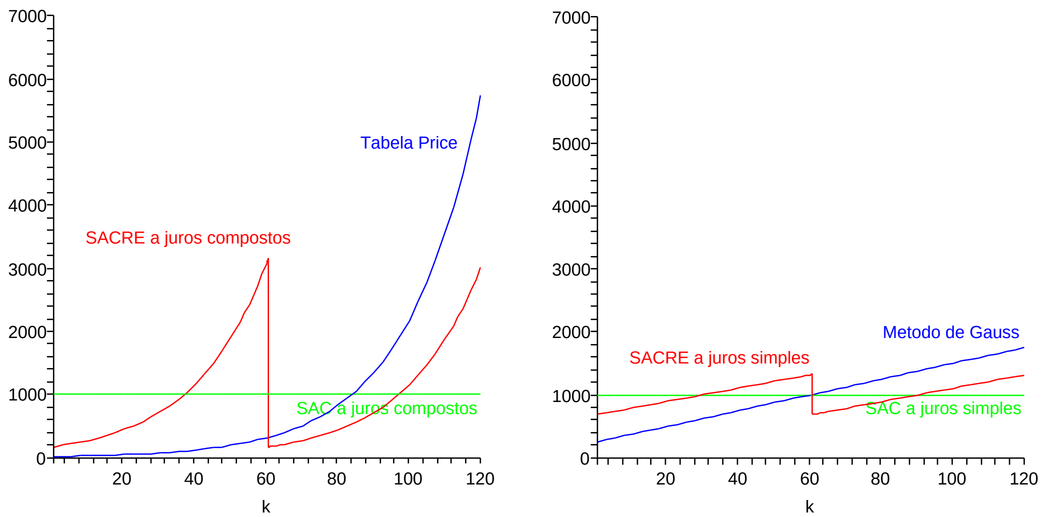


Figura 8: Evolução da amortização nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 5\%$, $n = 120$, $r = 2$, $s = 60$.

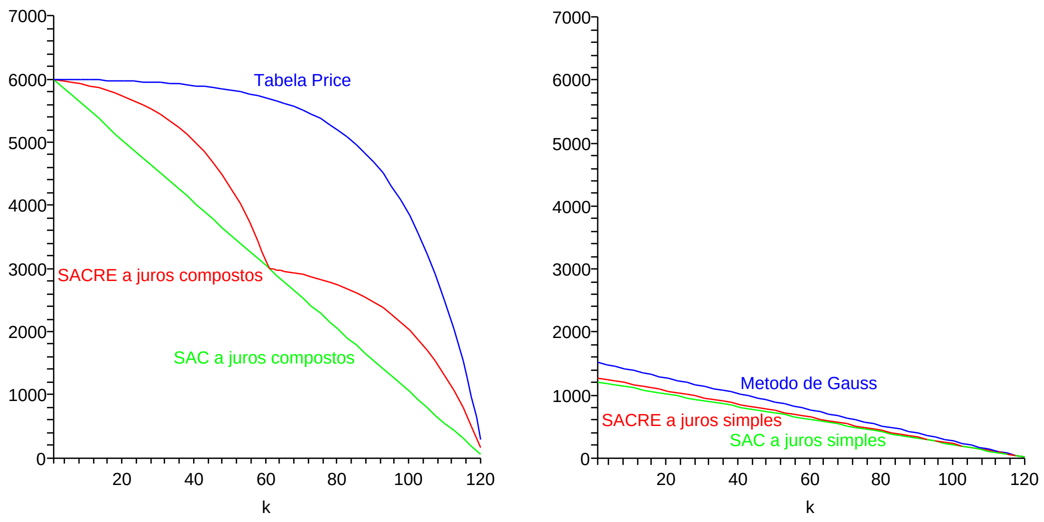


Figura 9: Evolução dos juros pagos nos diversos sistemas de amortização, a juros compostos (esquerda) e a juros simples (direita), com $i = 5\%$, $n = 120$, $r = 2$, $s = 60$.

habitacional, estes valores não são realísticos e portanto as Figuras 6-10, que são, respectivamente, os exatos análogos das Figuras 1-5 anteriores com essa alteração de parâmetros, servem meramente para fins de ilustração.

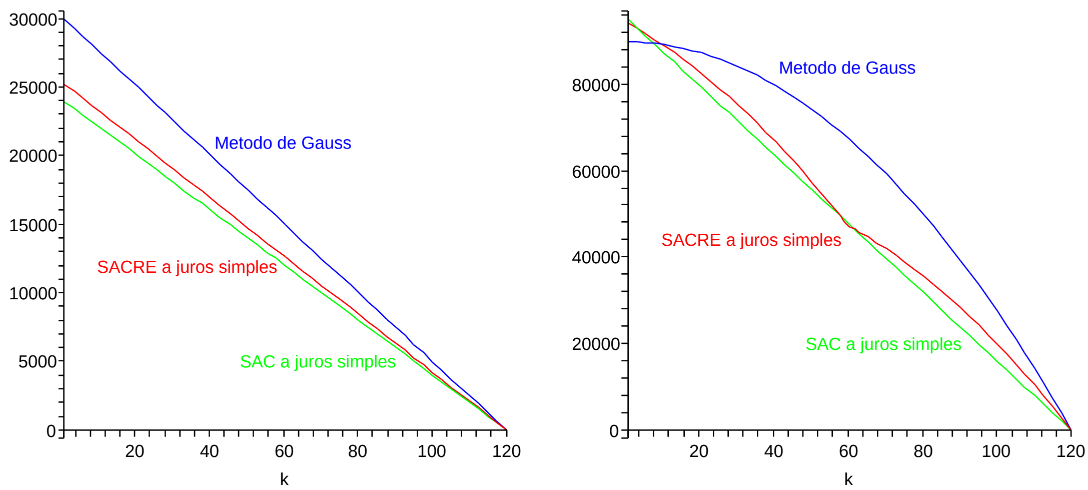


Figura 10: Evolução do saldo capitalizável (esquerda) e do saldo não capitalizável (direita), no regime de juros simples, nos diversos sistemas de amortização, com $i = 5\%$, $n = 120$, $r = 2$, $s = 60$.

## 3.5 Planilhas de evolução de financiamento – um exemplo

Finalmente, queremos demonstrar as diferenças entres os vários sistemas de amortização e entre os dois regimes de juros – composto e simples – de um modo mais quantitativo, através de planilhas de evolução de financiamento. Para isso, trabalharemos com um exemplo um pouco diferente do anterior, caracterizado por um prazo menor e uma taxa de juros maior, para evitar a necessidade de considerar um grande número de linhas na planilha e ainda assim poder visualizar as diferenças com clareza.

**Exemplo 2** Considere o financiamento de um capital $C$ de 12.000 R$ remunerado a uma taxa mensal de juros de $i = 5\% = 0,05$ durante 1 ano, e no caso do SACRE, com parcelas mantidas constantes durante 3 meses, ou seja, com $r = 4$, $s = 3$ e $n = 12$ – valores típicos de um empréstimo pessoal. Novamente, a prestação ideal $P_0$ é de 1.000 R$.

Inicialmente, na Figura 11, exibimos a planilha padrão para este financiamento, elaborada conforme a tabela Price (esquerda) e o SAC a juros compostos (direita).

**TABELA PRICE**

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| NO | PRESTAÇÃO | SALDO | JUROS |
| 0 | | R$ 12.000,00 | |
| 1 | R$ 1.353,90 | R$ 11.246,10 | R$ 600,00 |
| 2 | R$ 1.353,90 | R$ 10.454,49 | R$ 562,30 |
| 3 | R$ 1.353,90 | R$ 9.623,31 | R$ 522,72 |
| 4 | R$ 1.353,90 | R$ 8.750,58 | R$ 481,17 |
| 5 | R$ 1.353,90 | R$ 7.834,20 | R$ 437,53 |
| 6 | R$ 1.353,90 | R$ 6.872,00 | R$ 391,71 |
| 7 | R$ 1.353,90 | R$ 5.861,70 | R$ 343,60 |
| 8 | R$ 1.353,90 | R$ 4.800,88 | R$ 293,08 |
| 9 | R$ 1.353,90 | R$ 3.687,02 | R$ 240,04 |
| 10 | R$ 1.353,90 | R$ 2.517,46 | R$ 184,35 |
| 11 | R$ 1.353,90 | R$ 1.289,43 | R$ 125,87 |
| 12 | R$ 1.353,90 | R$ 0,00 | R$ 64,47 |

**SAC A JUROS COMPOSTOS**

RAZÃO DE DECRÉSCIMO MENSAL R$ 50,00

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| NO | PRESTAÇÃO | SALDO | JUROS |
| 0 | | R$ 12.000,00 | |
| 1 | R$ 1.600,00 | R$ 11.000,00 | R$ 600,00 |
| 2 | R$ 1.550,00 | R$ 10.000,00 | R$ 550,00 |
| 3 | R$ 1.500,00 | R$ 9.000,00 | R$ 500,00 |
| 4 | R$ 1.450,00 | R$ 8.000,00 | R$ 450,00 |
| 5 | R$ 1.400,00 | R$ 7.000,00 | R$ 400,00 |
| 6 | R$ 1.350,00 | R$ 6.000,00 | R$ 350,00 |
| 7 | R$ 1.300,00 | R$ 5.000,00 | R$ 300,00 |
| 8 | R$ 1.250,00 | R$ 4.000,00 | R$ 250,00 |
| 9 | R$ 1.200,00 | R$ 3.000,00 | R$ 200,00 |
| 10 | R$ 1.150,00 | R$ 2.000,00 | R$ 150,00 |
| 11 | R$ 1.100,00 | R$ 1.000,00 | R$ 100,00 |
| 12 | R$ 1.050,00 | R$ 0,00 | R$ 50,00 |

Figura 11: Exemplo de planilha padrão de evolução de saldo devedor no regime de juros compostos: tabela Price (esquerda) e SAC (direita). As flechas indicam o fluxo do cálculo e da incorporação dos juros, como na Ref. [1].

Passando ao SACRE, recordamos primeiro que, como já foi mencionado na Introdução, o método atualmente empregado pelas instituições financeiras para determinar as prestações e que nós chamamos de "SACRE falso", adaptado ao presente caso, equivale à seguinte regra: a primeira prestação é calculada simplesmente pela mesma fórmula do SAC, porém mantida constante durante um trimestre, e as prestações nos trimestres seguintes são calculadas, mais uma vez, pela mesma fórmula do SAC, só que aplicada ao saldo devedor constatado no final do trimestre anterior e com o prazo remanescente. Na Figura 12, exibimos a planilha padrão do "SACRE falso" (esquerda), que resulta desse algoritmo, para fins de comparação com a planilha padrão do "SACRE correto" (direita), que resulta das fórmulas da Seção 3.3.1, em particular da equação (8).

**SACRE FALSO**

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| NO | PRESTAÇÃO | SALDO | JUROS |
| 0 | | R$ 12.000,00 | |
| 1 | R$ 1.600,00 | R$ 11.000,00 | R$ 600,00 |
| 2 | R$ 1.600,00 | R$ 9.950,00 | R$ 550,00 |
| 3 | R$ 1.600,00 | R$ 8.847,50 | R$ 497,50 |
| 4 | R$ 1.425,43 | R$ 7.864,44 | R$ 442,38 |
| 5 | R$ 1.425,43 | R$ 6.832,24 | R$ 393,22 |
| 6 | R$ 1.425,43 | R$ 5.748,42 | R$ 341,61 |
| 7 | R$ 1.245,49 | R$ 4.790,35 | R$ 287,42 |
| 8 | R$ 1.245,49 | R$ 3.784,37 | R$ 239,52 |
| 9 | R$ 1.245,49 | R$ 2.728,10 | R$ 189,22 |
| 10 | R$ 1.045,77 | R$ 1.818,74 | R$ 136,41 |
| 11 | R$ 1.045,77 | R$ 863,90 | R$ 90,94 |
| 12 | R$ 1.045,77 | R$ (138,68) | R$ 43,19 |

**SACRE A JUROS COMPOSTOS**

RAZÃO DE DECRÉSCIMO TRIMESTRAL R$ 150,00

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| NO | PRESTAÇÃO | SALDO | JUROS |
| 0 | | R$ 12.000,00 | |
| 1 | R$ 1.551,63 | R$ 11.048,37 | R$ 600,00 |
| 2 | R$ 1.551,63 | R$ 10.049,17 | R$ 552,42 |
| 3 | R$ 1.551,63 | R$ 9.000,00 | R$ 502,46 |
| 4 | R$ 1.401,63 | R$ 8.048,37 | R$ 450,00 |
| 5 | R$ 1.401,63 | R$ 7.049,17 | R$ 402,42 |
| 6 | R$ 1.401,63 | R$ 6.000,00 | R$ 352,46 |
| 7 | R$ 1.251,63 | R$ 5.048,37 | R$ 300,00 |
| 8 | R$ 1.251,63 | R$ 4.049,17 | R$ 252,42 |
| 9 | R$ 1.251,63 | R$ 3.000,00 | R$ 202,46 |
| 10 | R$ 1.101,63 | R$ 2.048,37 | R$ 150,00 |
| 11 | R$ 1.101,63 | R$ 1.049,17 | R$ 102,42 |
| 12 | R$ 1.101,63 | R$ 0,00 | R$ 52,46 |

Figura 12: Exemplo de planilha padrão de evolução de saldo devedor no regime de juros compostos: SACRE falso (esquerda) e SACRE correto (direita). As flechas indicam o fluxo do cálculo e da incorporação dos juros, como na Ref. [1].

**MÉTODO DE GAUSS**

FATOR DE PONDERAÇÃO 0,784314

| A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NO PR | PRESTAÇÃO TOTAL | PRESTAÇÃO PARTE C | SALDO CAPITALIZÁVEL | JUROS SOBRE SALDO C | PRESTAÇÃO PARTE N | SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL | SALDO TOTAL |
| 0 | | | R$ 9.411,76 | | | R$ 2.588,24 | R$ 12.000,00 |
| 1 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 8.627,45 | R$ 470,59 | R$ 470,59 | R$ 2.588,24 | R$ 11.215,69 |
| 2 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 7.843,14 | R$ 431,37 | R$ 470,59 | R$ 2.549,02 | R$ 10.392,16 |
| 3 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 7.058,82 | R$ 392,16 | R$ 470,59 | R$ 2.470,59 | R$ 9.529,41 |
| 4 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 6.274,51 | R$ 352,94 | R$ 470,59 | R$ 2.352,94 | R$ 8.627,45 |
| 5 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 5.490,20 | R$ 313,73 | R$ 470,59 | R$ 2.196,08 | R$ 7.686,27 |
| 6 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 4.705,88 | R$ 274,51 | R$ 470,59 | R$ 2.000,00 | R$ 6.705,88 |
| 7 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 3.921,57 | R$ 235,29 | R$ 470,59 | R$ 1.764,71 | R$ 5.686,27 |
| 8 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 3.137,25 | R$ 196,08 | R$ 470,59 | R$ 1.490,20 | R$ 4.627,45 |
| 9 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 2.352,94 | R$ 156,86 | R$ 470,59 | R$ 1.176,47 | R$ 3.529,41 |
| 10 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 1.568,63 | R$ 117,65 | R$ 470,59 | R$ 823,53 | R$ 2.392,16 |
| 11 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 784,31 | R$ 78,43 | R$ 470,59 | R$ 431,37 | R$ 1.215,69 |
| 12 | R$ 1.254,90 | R$ 784,31 | R$ 0,00 | R$ 39,22 | R$ 470,59 | R$ 0,00 | R$ 0,00 |

Figura 13: Exemplo de planilha estendida de evolução de saldo devedor no regime de juros simples, conforme desenvolvida na Ref. [1]: método de Gauss. As flechas indicam o fluxo do cálculo e da incorporação dos juros.

Nota-se que no primeiro caso, o saldo devedor final realmente não é zerado: há um saldo remanescente a favor do tomador do empréstimo. Além disso, a evolução das prestações é irregular, pois a razão de decréscimo trimestral não é constante. Assim, conclui-se que o "SACRE falso" é falso mesmo – deficiente em relação a praticamente todos os quesitos razoáveis da matemática financeira.

Finalmente, exibimos também as correspondentes planilhas de evolução de saldo para o regime de juros simples, que chamamos de planilhas estendidas pois mostram, além da prestação total, do saldo total e dos juros, como antes, a divisão da prestação e do saldo em parte capitalizável e parte não capitalizável, como proposto na Ref. [1]. O resultado pode ser contemplado nas Figuras 13–15.

**SAC A JUROS SIMPLES**

| | |
|---|---|
| RAZÃO DE DECRÉSCIMO MENSAL | R$ 36,59 |
| FATOR DE PONDERAÇÃO | 0,731707 |

| A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NO PR | PRESTAÇÃO TOTAL | PRESTAÇÃO PARTE C | SALDO CAPITALIZÁVEL | JUROS SOBRE SALDO C | PRESTAÇÃO PARTE N | SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL | SALDO TOTAL |
| 0 | | | R$ 8.780,49 | | | R$ 3.219,51 | R$ 12.000,00 |
| 1 | R$ 1.439,02 | R$ 731,71 | R$ 8.048,78 | R$ 439,02 | R$ 707,32 | R$ 2.951,22 | R$ 11.000,00 |
| 2 | R$ 1.402,44 | R$ 731,71 | R$ 7.317,07 | R$ 402,44 | R$ 670,73 | R$ 2.682,93 | R$ 10.000,00 |
| 3 | R$ 1.365,85 | R$ 731,71 | R$ 6.585,37 | R$ 365,85 | R$ 634,15 | R$ 2.414,63 | R$ 9.000,00 |
| 4 | R$ 1.329,27 | R$ 731,71 | R$ 5.853,66 | R$ 329,27 | R$ 597,56 | R$ 2.146,34 | R$ 8.000,00 |
| 5 | R$ 1.292,68 | R$ 731,71 | R$ 5.121,95 | R$ 292,68 | R$ 560,98 | R$ 1.878,05 | R$ 7.000,00 |
| 6 | R$ 1.256,10 | R$ 731,71 | R$ 4.390,24 | R$ 256,10 | R$ 524,39 | R$ 1.609,76 | R$ 6.000,00 |
| 7 | R$ 1.219,51 | R$ 731,71 | R$ 3.658,54 | R$ 219,51 | R$ 487,80 | R$ 1.341,46 | R$ 5.000,00 |
| 8 | R$ 1.182,93 | R$ 731,71 | R$ 2.926,83 | R$ 182,93 | R$ 451,22 | R$ 1.073,17 | R$ 4.000,00 |
| 9 | R$ 1.146,34 | R$ 731,71 | R$ 2.195,12 | R$ 146,34 | R$ 414,63 | R$ 804,88 | R$ 3.000,00 |
| 10 | R$ 1.109,76 | R$ 731,71 | R$ 1.463,41 | R$ 109,76 | R$ 378,05 | R$ 536,59 | R$ 2.000,00 |
| 11 | R$ 1.073,17 | R$ 731,71 | R$ 731,71 | R$ 73,17 | R$ 341,46 | R$ 268,29 | R$ 1.000,00 |
| 12 | R$ 1.036,59 | R$ 731,71 | R$ 0,00 | R$ 36,59 | R$ 304,88 | R$ 0,00 | R$ 0,00 |

Figura 14: Exemplo de planilha estendida de evolução de saldo devedor no regime de juros simples, conforme desenvolvida na Ref. [1]: SAC. As flechas indicam o fluxo do cálculo e da incorporação dos juros.

Parece pertinente enfatizar, mais uma vez, o papel crucial desempenhado pela ferramenta do *fator de ponderação* $f$, cuja função principal para planilhas de evolução de financiamento no regime de juros simples é determinar a divisão do capital inicial $C$, no instante do início do contrato (valor presente), em sua parte capitalizável, que é $Cf$, e uma parte não capitalizável, que é $C(1-f)$. Este fator, um número entre 0 e 1, depende apenas da taxa de juros $i$ e do prazo do financiamento $n$, assim como, no caso do SACRE, de sua divisão em subperíodos durante os quais a prestação é mantida constante, mas não depende do capital inicial $C$, e ele é completamente determinado por um único critério: deve ser escolhido de tal forma que se atinja a meta do equilíbrio das contas no final do contrato, ou seja, a igualdade do valor futuro do capital inicial e da soma de todas as prestações, conforme expressa pela equação (2). Como já foi constatado no trabalho anterior [1], esse critério, por si só, implica, necessaria e inevitavelmente, que $f < 1$.

**SACRE A JUROS SIMPLES**

| | |
|---|---|
| RAZÃO DE DECRÉSCIMO TRIMESTRAL | R$ 110,17 |
| FATOR DE PONDERAÇÃO | 0,734463 |

| A NO PR | B PRESTAÇÃO TOTAL | C PRESTAÇÃO PARTE C | D SALDO CAPITALIZÁVEL | E JUROS SOBRE SALDO C | F PRESTAÇÃO PARTE N | G SALDO NÃO CAPITALIZÁVEL | H SALDO TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | R$ 8.813,56 | | | R$ 3.186,44 | R$ 12.000,00 |
| 1 | R$ 1.403,95 | R$ 734,46 | R$ 8.079,10 | R$ 440,68 | R$ 669,49 | R$ 2.957,63 | R$ 11.036,72 |
| 2 | R$ 1.403,95 | R$ 734,46 | R$ 7.344,63 | R$ 403,95 | R$ 669,49 | R$ 2.692,09 | R$ 10.036,72 |
| 3 | R$ 1.403,95 | R$ 734,46 | R$ 6.610,17 | R$ 367,23 | R$ 669,49 | R$ 2.389,83 | R$ 9.000,00 |
| 4 | R$ 1.293,79 | R$ 734,46 | R$ 5.875,71 | R$ 330,51 | R$ 559,32 | R$ 2.161,02 | R$ 8.036,72 |
| 5 | R$ 1.293,79 | R$ 734,46 | R$ 5.141,24 | R$ 293,79 | R$ 559,32 | R$ 1.895,48 | R$ 7.036,72 |
| 6 | R$ 1.293,79 | R$ 734,46 | R$ 4.406,78 | R$ 257,06 | R$ 559,32 | R$ 1.593,22 | R$ 6.000,00 |
| 7 | R$ 1.183,62 | R$ 734,46 | R$ 3.672,32 | R$ 220,34 | R$ 449,15 | R$ 1.364,41 | R$ 5.036,72 |
| 8 | R$ 1.183,62 | R$ 734,46 | R$ 2.937,85 | R$ 183,62 | R$ 449,15 | R$ 1.098,87 | R$ 4.036,72 |
| 9 | R$ 1.183,62 | R$ 734,46 | R$ 2.203,39 | R$ 146,89 | R$ 449,15 | R$ 796,61 | R$ 3.000,00 |
| 10 | R$ 1.073,45 | R$ 734,46 | R$ 1.468,93 | R$ 110,17 | R$ 338,98 | R$ 567,80 | R$ 2.036,72 |
| 11 | R$ 1.073,45 | R$ 734,46 | R$ 734,46 | R$ 73,45 | R$ 338,98 | R$ 302,26 | R$ 1.036,72 |
| 12 | R$ 1.073,45 | R$ 734,46 | R$ 0,00 | R$ 36,72 | R$ 338,98 | R$ 0,00 | R$ 0,00 |

Figura 15: Exemplo de planilha estendida de evolução de saldo devedor no regime de juros simples, conforme desenvolvida na Ref. [1]: SACRE. As flechas indicam o fluxo do cálculo e da incorporação dos juros.

*Assim, a atribuição de uma parte do capital inicial $C$ ao saldo devedor não capitalizável é um aspecto indissociável do regime de juros simples, e se esta atribuição não for efetuada com o fator correto, é impossível atingir a meta de que os dois tipos de saldo devedor devem estar zerados no fim do contrato!*

# 4 Correção monetária e pagamentos irregulares

Uma das várias vantagens do novo algoritmo para o SACRE introduzido neste trabalho é que ele pode facilmente ser adaptado para acomodar uma eventual correção monetária: basta aplicar a regra de multiplicar *todos* os valores pertinentes pelo indexador pertinente para garantir a manutenção do equilíbrio até o final do contrato. Este preceito se aplica ao saldo devedor e à prestação, no regime de juros compostos, assim como aos três tipos de saldo devedor e de prestação (capitalizável, não capitalizável e total) no regime de juros simples. Infelizmente, não é isso o que se observa. Muito pelo contrário: os contratos de financiamento habitacional da Caixa Econômica Federal, que é a instituição financeira líder neste segmento, prevêem o reajuste mensal do saldo devedor mas apenas um reajuste anual da prestação. É preciso enfatizar que *essa prática de desvincular os reajustes de saldos e de prestações é matematicamente inconsistente e leva a distorções na evolução do financiamento*. Cabe lembrar que tais distorções já ocorreram no Brasil em grande escala, no sistema de financiamento habitacional, como resultado do "plano de equiparação salarial" (PES). As consequências desastrosas são bem conhecidas: devido às altas taxas de inflação da época, acumularam-se enormes saldos devedores residuais, muitas vezes maiores do que o valor original do imóvel, atormentando os mutuários ainda anos após o encerramento dos seus contratos – tanto que o governo se viu obrigado a assumir o ônus e proteger a população pelo "fundo de compensação de variação salarial" (FCVS), que hoje está altamente deficitário.[4] A simples exigência legal de sincronia nos reajustes teria evitado esse problema, inclusive o disperdício de recursos públicos bilionários pelo FCVS.

Sendo assim, *sugere-se fortemente que essa desvinculação seja terminantemente proibida, através de legislação ou jurisprudência específica*, o que poderia ser feito com base no Código de Defesa do Consumidor. Felizmente, a forma concreta de implementar tal proibição é muito simples, tendo em vista a característica básica de cada sistema de amortização:

- Proibe-se aplicar correção monetária ao(s) saldo(s) devedor(es) em contratos de financiamento com prestação constante: isso vale tanto para a tabela Price (juros compostos) como para o método de Gauss (juros simples).[5]
- Não há restrição quanto à aplicação de correção monetária ao(s) saldo(s) devedor(es) em contratos de financiamento pelo SAC.
- Proibe-se aplicar correção monetária mensal ao(s) saldo(s) devedor(es) em contratos de financiamento pelo SACRE, permitindo-se apenas sua correção monetária concomitante com o reajuste da prestação (com coeficiente acumulado).

Do mesmo modo, é fácil adaptar o novo algoritmo para o SACRE introduzido neste trabalho a lidar com irregularidades nos pagamentos, que podem ocorrer em função de (a) pagamentos efetuados pontualmente, nas suas respectivas datas de vencimento, porém com valores diferentes dos valores devidos, e (b) pagamentos efetuados em datas diferentes das suas respectivas datas de vencimento, tipicamente com atraso. Tais irregularidades levam a desvios da evolução "real" do financiamento em relação à sua evolução "teórica" que precisam ser tratados de forma correta; isso vale tanto para desvios a favor do credor, principalmente em função de atrasos no pagamento, como para desvios a favor do devedor, provindos de cobranças indevidas – seja pelo cálculo do valor da parcela usando juros compostos em vez de juros simples, seja pela inclusão de encargos incompatíveis com a legislação ou jurisprudência vigente.

O método mais simples e direto para lidar com tais desvios seria incluí-los no saldo, o que significa que a partir do período seguinte, eles geram juros. Mais precisamente, no regime de juros simples, o procedimento correto seria inclui-los no saldo capitalizável e os juros que geram – como todo e qualquer tipo de juros – no saldo não capitalizável. Porém, na elaboração da planilha demonstrando a evolução real de um financiamento, tem-se mostrado mais transparente apresentar apenas a *diferença* entre o saldo devedor real e o saldo devedor teórico correspondente, uma vez que este último é facilmente calculado:

---

[4]Veja http://www.tesouro.fazenda.gov.br/divida_publica/downloads/FCVS_historico.pdf.

[5]Observa-se que, na realidade brasileira atual, contratos de financiamento com base em prestações fixas já costumam não incluir correção monetária, de modo que tal proibição apenas serviria para consolidar uma prática salutar e não deve causar transtornos nem gerar polêmica.

isso já vale para os planos de amortização mais comuns, que são o SPC e o SAC discutidos em [1], e com os resultados deste trabalho, passa a valer também para o SACRE. Assim, a planilha resultante evidencia a *oscilação da evolução do financiamento em torno da meta*.

No entanto, a mera exibição de saldos ainda não é suficiente para subsidiar processos de disputa judicial de contratos de financiamento, pois tendo em vista o disposto no Código de Defesa do Consumidor (Art. 42, Parágrafo Único), segundo o qual "o consumidor cobrado em quantia indevida tem direito à repetição do indébito, por valor igual ao dobro do que pagou em excesso, acrescido de correção monetária e juros legais, salvo hipótese de engano justificável", torna-se necessário discriminar tanto o valor pago em excesso como o valor devido em excesso (i.e., além do saldo devedor teórico), sendo que o método descrito acima, de inclusão direta e imediata de todos os desvios no(s respectivos) saldo(s), permite determinar apenas a diferença entre esses dois valores.

A necessidade de viabilizar tal discriminação levou o autor a desenvolver um tipo de planilha mais complexa, cuja descrição detalhada foge do escopo deste trabalho e portanto não será dada aqui, até porque a base de sua construção independe do sistema de amortização (este afeta apenas a planilha de evolução teórica, mas não o tratamento dos desvios).

# 5 Conclusões

No presente trabalho, desenvolvemos a base teórica do sistema de amortização crescente (SACRE), tanto para o regime de juros compostos como para o regime de juros simples. Trata-se de um sistema híbrido entre o sistema de prestação constante (SPC) – mais conhecido sob a sigla "tabela Price" (juros compostos) ou "método de Gauss" (juros simples) – e o sistema de amortização constante (SAC). Sua característica principal é que permite dividir o prazo total do financiamento em um certo número de subperíodos iguais, durante os quais a prestação permanece constante, como no SPC, enquanto que ela decresce linearmente, em passos iguais, quando se passa de qualquer um deles ao próximo, como no SAC. Ocorre que este sistema híbrido, apesar de amplamente utilizado no financiamento imobiliário no Brasil há décadas, vem sendo aplicado pelas instituições financeiras de forma matematicamente incorreta e inconsistente, ferindo o dogma central da matemática financeira que exige o equilíbrio das contas no final do contrato, sem manipulações – um grave defeito estrutural que mostramos como corrigir, além de formular uma versão do sistema que se adequa ao preceito da proibição da capitalização dos juros.

# Referências

[1] FRANK MICHAEL FORGER: *Saldo Capitalizável e Saldo Não Capitalizável: Novos Algoritmos para o Regime de Juros Simples*, Relatório Técnico RT-MAP-0905, IME-USP, Outubro de 2009.

[2] José Jorge Meschiatti Nogueira: *Tabela Price – Mitos e Paradigmas*, 2ª edição, Editora Millennium, Campinas 2008.

[3] Edson Rovina: *Uma Nova Visão da Matemática Financeira*, Editora Millennium, Campinas 2009.