

## Lista de Exercícios No. 2

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)  
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

1. Suponha que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona (não decrescente). Note que  $f$  é automaticamente limitada em  $[a, b]$ , uma vez que  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  para qualquer  $x \in [a, b]$ .
  - (a) Se  $P = (t_0, \dots, t_n)$  é uma partição de  $[a, b]$ , calcule as somas de Riemann superior  $U(f, P)$  e inferior  $L(f, P)$ .
  - (b) Se  $P = (t_0, \dots, t_n)$  é uma partição uniforme de  $[a, b]$ , i.e., vale  $t_i - t_{i-1} = \delta$  para todo  $i$ , prove que

$$U(f, P) - L(f, P) = \delta[f(b) - f(a)]$$

2. Calcule o comprimento

$$\int_{\gamma} dt |\dot{\gamma}(t)|$$

das curvas  $\gamma$  no espaço  $\mathbb{R}^3$  dadas por:

- (a)  $\gamma(t) = (\frac{1}{4}t^2, \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{4}t^4)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;
- (b)  $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), ht/2\pi)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi N$ .

No último caso, qual é a forma geométrica desta curva?

3. Calcule as integrais de contorno

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

para os seguintes campos vetoriais  $\mathbf{F}$  e curvas  $\gamma$ , no plano  $\mathbb{R}^2$  ou no “plano furado”  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ou no espaço  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-y, x)$  onde  $\mathbf{r} = (x, y)$  e  $\gamma$  é o segmento do círculo de raio  $a$  entre  $(a, 0)$  e  $(0, a)$ ;

- (b)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y, x)$  onde  $\mathbf{r} = (x, y)$  e  $\gamma$  é o segmento da parábola dada por  $y = 2x^2$  entre  $(0, 0)$  e  $(2, 8)$ ;
- (c)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y - x, x)$  onde  $\mathbf{r} = (x, y)$  e  $\gamma$  é um círculo completo de raio  $a$ , percorrido uma vez no sentido antihorário;
- (d)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{(x, y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$  onde  $\mathbf{r} = (x, y)$  e  $\gamma$  é o bordo do quadrado com vértices  $(\pm 2, \pm 2)$ ;
- (e)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-y, x, z)$  onde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e  $\gamma$  é uma hélice de raio  $a$  e passo  $h$ , percorrida por  $N$  voltas completas.