3 As equações de Maxwell

3.1 Introdução às equações de Maxwell

A experiência, acumulada durante quase dois séculos, demonstra que todos os fenômenos eletromagnéticos estão ligados à existência de uma nova quantidade extensiva denominada *carga elétrica* ou simplesmente *carga.* Ela é uma quantidade conservada e está sujeita a uma equação de balanço do tipo descrito no capítulo anterior. No que segue, denotaremos a densidade de carga por ρ e a densidade de fluxo de carga, ou densidade de corrente, por $\boldsymbol{j}$, o que permite escrever a lei de conservação da carga na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \;=\; 0 \; . \tag{3.1}$$

Outro fato de caráter experimental é que todos os fenômenos eletromagnéticos podem ser entendidos em termos de dois campos vetoriais: o *campo elétrico* $\boldsymbol{E}$ e o *campo magnético* $\boldsymbol{B}$; frequentemente, $\boldsymbol{B}$ também é chamado *indução magnética.* Mais exatamente, temos a seguinte afirmação.

A força eletromagnética exercida sobre uma carga pontual q que no instante t se encontra na posição $\boldsymbol{x}$ e se move com velocidade $\boldsymbol{v}$ é a *força de Lorentz*

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \;=\; q\,\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) + \kappa\, q\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) \; .$$

Abreviando, podemos escrever esta equação – como é de costume – na forma

$$\boldsymbol{F} \;=\; q\boldsymbol{E} + \kappa\, q\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \; . \tag{3.2}$$

A constante κ será determinada apenas quando fixarmos as unidades de medida para a carga, o campo elétrico e o campo magnético; este assunto será abordado mais adiante.

A lei de força (3.2) permite uma definição operacional dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ – pelo menos na medida em que a retroação da carga q sobre os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ pode ser negligenciada. Isto é o caso para *cargas teste*, ou seja, no limite de cargas pequenas, de modo que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ podem ser determinados, pelo menos em princípio, através da passagem ao limite

$$\lim_{q \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

e subsequente separação em uma parte que não depende da velocidade e uma parte que depende (linearmente) da velocidade.

Quando consideramos, ao invés de uma carga pontual q, uma distribuição geral de cargas e correntes, caracterizada por uma densidade de carga ρ e uma densidade de corrente $\boldsymbol{j}$, temos que substituir a força de Lorentz pela *densidade de força de Lorentz*, dada por

$$\boldsymbol{f} \;=\; \rho \boldsymbol{E} \,+\, \kappa \, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \;. \tag{3.3}$$

As leis de força (3.2) e (3.3) determinam a influência que um dado campo eletromagnético exerce sobre cargas e correntes, mas não dizem nada a respeito da dinâmica do próprio campo eletromagnético, ou seja, a respeito das leis que regem sua geração e propagação. Estas leis são as equações de Maxwell. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais que expressam a divergência e o rotacional de $\boldsymbol{E}$ e de $\boldsymbol{B}$ em termos de uma dada densidade de carga ρ e uma dada densidade de corrente $\boldsymbol{j}$, além das primeiras derivadas parciais de $\boldsymbol{E}$ e de $\boldsymbol{B}$ em relação ao tempo, conforme segue:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; k_1 \rho \;, \tag{3.4-a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \;=\; -\, k_2 \, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;, \tag{3.4-b}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \;, \tag{3.4-c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \;=\; k_3 \boldsymbol{j} \,+\, k_4 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \;, \tag{3.4-d}$$

com constantes k_1, k_2, k_3 e k_4 ainda a serem especificadas. Este sistema de equações determina $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ unicamente, pois sob condições de fronteira apropriadas (como, por exemplo, decaimento suficientemente rápido ao infinito), um campo vetorial $\boldsymbol{A}$ é unicamente determinado por sua divergência $D = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ e seu rotacional $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ (sendo que este deve satisfazer à condição suplementar $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{R} = 0$).

De fato, sejam $\boldsymbol{A}_1$ e $\boldsymbol{A}_2$ dois campos vetorais tais que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}_1 = D = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}_2$ e $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_2$. Então sua diferença $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2$ satisfaz às condições $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ e $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$; portanto, podemos escrever $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, onde $\Delta\phi = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = 0$. Como será mostrado no Capítulo 4, a única solução limitada da equação de Laplace $\Delta\phi = 0$ que não apresente nenhum tipo de singularidade é a solução constante $\phi = \phi_0$, o que implica $\boldsymbol{A} = 0$ e $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$.

Deve-se ressaltar que – ao contrário da situação que prevalece nas leis de força – a distribuição de cargas e correntes nas equações de Maxwell deve ser interpretada como a *fonte* do campo elétrico e magnético e não como o objeto de ação das forças exercidas por estes campos.

No que segue, queremos primeiro reescrever estas equações diferenciais em forma integral e, ao mesmo tempo, esclarecer seu significado físico. Como veremos, a consistência deste sistema de equações com as leis de força de Lorentz (3.2) e (3.3) e com a lei de conservação da carga (3.1) impõe as seguintes relações entre as várias constantes:

$$k_2 \;=\; \kappa \qquad \text{e} \qquad k_4 \;=\; \frac{k_3}{k_1} \;.$$

Além disso, costuma-se expressar as constantes k_1 e k_3 em termos de duas constantes denotadas por ϵ_0 e μ_0, como segue:

$$k_1 \;=\; \frac{1}{\epsilon_0} \qquad \text{e} \qquad k_3 \;=\; \kappa\mu_0 \;.$$

Assim, as *equações de Maxwell* assumem a forma

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0} \;, \tag{3.5-a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{E} \;=\; -\,\kappa\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;, \tag{3.5-b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \;, \tag{3.5-c}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{B} \;=\; \kappa\mu_0\left(\boldsymbol{j} \,+\, \epsilon_0\,\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \;. \tag{3.5-d}$$

Fixando ϵ_0 determina as unidades de medida para $\boldsymbol{E}$ e ρ, assim como para $\boldsymbol{j}$, enquanto que fixando μ_0 ou κ determina a unidade de medida para $\boldsymbol{B}$; esta questão será discutida na próxima seção.

3.1.1 Lei de Gauss

O conteúdo físico da primeira equação de Maxwell (3.5-a) é o *teorema do fluxo para o campo elétrico*:

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional à carga total contida no seu interior, i.e., para um volume V qualquer com bordo ∂V vale

$$\Phi^{\mathrm{e}}_{\partial V} \;\equiv\; \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3x\;\rho \;\equiv\; \frac{q_V}{\epsilon_0} \;. \tag{3.6}$$

De fato, o teorema de Gauss permite concluir que a equação (3.6) é equivalente à condição

$$\int_V d^3x\;\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3x\;\rho \;,$$

e como esta vale para volumes V quaisquer, à equação (3.5-a). Intuitivamente, o teorema do fluxo afirma que as fontes e sumidouros do campo elétrico são exatamente as cargas elétricas: é nelas que começam e terminam as linhas do campo elétrico.

Para campos estáticos, o teorema do fluxo segue diretamente da lei de Coulomb, segundo a qual o campo eletrostático de uma carga pontual q localizada no ponto $\boldsymbol{x}_0$ é dado por

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3} \;. \tag{3.7}$$

Após integração explícita sobre a superfície ∂B de uma bola B em torno do ponto $\boldsymbol{x}_0$ e de raio r, vem

$$\int_{\partial B} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \;=\; \frac{q}{\epsilon_0} \;,$$

independentemente de r. De fato, o mesmo resultado vale para a integral sobre a superfície ∂V de um volume V qualquer em torno do ponto $\boldsymbol{x}_0$

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \;=\; \frac{q}{\epsilon_0} \;,$$

pois se B é uma bola em torno do ponto $\boldsymbol{x}_0$ e de raio suficientemente pequeno para que $B \subset V$ e se $W = V \backslash B$, então $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} = 0$ sobre W e portanto

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \;-\! \int_{\partial B} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \;=\; \int_{\partial W} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \;=\; \int_{W} d^3x \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{C}} \;=\; 0 \;.$$

(Veja Fig. 3.1.)

Fig. 3.1: Independência do fluxo elétrico de uma carga pontual da forma específica da superfície

Passando de uma única carga pontual a um sistema de cargas pontuais e, mais geralmente, a uma distribuição qualquer de cargas, obtemos o teorema do fluxo da eletrostática.

Reciprocamente, para campos estáticos, a lei de Coulomb é uma conseqüência do teorema do fluxo, em conjunto com o fato de que, de acordo com a equação de Maxwell (3.5-b), campos eletrostáticos são irrotacionais. Sem querer entrar em detalhes, podemos apresentar a idéia do argumento da seguinte forma. Inicialmente, a propriedade de que campos eletrostáticos são irrotacionais garante que o campo elétrico gerado por uma carga pontual localizada no ponto $\boldsymbol{x}_0$ é o gradiente de um campo escalar que, devido à invariância das equações sob rotações no espaço em torno do ponto $\boldsymbol{x}_0$, depende apenas da variável radial $r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$. O teorema do fluxo garante então que este potencial deve ser proporcional a $1/r$.

Concluindo, observamos que a equação de Maxwell (3.5-a) exige a validade do teorema do fluxo também para campos elétricos que dependem do tempo; ela e o teorema do fluxo são frequentemente chamados a *lei de Gauss*.[4]

3.1.2 Ausência de cargas magnéticas

O conteúdo físico da terceira equação de Maxwell (3.5-c) é o *teorema do fluxo para o campo magnético*:

O fluxo do campo magnético através de uma superfície fechada se anula, i.e., para um volume V qualquer com bordo ∂V vale

$$\Phi^{\mathrm{m}}_{\partial V} \;\equiv\; \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \; . \tag{3.8}$$

De fato, o teorema de Gauss permite concluir que a equação (3.8) é equivalente à condição

$$\int_V d^3x \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \; ,$$

e como esta vale para volumes V quaisquer, à equação (3.5-c). Intuitivamente, o teorema do fluxo afirma que o campo magnético não possui fontes ou sumidouros, ou seja, não existem cargas magnéticas: as linhas do campo magnético são sempre fechadas.

3.1.3 Lei de indução de Faraday

O significado físico da segunda equação de Maxwell (3.5-b) é a *lei de indução de Faraday*:

A circulação do campo elétrico ao longo de uma curva fechada é proporcional à derivada total, em relação ao tempo, do fluxo magnético que a atravessa, i.e., para uma superfície S qualquer com bordo ∂S vale

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; -\,\kappa\,\frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \;\equiv\; -\,\kappa\,\frac{d}{dt}\,\Phi^{\mathrm{m}}_S \; . \tag{3.9}$$

Observe que não apenas o lado esquerdo mas também o lado direito desta equação depende apenas de ∂S e não de S mesmo; isto vale até para o próprio fluxo magnético Φ^{m}_S: De fato, se S_1 e S_2 são duas superfícies cujo bordo é a mesma curva γ, então juntas elas formam a superfície ∂V de um volume V, e usando o teorema de Gauss em conjunto com a equação de Maxwell (3.5-c), vem

$$\Phi^{\mathrm{m}}_{S_1} - \Phi^{\mathrm{m}}_{S_2} \;=\; \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; \int_V d^3x \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \; .$$

[4] É importante distinguir claramente entre a lei de Gauss e o teorema de Gauss, sendo que o último é usado para demonstrar a equivalência entre as duas formulações da primeira – a formulação diferencial (3.5-a) e a formulação integral (3.6).

(O sinal negativo no primeiro termo deve-se ao fato de que o campo normal sobre ∂V, orientado para fora, é necessariamente antiparalelo ao campo normal de uma das duas superfícies (digamos, S_2) se for escolhido a ser paralelo ao campo normal da outra (digamos, S_1), pois temos que exigir que ambas as superfícies sejam orientadas da mesma forma, segundo a regra usual da mão direita, relativamente ao seu bordo comum γ.)

A denominação "lei de indução" decorre do fato de que, segundo a equação de Maxwell (3.9), a variação temporal do fluxo magnético através de uma superfície S cujo bordo é formado por um fio condutor fechado γ induz uma voltagem

$$U_{\mathrm{ind}} \;=\; -\,\kappa\,\frac{d}{dt}\,\Phi_F^{\mathrm{m}} \tag{3.10}$$

ao longo do condutor. O sinal negativo nas equações (3.5-b), (3.9) e (3.10) indica que a corrente no condutor gerada por esta voltagem, em conjunto com o campo magnético por ela criado, tenta se opor à variação original do fluxo – um aspecto do fenômeno de indução conhecido como a *regra de Lenz*.

A equação de Maxwell (3.5-b) é a formulação diferencial de um caso particular da lei de indução – o caso onde a superfície S permanece constante no decorrer do tempo. De fato, nesta situação, o teorema de Stokes permite concluir que a equação (3.9) é equivalente à condição

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) \;=\; -\,\kappa\,\frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; -\,\kappa\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\;,$$

e como esta vale para superfícies S quaisquer, à equação (3.5-b).

No entanto, uma variação do fluxo magnético Φ_S^{m} através de uma superfície S pode resultar tanto de uma mudança do próprio campo magnético como de um movimento da superfície S e do seu bordo ∂S. Como veremos a seguir, a lei de indução de Faraday, na forma da equação (3.10), cobre ambos os casos, desde que – como já foi afirmado anteriormente e antecipado pela notação utilizada na equação de Maxwell (3.5-b) – a constante k_2 na equação de Maxwell (3.4-b) e a constante κ nas leis de força de Lorentz (3.2) e (3.3) sejam idênticas.

Para demonstrar esta afirmação, consideremos um fio condutor fechado, movimentado (e até deformado) de maneira arbitrária, dentro de um campo magnético $\boldsymbol{B}$. No instante t, calculamos o fluxo magnético $\Phi_{S(t)}^{\mathrm{m}}$ através de uma superfície $S(t)$ cujo bordo é uma curva fechada $\gamma(t)$ que descreve a localização do referido fio condutor neste instante. Ademais, suponhamos que no decorrer do tempo, por exemplo entre dois instantes t_1 e t_2, as curvas $\gamma(t)$ percorrem uma superfície $M(t_1,t_2)$ e as superfícies $S(t)$ percorrem um volume $V(t_1,t_2)$ – tipicamente o manto e o interior de um cilindro deformado, respectivamente. As curvas $\gamma(t)$ e as superfícies $S(t)$ serão parametrizadas em termos de um parâmetro τ e de dois parâmetros σ,τ, respectivamente, sendo que a escolha destes parâmetros não deve depender de t, o que garante que a superfície $M(t_1,t_2)$ e o volume $V(t_1,t_2)$ serão parametrizados por τ,t e por σ,τ,t, respectivamente, com $t_1\leq t\leq t_2$. (Veja Fig. 3.2.)

Fig. 3.2: Um fio condutor fechado movimentado que, em cada instante t, forma uma curva $\gamma(t)$ fechada que é o bordo de uma superfície $S(t)$ e que, entre dois instantes t_1 e t_2, percorre uma superfície $M(t_1,t_2)$ que inclui o volume $V(t_1,t_2)$.

Então para qualquer campo vetorial $\boldsymbol{A}$, vale

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(t)} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} \;&=\; \int d\tau\,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t,\tau)\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}(t,\tau))\ ,\\
\int_{S(t)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} \;&=\; \int d\sigma\,d\tau\,\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\sigma}(t,\sigma,\tau)\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t,\sigma,\tau)\right)\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}(t,\sigma,\tau))\\
\int_{M(t_1,t_2)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} \;&=\; \int_{t_1\leq t\leq t_2} dt\,d\tau\,\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t,\tau)\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(t,\tau)\right)\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}(t,\tau))\ .
\end{aligned}$$

Diferenciando a segunda destas três equações em relação a t e usando a regra da cadeia, vemos que a derivada total do fluxo de $\boldsymbol{A}$ através de uma superfície S em relação ao tempo pode ser escrita como a soma de duas contribuições – uma que reflete a dependência explícita de $\boldsymbol{A}$ e uma que reflete a dependência de S, em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A} \;=\; \int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \;+\; \frac{d'}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\ . \tag{3.11}$$

No cálculo da segunda contribuição, podemos fingir que $\boldsymbol{A}$ não apresente nenhuma dependência explícita do tempo, pois temos, por definição,

$$\frac{d'}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\,\bigg|_{t=t_0} \;=\; \frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}_{t_0}\,\bigg|_{t=t_0}\ , \tag{3.12}$$

onde $\boldsymbol{A}_{t_0}$ é definido por "congelamento" do argumento temporal de $\boldsymbol{A}$ no valor t_0:

$$\boldsymbol{A}_{t_0}(t,\boldsymbol{x}) \;=\; \boldsymbol{A}(t_0,\boldsymbol{x})\ . \tag{3.13}$$

Isso posto, podemos concluir da equação (3.5-c), em conjunto com o teorema de Gauss, que para uma campo magnético $\boldsymbol{B}$ estático, i.e., sem dependência explícita do tempo, vale

$$
\begin{aligned}
\int_{S(t_2)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \,-\int_{S(t_1)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \;&=\; \int_{V(t_1,t_2)} d^3x\;\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \,-\int_{M(t_1,t_2)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\\
&=\; -\int_{M(t_1,t_2)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\\
&=\; -\int_{t_1\leq t\leq t_2} dt\,d\tau\,\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t,\tau)\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(t,\tau)\right)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t,\tau))
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\Big|_{t=t_0} \;&=\; -\int d\tau\,\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t_0,\tau)\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(t_0,\tau)\right)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t_0,\tau))\\
&=\; -\int d\tau\,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t_0,\tau)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(t_0,\tau)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t_0,\tau))\right)\;.
\end{aligned}
$$

Para uma campo magnético arbitrário $\boldsymbol{B}$, podemos aplicar este argumento ao campo magnético estático $\boldsymbol{B}_{t_0}$ para concluir que

$$
\frac{d'}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\Big|_{t=t_0} \;=\; -\int d\tau\,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\tau}(t_0,\tau)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}(t_0,\tau)\times\boldsymbol{B}(t_0,\boldsymbol{x}(t_0,\tau))\right)\;,
$$

ou mais brevemente (usando que t_0 era arbitrário),

$$
-\frac{d'}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \int_\gamma d\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\;.
$$

Ademais, aplicando o teorema de Stokes à equação (3.4-b), obtemos

$$
-\,k_2\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \;=\; \int_\gamma d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}\;.
$$

Portanto, a equação (3.11) fornece para o lado direito da lei de indução a expressão

$$
-\,k_2\,\frac{d}{dt}\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \int_\gamma d\boldsymbol{x}\cdot\big(\boldsymbol{E}+k_2\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\big)\;.
$$

Por outro lado, em cada instante t fixo, a voltagem induzida entre dois pontos no fio condutor é igual ao trabalho virtual necessário para transportar uma carga pontual q que se encontra no fio de um ponto para o outro, dividido por q. Explicitamente, tendo em vista a lei de força (3.2), isto significa que a voltagem circular induzida ao longo do fio condutor, que corresponde ao trabalho virtual necessário para dar uma volta completa, dividido pelo valor da carga, vale

$$
U_{\mathrm{ind}} \;=\; \int_\gamma d\boldsymbol{x}\cdot\big(\boldsymbol{E}+\kappa\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\big)\;.
$$

Isto conclui a demonstração da afirmação: A equação (3.10) é válida geralmente, para campos magnéticos arbitrários e fios condutores fechados movimentados de maneira arbitrária, se e somente se $k_2=\kappa$.

3.1.4 Lei de Ampère

O significado físico da quarta equação de Maxwell (3.5-d) é a *lei de Ampère*, inclusive o *termo adicional de Maxwell*:

A circulação do campo magnético ao longo de uma curva fechada é composta de a) um termo proporcional à corrente total que a atravessa e b) um termo proporcional à derivada total, em relação ao tempo, do fluxo elétrico que a atravessa, i.e., para uma superfície S qualquer com bordo ∂S vale

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B} &= \kappa\mu_0 \left(\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} \right) \\ &\equiv \kappa\mu_0 \left(I_S \, + \, \epsilon_0 \, \frac{d}{dt} \, \Phi_S^{\mathrm{e}} \right) \; . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Novamente, observe que não apenas o lado esquerdo mas também o lado direito desta equação depende apenas de ∂S e não de S mesmo: De fato, se S_1 e S_2 são duas superfícies cujo bordo é a mesma curva γ, então juntas elas formam a superfície ∂V de um volume V, e usando o teorema de Gauss em conjunto com a equação de Maxwell (3.5-a) e a lei de conservação da carga (3.1), vem

$$\begin{aligned} \left(I_{S_1} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{d}{dt} \, \Phi_{S_1}^{\mathrm{e}} \right) \; &- \; \left(I_{S_2} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{d}{dt} \, \Phi_{S_2}^{\mathrm{e}} \right) \\ &= \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\boldsymbol{j} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \\ &= \int_V d^3x \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{j} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \; = \; 0 \; . \end{aligned}$$

A equação de Maxwell (3.5-d) é a formulação diferencial de um caso particular da lei de Ampère – o caso onde a superfície S permanece constante no decorrer do tempo. De fato, nesta situação, o teorema de Stokes permite concluir que a equação (3.14) é equivalente à condição

$$\begin{aligned} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) &= \kappa\mu_0 \left(\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} \right) \\ &= \kappa\mu_0 \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\boldsymbol{j} \, + \, \epsilon_0 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \; , \end{aligned}$$

e como esta vale para superfícies S quaisquer, à equação (3.5-d).

As equações (3.5-d) e (3.14) contêm, entre outros, o efeito magnético de correntes elétricas observado pela primeira vez por Oersted. Quantitativamente, este fenômeno é expresso pela *lei de fluxo de Ampère*, segundo a qual a circulação do campo magnético ao longo de uma curva fechada contornando uma corrente é proporcional a esta mesma corrente:

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B} \; = \; \kappa\mu_0 \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j} \; = \; \kappa\mu_0 \, I_S \; . \tag{3.15}$$

Em formulação diferencial, esta lei pode, usando o teorema de Stokes, ser escrita na forma

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \;=\; \kappa\mu_0\, \boldsymbol{j} \;. \tag{3.16}$$

No entanto, esta lei vale apenas para correntes estacionárias, pois para campos que dependem do tempo, ela é inconsistente com a lei de conservação da carga (3.1). De fato, aplicando a divergência à equação (3.16), obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0 \;=\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \;, \tag{3.17}$$

o que pode ser interpretado como a definição do termo "correntes estacionárias". No caso geral, a lei de fluxo de Ampère deve ser corrigida pela adição de um termo que venha a garantir a compatibilidade com a lei de conservação da carga:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \;=\; \kappa\mu_0\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{C} \qquad \text{com} \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{C} \;=\; -\,\kappa\mu_0\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \;=\; \kappa\mu_0\, \frac{\partial \rho}{\partial t} \;.$$

Devido à equação de Maxwell (3.5-a), uma escolha possível e natural é a seguinte:

$$\boldsymbol{C} \;=\; \kappa\epsilon_0\mu_0\, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \;.$$

Este é o termo adicional originalmente proposto por Maxwell que, subsequentemente, foi confirmado por todas as experiências.

Com esta modificação, a lei de conservação da carga (3.1) torna-se uma conseqüência das equações de Maxwell, desde que – como já foi afirmado anteriormente e antecipado pela notação utilizada na equação de Maxwell (3.5-d) – as constantes k_1, k_3 e k_4 nas equações de Maxwell (3.4-a) e (3.4-d) satisfaçam à condição $k_4 = k_3/k_1$. Note que sem o termo adicional de Maxwell, não haveria campos elétricos ou magnéticos não-triviais em regiões onde $\rho = 0$ e $\boldsymbol{j} = 0$; em particular, não haveria ondas eletromagnéticas propagando no vácuo. De fato, $\rho = 0$ e $\boldsymbol{j} = 0$ implicaria $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ e $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0$, assim como $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ e $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$, levando à conclusão de que $\boldsymbol{B} = 0$, assim como $\boldsymbol{E} = 0$.

Finalmente, queremos apresentar a formulação das equações de Maxwell em termos de formas diferenciais. Como regra geral, podemos afirmar que campos cuja interpretação física envolve quantidades obtidas por integração sobre subvariedades de dimensão p devem ser representados por p-formas. Assim, a densidade de carga ρ corresponde a uma 3-forma e a densidade de corrente $\boldsymbol{j}$ a uma 2-forma. Ademais, invariância das leis de força de Lorentz (3.2) e (3.3) sob as transformações de paridade P e de reversão temporal T exige que o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e o campo magnético $\boldsymbol{B}$ satisfaçam à seguinte lei de transformação:

$$P: \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) \;\to\; -\,\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) \;\to\; +\,\boldsymbol{B}(t,-\boldsymbol{x}) \end{array} \qquad \text{(Paridade)} \tag{3.18}$$

$$T: \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) \;\to\; +\,\boldsymbol{E}(-t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) \;\to\; -\,\boldsymbol{B}(-t,\boldsymbol{x}) \end{array} \qquad \text{(Reversão temporal)} \tag{3.19}$$

Isto significa que $\boldsymbol{E}$ é um campo vetorial *polar* enquanto que $\boldsymbol{B}$ é um campo vetorial *axial*. Usando o chamado operador estrela, podemos nos convencer que um campo vetorial polar corresponde a uma 1-forma enquanto que um campo vetorial axial resulta da aplicação do operador estrela a uma 2-forma. Portanto, introduzimos as seguintes formas diferenciais:

$$\bar{\rho} \;=\; \rho\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \,\in\, \Omega^3(E^3) \;, \tag{3.20}$$

$$\bar{\jmath} \;=\; \tfrac{1}{2}\, \epsilon_{klm}\, j_k\, \boldsymbol{e}_l \wedge \boldsymbol{e}_m \,\in\, \Omega^2(E^3) \;, \tag{3.21}$$

$$E \;=\; E_i\, \boldsymbol{e}_i \,\in\, \Omega^1(E^3) \;, \tag{3.22}$$

$$B \;=\; \tfrac{1}{2}\, \epsilon_{klm}\, B_k\, \boldsymbol{e}_l \wedge \boldsymbol{e}_m \,\in\, \Omega^2(E^3) \;. \tag{3.23}$$

Então as equações de Maxwell assumem a seguinte forma:

$$d \ast E \;=\; \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \;, \tag{3.24-a}$$

$$dE \;=\; -\,\kappa\, \frac{\partial B}{\partial t} \;, \tag{3.24-b}$$

$$dB \;=\; 0 \;, \tag{3.24-c}$$

$$d \ast B \;=\; \kappa \mu_0 \left(\bar{\jmath} + \epsilon_0\, \frac{\partial \ast E}{\partial t} \right) \;. \tag{3.24-d}$$

Observe que o operador estrela aparece apenas nas equações de Maxwell não homogêneas (3.24-a) e (3.24-d), enquanto que as equações de Maxwell homogêneas (3.24-b) e (3.24-c) podem ser escritas sem referência à métrica ou à orientação do espaço Euclideano.

3.2 Sistemas de unidades na eletrodinâmica

Como veremos nos Capítulos 4 e 5, as equações de Maxwell e as leis de força de Lorentz implicam que o módulo da força eletrostática $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas pela distância r é

$$|\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}| \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{q_1 q_2}{r^2} \;, \tag{3.25}$$

enquanto que o módulo da força magnetostática $\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$ entre dois fios condutores lineares, de comprimento l (no limite $l \to \infty$), alinhados parelelamente, separados pela distância r e percorridos por correntes estacionárias I_1 e I_2, é

$$|\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}| \;=\; \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi}\, \frac{2 l I_1 I_2}{r} \;. \tag{3.26}$$

A relação entre estas duas forças não tem dimensão (i.e., é uma quantidade puramente numérica) e não depende das unidades de força ou de carga escolhidas.

O quociente entre os dois pré-fatores que aparecem nestas duas equações pode ser escrito na forma

$$\kappa^2 \epsilon_0 \mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2} \;, \tag{3.27}$$

onde c tem a dimensão de uma velocidade. Esta velocidade é uma constante universal, independente do sistema de unidades utilizado e característica do fenômeno do eletromagnetismo como um todo; ela será identificada mais adiante como a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, ou seja, a velocidade da luz.

A partir da equação (3.27), os sistemas de unidades amplamente utilizados podem ser divididos em dois grupos:

3.2.1 Sistemas de unidades assimétricos

$$\kappa \;=\; 1 \;\;,\;\; \epsilon_0 \mu_0 \;=\; \frac{1}{c^2} \;. \tag{3.28}$$

A vantagem principal de sistemas de unidades deste grupo são a forma simples das leis de força de Lorentz e da lei de indução de Faraday, enquanto que a desvantagem principal reside no fato de que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ têm dimensões diferentes. Em considerações gerais de natureza teórica, particularmente na teoria da relatividade, isso se torna inconveniente – por exemplo devido ao fato de que, como veremos mais adiante, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ se misturam sob transformações que levam um sistema inercial para outro. Exemplos de sistemas de unidades assimétricos são:

- **Sistema de unidades eletrostático**:

$$\epsilon_0 \;=\; \frac{1}{4\pi} \;\;,\;\; \mu_0 \;=\; \frac{4\pi}{c^2} \;. \tag{3.29}$$

  Neste sistema, a lei de Coulomb assume uma forma particularmente simples. A dimensão da carga é $[q] = \sqrt{\text{força}} \cdot \text{distância}$.

- **Sistema de unidades magnetostático**:

$$\epsilon_0 \;=\; \frac{1}{4\pi c^2} \;\;,\;\; \mu_0 \;=\; 4\pi \;. \tag{3.30}$$

  Neste sistema, a lei de Biot-Savart (veja Capítulo 5) assume uma forma particularmente simples. A dimensão da carga é $[q] = \sqrt{\text{força}} \cdot \text{tempo}$.

- **SI = Sistema Internacional**: O SI é caracterizado pela introdução de uma unidade básica própria para o eletromagnetismo. Atualmente, esta é a unidade da corrente, o Ampère (A), fixado por lei (!) da seguinte forma: "A unidade básica de um Ampére (1 A) é a quantidade de uma corrente elétrica constante no tempo que, fluindo em dois fios condutores lineares, de comprimento infinito e de secção transversal circular com raio negligenciável, alinhados paralelamente no vácuo e separados pela distância de um metro (1 m), gera entre eles uma força eletrodinâmica de $2 \cdot 10^{-7}$ Newton por metro de comprimento dos condutores." A unidade da carga é então o Coulomb (C), i.e., o Ampère-segundo: 1C = 1As. Esta definição da unidade do Ampère equivale à condição

$$\epsilon_0 \;=\; \frac{10^7}{4\pi}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}} \quad , \quad \mu_0 \;=\; 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \;. \tag{3.31}$$

Para fins práticos, o SI é o mais adequado e hoje é quase universalmente aceito.

3.2.2 Sistemas de unidades simétricos

$$\kappa \;=\; \frac{1}{c} \quad , \quad \epsilon_0\mu_0 \;=\; 1 \;. \tag{3.32}$$

A vantagem principal de sistemas de unidades deste grupo reside no fato de que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ têm a mesma dimensão. Velocidades são medidas em unidades de c, e nas equações de Maxwell, a derivada em relação ao tempo sempre aparece na combinação com um fator $1/c$, sendo que o produto tem a dimensão de uma derivada em relação a uma variável espacial. Para fins práticos, no entanto, isto se torna inconveniente, pois a velocidade da luz é por muitas ordens de grandeza maior do que as velocidades que aparecem nas aplicações típicas. Exemplos de sistemas de unidades simétricos são:

- **Sistema de unidades de Gauss**:

  $$\epsilon_0 \;=\; \frac{1}{4\pi} \quad , \quad \mu_0 \;=\; 4\pi \;. \tag{3.33}$$

  Como no caso do sistema de unidades eletrostático, a lei de Coulomb assume uma forma particularmente simples, e a dimensão da carga é $[q] = \sqrt{\text{força}}\cdot\text{distância}$. Este sistema de unidades é amplamente utilizado na literatura teórica sobre eletrodinâmica.

- **Sistema de unidades de Heaviside**:

  $$\epsilon_0 \;=\; 1 \quad , \quad \mu_0 \;=\; 1 \;. \tag{3.34}$$

  Este é o sistema de unidades mais simples e mais simétrico de todos. Ele é amplamente utilizado na literatura sobre mecânica quântica, teoria quântica dos campos e física das partículas.

No que segue, não adotaremos nenhum sistema de unidades específico – apesar de que isso acarreta a necessidade de complementar as duas constantes tradicionais ϵ_0 e μ_0 por uma terceira constante κ, sujeita à equação (3.27) que estabelece sua relação com as outras duas e a velocidade universal c. Este procedimento possui a vantagem de que todas as fórmulas são válidas em qualquer sistema de unidades: ao invés do processo penoso de conversão de um sistema para um outro, precisamos apenas substituir os respectivos valores das constantes especificadas acima. De modo geral, é conveniente lembrar que

$$\kappa \;=\; 1 \qquad \text{no SI} \qquad , \tag{3.35}$$

$$\kappa \;=\; \frac{1}{c} \qquad \begin{array}{c}\text{no sistema de unidades}\\ \text{de Gauss ou Heaviside}\end{array} \qquad . \tag{3.36}$$

Para a conversão de fórmulas entre diferentes sistemas de unidades, a regra mais simples e útil é o fato de que, em qualquer sistema de unidades, as quantidades

$$\boldsymbol{E}_H = \sqrt{\epsilon_0}\,\boldsymbol{E} \;\; , \;\; \boldsymbol{B}_H = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{\mu_0}} \;\; , \;\; \rho_H = \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon_0}} \;\; , \;\; \boldsymbol{j}_H = \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{\epsilon_0}} \tag{3.37}$$

são idênticas às quantidades correspondentes do sistema de unidades de Heaviside e portanto satisfazem às equações de Maxwell e às leis de força de Lorentz neste sistema.

3.3 Condições iniciais e de fronteira

As equações de Maxwell, em conjunto com a lei de força de Lorentz, descrevem completamente os fenômenos eletromagnéticos macroscópicos e certamente constituem a maior conquista da física do século 19, de abrangência e profundidade comparável apenas às equações de movimento de Newton. Não foi à toa que Ludwig Boltzmann iniciou sua apresentação da teoria de Maxwell com a citação de Faust: "Foi um deus que escreveu estas linhas?" Contudo, o pleno impacto desta teoria se evendenciou apenas no início do século 20, devido à sua incompatibilidade com a mecânica Newtoniana. De fato, esta inconsistência foi a motivação principal para o desenvolvimento da teoria da relatividade, que acabou resolvendo o problema por uma modificação das equações de movimento de Newton, mantendo as equações de Maxwell inalteradas.

A afirmação de que as equações de Maxwell providenciam uma descrição completa dos fenômenos eletromagnéticos macroscópicos significa, em particular, que elas devem fixar a evolução temporal do campo eletromagnético, a partir de uma dada configuração inicial. Para discutir este problema inicial, ou problema de Cauchy, consideramos primeiro o caso de fontes externas, ou seja, a situação em que a distribuição de cargas e de correntes, $\rho(t, \boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x})$, é previamente dada e fixa. Fisicamente, isto significa que negligenciamos a retroação dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sobre a distribuição de cargas e correntes que os gera. Neste caso, as equações de Maxwell constituem um sistema não-homogêneo de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem para $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$. Portanto, dado o campo elétrico $\boldsymbol{E}(t_0, \boldsymbol{x})$ e o campo magnético $\boldsymbol{B}(t_0, \boldsymbol{x})$ no instante t_0, os valores do campo elétrico $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x})$ e do campo magnético $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{x})$ deveriam ser determinadas para todo t. Isto realmente é o caso, como podemos ver usando o seguinte argumento. Devido às equações (3.5-b) e (3.5-d), os valores de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ num determinado instante t_0 determinam os valores das derivadas parciais $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ e $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ neste mesmo instante t_0. Diferenciando as equações (3.5-b) e (3.5-d) n vezes em relação ao tempo, concluímos da mesma forma que as n-ésimas derivadas parciais de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ em relação ao tempo no instante t_0 já determinam as $(n + 1)$-ésimas derivadas parciais de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ em relação ao tempo no instante t_0. Por indução sobre n, segue que os valores de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ num determinado instante t_0 determinam completamente os valores de todas as derivadas parciais de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ em relação ao tempo neste mesmo instante t_0. Portanto, se os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ dependem analiticamente do tempo, i.e., se podem ser expandidos em séries de Taylor na variável t com raio de convergência maior do que 0, então as equações (3.5-b) e (3.5-d) já fixam a evolução temporal do campo eletromagnético. (Usando teoremas matemáticos mais sofisticados da teoria de equações diferenciais parciais, a hipótese de analiticidade dos campos na variável t pode ser relaxada, sem afetar a conclusão de existência e unicidade da solução.) Por outro lado, as equações (3.5-a) e (3.5-c) não contêm derivadas parciais em relação ao tempo e portanto não são equações de evolução mas devem ser interpretadas como vínculos que definem quais são as configurações de campo admissíveis, em cada instante fixo. A existência de vínculos gera um problema de consistência, pois torna-se necessário verificar que campos satisfazendo aos vínculos (3.5-a) e (3.5-c) no instante t_0 e evoluindo segundo as equações (3.5-b) e (3.5-d) também satisfarão aos vínculos (3.5-a) e (3.5-c) em qualquer outro instante t. Isso no entanto segue da lei de conservação da carga (3.1), pois conforme a equação (3.5-d), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa\epsilon_0\mu_0}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{B}) = 0\ , \end{aligned}$$

e segundo a equação (3.5-b), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{E}) = 0\ .$$

Ao invés de $\boldsymbol{E}(t_0, \boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{B}(t_0, \boldsymbol{x})$, podemos também usar $\boldsymbol{E}(t_0, \boldsymbol{x})$ e $(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)(t_0, \boldsymbol{x})$, ou $\boldsymbol{B}(t_0, \boldsymbol{x})$ e $(\partial \boldsymbol{B}/\partial t)(t_0, \boldsymbol{x})$, como condições iniciais, desde que sejam respeitados os vínculos pertinentes

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{E}\,(t_0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(t_0, \boldsymbol{x}) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,(t_0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\frac{\partial \rho}{\partial t}\,(t_0, \boldsymbol{x})\ ,$$

ou

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B}\,(t_0, \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,(t_0, \mathbf{x}) = 0\ .$$

De fato, no primeiro caso, as equações (3.5-c) e (3.5-d) fixam $\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{B}$ no instante t_0, o que sob condições de fronteira apropriadas (como, por exemplo, decaimento suficientemente rápido ao infinito) também determina $\boldsymbol{B}$ no instante t_0. De forma análoga, no segundo caso, as equações (3.5-a) e (3.5-b) fixam $\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{E}$ no instante t_0, o que sob condições de fronteira apropriadas (como, por exemplo, decaimento suficientemente rápido ao infinito) também determina $\boldsymbol{E}$ no instante t_0.

Quando a distribuição de cargas e de correntes, ρ e $\boldsymbol{j}$, não está fixa mas está sujeita à retroação do próprio campo eletromagnético, coloca-se a tarefa de resolver as equações de movimento acopladas de um sistema mecânico-eletromagnético, onde as forças mecânicas são dadas pela força de Lorentz e talvez por outras forças de origem não eletromagnética. Trata-se de um sistema complexo e altamente não linear de equações diferenciais para um sistema dinâmico com um número infinito de graus de liberdade, onde a existência e unicidade da solução do problema inicial só pode ser garantida para pequenos intervalos de tempo, enquanto que a questão da estabilidade do sistema para grandes intervalos de tempo constitui um problema extremamente difícil.

Ao invés ou além da condição de decaimento suficientemente rápido ao infinito, os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ frequentemente são sujeitos a outras condições de fronteira. Como exemplo importante, consideremos a situação em que esta fronteira é uma superfície S carregando uma densidade superficial de carga ω ou uma densidade superficial de corrente $\boldsymbol{k}$. Localmente, podemos então decompor o espaço em dois domínios V_1 e V_2, separados por S. Supondo que os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, assim como suas derivadas parciais em relação ao tempo, são infinitamente diferenciáveis no interior de cada uma das duas regiões V_1 e V_2 e apresentam, no máximo, descontinuidades finitas na interface S entre elas, obtemos as seguintes condições de contato para $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \;=\; \frac{\omega}{\epsilon_0} \quad , \quad \boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \;=\; 0 \; , \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \;=\; 0 \quad , \quad \boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \;=\; \kappa\mu_0\, \boldsymbol{k} \; . \tag{3.39}$$

Aqui, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{B}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{B}_2$ são os valores de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ na superfície S obtidos por passagem ao limite a partir do interior de V_1 e de V_2, respectivamente, e $\boldsymbol{n}_{12}$ é o campo vetorial normal a S, direcionado de V_2 para V_1. De fato, as equações para os componentes normais

$$\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{n}} - \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{n}} \;=\; \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{n}} - \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{n}} \;=\; \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)$$

resultam das equações de Maxwell (3.5-a) e (3.5-c) por integração sobre a superfície do pequeno volume $\tilde{V}$ mostrado na Fig. 3.3, onde o adjetivo "pequeno" se refere à extensão d do volume $\tilde{V}$ em direção da normal $\boldsymbol{n}_{12}$ à superfície S:

Fig. 3.3: Cálculo da descontinuidade do componente normal do campo elétrico e do campo magnético na interface entre duas regiões quando esta interface carrega uma densidade superficial de carga e uma densidade superficial de corrente dada, através do teorema de Gauss: veja texto

$$\begin{aligned}
\int_{S\cap\tilde{V}} d\sigma\; \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \;&=\; \lim_{d\to 0} \int_{\partial\tilde{V}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; \lim_{d\to 0} \int_{\tilde{V}} d^3x\; \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{E} \\
&=\; \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{d\to 0} \int_{\tilde{V}} d^3x\; \rho \;=\; \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S\cap\tilde{V}} d\sigma\; \omega \; , \\
\int_{S\cap\tilde{V}} d\sigma\; \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \;&=\; \lim_{d\to 0} \int_{\partial\tilde{V}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; \lim_{d\to 0} \int_{\tilde{V}} d^3x\; \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \; .
\end{aligned}$$

De forma análoga, as equações para os componentes tangenciais

$$\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{t}} - \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{t}} \;=\; \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{t}} - \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{t}} \;=\; \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)$$

(onde $\boldsymbol{t}$ percorre os possíveis vetores tangentes à superfície S) resultam das equações de Maxwell (3.5-b) e (3.5-d) por integração sobre o bordo da pequena superfície $\tilde{S}$ ortogonal a t mostrada na Fig. 3.4, onde o adjetivo "pequeno" se refere à extensão d da superfície $\tilde{S}$ em direção da normal $\boldsymbol{n}_{12}$ à superfície S:

Fig. 3.4: Cálculo da descontinuidade do componente tangencial do campo elétrico e do campo magnético na interface entre duas regiões quando esta interface carrega uma densidade superficial de carga e uma densidade superficial de corrente dada, através do teorema de Stokes: veja texto

$$\begin{aligned}
\int_{S \cap \tilde{S}} dx \; (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}_{12}) \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \;&=\; \lim_{d \to 0} \int_{\partial \tilde{S}} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; \lim_{d \to 0} \int_{\tilde{S}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \\
&=\; -\,\kappa \lim_{d \to 0} \int_{\tilde{S}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;=\; 0 \;, \\
\int_{S \cap \tilde{S}} dx \; (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}_{12}) \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \;&=\; \lim_{d \to 0} \int_{\partial \tilde{S}} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B} \;=\; \lim_{d \to 0} \int_{\tilde{S}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \\
&=\; \kappa\mu_0 \lim_{d \to 0} \int_{\tilde{S}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\boldsymbol{j} \,+\, \epsilon_0 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \;=\; \kappa\mu_0 \int_{S \cap \tilde{S}} dx \; \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{t} \;.
\end{aligned}$$

3.4 Potenciais e transformações de calibre

A solução das equações de Maxwell (3.5-a)–(3.5-d) pode ser drasticamente simplificada pela introdução de *potenciais.* Primeiro, a equação homogênea (3.5-c) é equivalente à existência de um campo vetorial $\boldsymbol{A}$ tal que

$$\boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \;. \tag{3.40}$$

Este campo é chamado o *potencial vetorial.* Substituindo a equação (3.40) na equação homogênea (3.5-b), vem

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{E} \,+\, \kappa \, \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \;=\; 0 \;, \tag{3.41}$$

o que é equivalente à existência de um campo escalar ϕ tal que

$$\boldsymbol{E} \;=\; -\,\boldsymbol{\nabla}\phi \,-\, \kappa\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \;. \tag{3.42}$$

Este campo é chamado o *potencial escalar*.

Os potenciais $\boldsymbol{A}$ e ϕ não são unicamente determinados pelos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$. Pelo contrário, outros potenciais $\boldsymbol{A}'$ e ϕ' podem levar aos mesmos campos, o que será o caso se e somente se eles provêm dos potenciais originais $\boldsymbol{A}$ e ϕ através de uma *transformação de calibre*

$$\boldsymbol{A} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{A}' \;=\; \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \quad , \quad \phi \;\longrightarrow\; \phi' \;=\; \phi \,-\, \kappa\,\frac{\partial \chi}{\partial t} \;, \tag{3.43}$$

onde χ pode ser uma função arbitrária de t e $\boldsymbol{x}$. Esta liberdade pode ser utilizada para submeter os potenciais a condições suplementares apropriadas – um procedimento denominado *escolha de calibre*. As transformações de calibre que ainda são compatíveis com uma dada condição de calibre são chamadas *transformações de calibre residuais*.

As duas escolhas de calibre mais importantes são as seguintes.

- **Calibre de Coulomb**:
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \;=\; 0 \;. \tag{3.44}$$
As transformações de calibre residuais são as transformações de calibre (3.43) sujeitas à condição suplementar
$$\Delta\chi \;=\; 0 \;. \tag{3.45}$$

- **Calibre de Lorentz**:
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \,+\, \frac{1}{\kappa c^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} \;=\; 0 \;. \tag{3.46}$$
As transformações de calibre residuais são as transformações de calibre (3.43) sujeitas à condição suplementar
$$\Box\chi \;\equiv\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \,-\, \Delta\chi \;=\; 0 \;. \tag{3.47}$$

No próximo passo, substituímos as equações (3.40) e (3.42), em conjunto com a equação (3.27) e a identidade

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) \;=\; \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) \,-\, \Delta\boldsymbol{A} \;,$$

nas equações de Maxwell não homogêneas (3.5-a) e (3.5-d), obtendo

$$\Delta\phi \,+\, \kappa\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\rho}{\epsilon_0} \;, \tag{3.48}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} \,-\, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) \,-\, \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} \,-\, \frac{1}{\kappa c^2}\,\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \;=\; -\,\kappa\mu_0\,\boldsymbol{j} \;. \tag{3.49}$$

No calibre de Coulomb, vem

$$\Delta\phi \;=\; -\,\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.50}$$

e

$$\Box \boldsymbol{A} \;\equiv\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \,-\, \Delta \boldsymbol{A} \;=\; \kappa\mu_0\,\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}} \;, \tag{3.51}$$

onde

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}} \;=\; \boldsymbol{j} \,-\, \epsilon_0\,\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{3.52}$$

(veja a equação (3.27)) é a parte *transversal*, i.e., a parte sem divergência, da densidade de corrente:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{j}_{\mathrm{t}} \;=\; 0 \;. \tag{3.53}$$

Esta última relação pode ser demonstrada tomando a divergência da equação (3.51) e substituindo a condição (3.44) ou, ainda, tomando a divergência da equação (3.52) e substituindo a equação (3.50) em conjunto com a lei de conservação da carga (3.1):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{j}_{\mathrm{t}} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{j} \,-\, \epsilon_0\,\Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \;=\; \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{j} \,+\, \frac{\partial\rho}{\partial t} \;=\; 0 \;.$$

A equação (3.50) coincide com a equação correspondente da eletrostática, sendo que a variável tempo aparece apenas como um parâmetro adicional. Portanto, o potencial escalar correspondente ϕ é chamado o *potencial de Coulomb instantâneo*. O calibre de Coulomb é particularmente útil quando $\rho \equiv 0$, pois isto permite escolher $\phi \equiv 0$.

No calibre de Lorentz, vem

$$\Box\phi \;\equiv\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \,-\, \Delta\phi \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_0} \;, \tag{3.54}$$

$$\Box \boldsymbol{A} \;\equiv\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \,-\, \Delta \boldsymbol{A} \;=\; \kappa\mu_0\,\boldsymbol{j} \;. \tag{3.55}$$

Neste caso, as equações de Maxwell não homogêneas assumem uma forma particularmente simétrica e simples, tornando-se um sistema de equações de onda não homogêneas e independentes.

3.5 Energia do campo eletromagnético

Nesta seção, queremos estabelecer a equação de balanço para a energia do campo eletromagnético. A filosofia geral subjacente à teoria dos campos requer que a energia do campo eletromagnético seja distribuída continuamente no espaço e possa escoar no espaço – exatamente como a energia de um fluido. Segundo o Capítulo 2, esperamos portanto uma equação de balanço para a energia da forma

$$\frac{\partial\rho^E}{\partial t} \,+\, \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{j}^E \;=\; q^E \;, \tag{3.56}$$

onde ρ^E, $\boldsymbol{j}^E$ e q^E são, respectivamente, a densidade, a densidade de fluxo e a densidade de produção de energia. Sendo o princípio da conservação da energia uma das leis mais fundamentais da física, consubstanciada por inúmeras experiências, o único candidato para q^E é a energia, por unidade de volume e de tempo, que é transferida do campo eletromagnético para um outro sistema físico, durante a interação entre ambos. Essa energia pode ser deduzida da lei de força de Lorentz. Por exemplo, segundo a equação (3.2), o trabalho exercido pelos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sobre uma carga pontual q entre os instantes t_1 e t_2 é

$$W(t_1, t_2) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt\; \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \;=\; q \int_{t_1}^{t_2} dt\; \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\;.$$

Note que o campo magnético não exerce trabalho. Para uma distribuição geral de cargas e correntes, obtemos portanto

$$q^E \;=\; -\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\;, \tag{3.57}$$

onde o sinal negativo expressa o fato de que a energia transferida para a referida distribuição de cargas e correntes corresponde a uma diminuição da energia do campo eletromagnético. Utilizando as equações de Maxwell (3.5-d) e (3.5-b), em conjunto com a identidade

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \;=\; (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B} \,-\, \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\;,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
-\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \;&=\; \epsilon_0\,\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \,-\, \frac{1}{\kappa\mu_0}\,\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \\
&=\; \epsilon_0\,\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \,-\, \frac{1}{\kappa\mu_0}\big((\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B} \,-\, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\big) \\
&=\; \epsilon_0\,\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \,+\, \frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \,+\, \frac{1}{\kappa\mu_0}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \\
&=\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}^2 \,+\, \frac{1}{2\mu_0}\,\boldsymbol{B}^2\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\kappa\mu_0}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)\;.
\end{aligned}$$

Isto é uma equação de balanço do tipo (3.56), com a densidade de energia

$$\rho^E \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}^2 \,+\, \frac{1}{2\mu_0}\,\boldsymbol{B}^2 \tag{3.58}$$

e a densidade de fluxo de energia

$$\boldsymbol{j}^E \;=\; \frac{1}{\kappa\mu_0}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{3.59}$$

idêntico com o tal chamado *vetor de Poynting*, geralmente denotado por $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S} \;=\; \frac{1}{\kappa\mu_0}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\;. \tag{3.60}$$

Conforme a equação (3.58), a energia de campo U dentro de um volume V se decompõe na soma de uma parte elétrica e de uma parte magnética,

$$U \;=\; U^{\mathrm{e}} + U^{\mathrm{m}} \;, \tag{3.61}$$

com

$$U^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{E}^2 \;, \tag{3.62}$$

e

$$U^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \; \boldsymbol{B}^2 \;. \tag{3.63}$$

No caso de campos estáticos, a energia de campo pode ser representada de forma diferente, em termos do potencial escalar ϕ e do potencial vetorial $\boldsymbol{A}$, onde $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$. Se ϕ e $\boldsymbol{A}$ apresentam decaimento suficientemente rápido ao infinito, podemos integrar por partes e assim escrever a energia eletrostática na forma

$$U^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{E}^2 \;=\; -\,\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \; (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E})\, \phi \;,$$

ou seja,

$$U^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{1}{2} \int d^3x \; \rho\phi \;, \tag{3.64}$$

e a energia magnetostática na forma

$$U^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \; \boldsymbol{B}^2 \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \; \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \; (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} \;,$$

ou seja,

$$U^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{\kappa}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \;. \tag{3.65}$$

Se as cargas e as correntes se decompõem em duas partes, conforme

$$\rho \;=\; \rho_1 + \rho_2 \quad , \quad \boldsymbol{j} \;=\; \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 \;, \tag{3.66}$$

então devido à linearidade das equações de Maxwell, os campos por elas gerados também se decompẽm em duas partes, conforme

$$\boldsymbol{E} \;=\; \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \quad , \quad \boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 \;. \tag{3.67}$$

O mesmo vale para os potenciais:

$$\phi \;=\; \phi_1 + \phi_2 \quad , \quad \boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 \;. \tag{3.68}$$

Como exemplo típico, imaginamos que ρ_1, $\boldsymbol{j}_1$ e ρ_2, $\boldsymbol{j}_2$ estejam localizadas em regiões disjuntas e distantes V_1 e V_2, respectivamente. Neste caso, obtemos das equações (3.62) e (3.63)

$$U^{\mathrm{e}} \;=\; U_1^{\mathrm{e}} + U_2^{\mathrm{e}} + U_{12}^{\mathrm{e}} \;, \tag{3.69}$$

e

$$U^{\mathrm{m}} \;=\; U_1^{\mathrm{m}} + U_2^{\mathrm{m}} + U_{12}^{\mathrm{m}} \;, \tag{3.70}$$

onde

$$U_1^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{E}_1^2 \quad , \quad U_2^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{E}_2^2 \;, \tag{3.71}$$

$$U_{12}^{\mathrm{e}} \;=\; \epsilon_0 \int d^3x \; \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \;, \tag{3.72}$$

e

$$U_1^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \; \boldsymbol{B}_1^2 \quad , \quad U_2^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \; \boldsymbol{B}_2^2 \;, \tag{3.73}$$

$$U_{12}^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{1}{\mu_0} \int d^3x \; \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2 \;. \tag{3.74}$$

No caso estático, podemos reescrever estas expressões na forma

$$U_1^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{1}{2} \int d^3x \; \rho_1 \phi_1 \quad , \quad U_2^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{1}{2} \int d^3x \; \rho_2 \phi_2 \;, \tag{3.75}$$

$$U_{12}^{\mathrm{e}} \;=\; \int d^3x \; \rho_1 \phi_2 \;=\; \int d^3x \; \rho_2 \phi_1 \;, \tag{3.76}$$

e

$$U_1^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{\kappa}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1 \quad , \quad U_2^{\mathrm{m}} \;=\; \frac{\kappa}{2} \int d^3x \; \boldsymbol{j}_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 \;, \tag{3.77}$$

$$U_{12}^{\mathrm{m}} \;=\; \kappa \int d^3x \; \boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \;=\; \kappa \int d^3x \; \boldsymbol{j}_2 \cdot \boldsymbol{A}_1 \;. \tag{3.78}$$

Assim, vemos que tanto a energia elétrica como a energia magnética são compostas de três contribuições: das *auto-energias* das duas distribuições de cargas e correntes e da *energia de interação* que leva em conta as forças que cada uma delas exerce sobre a outra; de fato, as expressões (3.76) e (3.78) se mostram particularmente úteis para discutir as forças exercidas por campos eletromagnéticos. Concluímos, portanto, que a energia elétrica e a energia magnética *não são aditivas*, i.e., a energia da distribuição total não é igual à soma das energias das duas distribuições parciais, sendo que esta deve ser complementada pela energia de interação, como termo de interferência.

Uma idéia que decorre naturalmente dessa discussão seria considerar a expressão

$$\tilde{\rho}^E \;=\; \tfrac{1}{2} \big(\rho\phi + \kappa \, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \big) \tag{3.79}$$

como uma nova "densidade de energia", já que ela leva à mesma energia total que a densidade de energia ρ^E introduzida anteriormente. Contudo, existe uma série de motivos para afirmar que a expressão ρ^E é mais adequada do que a expressão $\tilde{\rho}^E$:

1. Ao contrário de ρ^E, $\tilde{\rho}^E$ fornece a energia total do campo eletromagnético apenas no caso estático.
2. Ao contrário de ρ^E, $\tilde{\rho}^E$ não é invariante sob transformações de calibre (3.43) dos potenciais, que deixam os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ invariantes.
3. Ao contrário de ρ^E, $\tilde{\rho}^E$ não é positiva (semi-) definida.
4. Ao contrário de ρ^E, $\tilde{\rho}^E$ se anula quando $\rho = 0$ e $\boldsymbol{j} = 0$. Em outras palavras, se $\tilde{\rho}^E$ fosse a expressão correta, a energia do campo eletromagnético seria localizada exclusivamente em regiões onde há cargas e correntes, o que certamente não é compatível com a realidade que observamos. Por exemplo, todos nós sentimos, quase diariamente e literalmente na pele, as consequências do transporte de energia por radiação eletromagnética propagando no vácuo, do sol para a terra.

De forma geral, observa-se que a equação de balanço por si só é insuficiente para determinar a densidade de energia e a densidade de fluxo de energia. De fato, dado campos vetoriais $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{F}$ arbitrários, temos que

$$\hat{\rho}^E \;=\; \rho^E + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C} \qquad \text{e} \qquad \hat{\boldsymbol{j}}^E \;=\; \boldsymbol{j}^E - \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} \tag{3.80}$$

satisfarão à mesma equação de balanço que ρ^E e $\boldsymbol{j}^E$. Ademais, se $\boldsymbol{C}$ apresentar decaimento suficientemente rápido ao infinito, as duas densidades resultam na mesma energia total:

$$\int d^3x\;\hat{\rho}^E \;=\; \int d^3x\;\rho^E\;. \tag{3.81}$$

E mesmo quando fixarmos a densidade de energia, a densidade de fluxo de energia ainda não será unicamente determinada, pois o termo adicional $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$ permanece livre. Frisa-se que este termo adicional contribui como termo de bordo apenas quando integrarmos sobre superfícies abertas, pois a equação (3.80), com $\boldsymbol{C} = 0$, implica que para qualquer superfície S, vale

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}^E - \int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{j}^E \;=\; \int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) \;=\; \int_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}\;,$$

e esta integral se anula trivialmente quando S for fechada. De fato, devido à equação de balanço, o fluxo de energia através do bordo de um volume já é determinado por ρ^E e q^E, enquanto que o fluxo de energia através de uma superfície S aberta depende explicitamente de $\boldsymbol{F}$.

Afinal de contas, a questão de quais são as expressões corretas para a densidade e a densidade de fluxo de energia do campo eletromagnético deve ser decidida no laboratório, já que ρ^E e $\boldsymbol{j}^E$ são quantidades mensuráveis, mesmo que os procedimentos experimentais para sua determinação sejam mais difíceis do que no caso da densidade de carga ρ e de corrente $\boldsymbol{j}$, onde desde o princípio não há dúvidas quanto à corretude de sua definição. O resultado é que as expressões corretas para ρ^E e $\boldsymbol{j}^E$ são dadas pelas fórmulas (3.58) e (3.59): além de serem simples e naturais, mesmo após generalização ao âmbito da relatividade geral, elas passaram todos os testes experimentais.

3.6 Momento e momento angular do campo eletromagnético

Para o momento e o momento angular do campo eletromagnético, esperamos equações de balanço da forma

$$\frac{\partial \rho_i^P}{\partial t} + \nabla_k \, j_{ik}^P \;=\; f_i \;, \tag{3.82}$$

$$\frac{\partial \rho_i^L}{\partial t} + \nabla_k \, j_{ik}^L \;=\; t_i \;, \tag{3.83}$$

onde ρ_i^P/ρ_i^L e j_{ik}^P/j_{ik}^L são, respectivamente, a densidade do i-ésimo componente do momento/momento angular e o k-ésimo componente da densidade de fluxo do i-ésimo componente do momento/momento angular do campo eletromagnético, enquanto que f_i/t_i denota o i-ésimo componente da densidade de força/torque.

Tratemos primeiro da equação de balanço para o momento. O lado direito da equação (3.82) é dado pela lei de força de Lorentz (3.3):

$$f_i \;=\; -\,\rho E_i \,-\, \kappa\,\epsilon_{ikl}\, j_k B_l \;. \tag{3.84}$$

Novamente, o sinal negativo expressa o fato de que o momento transferido para a distribuição de cargas e correntes corresponde a uma diminuição do momento do campo eletromagnético. Utilizando todas as equações de Maxwell e após manipulações semelhantes às executadas no caso do balanço de energia, chegamos às expressões

$$\rho_i^P \;=\; \kappa\epsilon_0\,\epsilon_{ikl}\, E_k B_l \tag{3.85}$$

para a densidade de momento e

$$j_{ik}^P \;=\; \epsilon_0 \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \delta_{ik} \,-\, E_i E_k \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2 \delta_{ik} \,-\, B_i B_k \right) \tag{3.86}$$

para a densidade de fluxo de momento; esta é – a menos de um sinal – idêntica ao *tensor de estresse de Maxwell*, geralmente denotado por T:

$$T_{ik} \;=\; \epsilon_0 \left(E_i E_k \,-\, \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \delta_{ik} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_k \,-\, \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2 \delta_{ik} \right) \;. \tag{3.87}$$

Obviamente, a densidade de momento do campo eletromagnético é – a menos de um fator $1/c^2$ – idêntica à sua densidade de fluxo de energia, ou seja, ao vetor de Poynting (veja a equação (3.60)), enquanto que a densidade de fluxo de momento, conforme explicado no Capítulo 2, pode ser interpretada como um tensor de pressão. Portanto, o tensor de estresse de Maxwell descreve, para cada volume V, o momento do campo eletromagnético entrando em V, ou seja, a força total de pressão $\boldsymbol{F}$ que o campo eletromagnético exerce sobre V:

$$F_i \;=\; \int_{\partial V} d\sigma_k \; T_{ik} \;=\; \int_V d^3x \; \nabla_k T_{ik} \;. \tag{3.88}$$

Qualitativa e intuitivamente, as forças exercidas pelo campo eletromagnético podem ser deduzidas de desenhos de linhas de campo, atribuindo às linhas de campo a tendência geral de se encurtar e de se repelir mutualmente.

Como exemplo elementar, consideremos um campo elétrico ou magnético homogêneo e estático, paralelo ao eixo 3, dentro de um volume V. Temos então $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_3$ (e $\boldsymbol{B}=0$) ou $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$ (e $\boldsymbol{E}=0$) e portanto

$$T_{ik} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,E^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad T_{ik} \;=\; \frac{1}{2\mu_0}\,B^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Isto significa que ao longo do eixo 1 e do eixo 2, i.e., transversalmente às linhas de campo, há momento saindo do volume V, enquanto que ao longo do eixo 3, i.e., ao longo das linhas de campo, há momento entrando no volume V, ou seja, observamos forças agindo sobre o volume V que exercem tração ao longo das linhas de campo e pressão transversalmente às linhas de campo. (Veja Fig. 3.5.)

Fig. 3.5: Forças exercidas pelo campo eletromagnético sobre um volume: tração ao longo das linhas de campo, pressão transversalmente às linhas de campo

Uma propriedade notável da expressão para a densidade de fluxo de momento encontrada na equação (3.86) é sua simetria:

$$j^P_{ik} \;=\; j^P_{ki} \;. \tag{3.89}$$

Como foi demonstrado no Capítulo 2, esta simetria permite satisfazer a equação de balanço para o momento angular pondo

$$t_i \;=\; \epsilon_{ijl}\,x_j\,f_l \;. \tag{3.90}$$

$$\rho^L_i \;=\; \epsilon_{ijl}\,x_j\,\rho^P_l \;, \tag{3.91}$$

$$j^L_{ik} \;=\; \epsilon_{ijl}\,x_j\,j^P_{lk} \;, \tag{3.92}$$

São estas as expressões esperadas em qualquer teoria onde os campos carregam apenas momento angular orbital, sem momento angular próprio. Aqui, no entanto, o resultado surpreende, pois – falando na linguagem da teoria quântica – o fóton tem spin 1 e portanto possui um momento angular próprio, com módulo $\hbar$. Se, por outro lado, a equação (3.83), em conjunto com as equações (3.90)–(3.92) (e (3.84)–(3.86)) fosse apenas a equação de balanço para a parte orbital do momento angular e se a equação de balanço para o momento angular total fosse outra, teríamos para o campo eletromagnético duas quantidades diferentes e separadamente conservadas com a natureza de um momento angular, o que seria difícil de entender.

De qualquer modo, coloca-se a questão se a densidade e a densidade de fluxo de momento e de momento angular para o campo eletromagnético são realmente dadas pelas equações (3.85), (3.84) e (3.91), (3.92), pois como já observamos no caso da energia, estas quantidades não são determinadas unicamente pela equação de balanço. De fato, dado campos tensoriais C_{ik} e F_{ikl} arbitrários, sujeitos apenas à condição de antisimetria $F_{ikl} + F_{ilk} = 0$, temos que

$$\hat{\rho}_i \;=\; \rho_i \,+\, \nabla_k\, C_{ik} \qquad \text{e} \qquad \hat{\jmath}_{ik} \;=\; j_{ik} \,-\, \frac{\partial C_{ik}}{\partial t} \,+\, \nabla_l\, F_{ikl} \tag{3.93}$$

satisfarão à mesma equação de balanço que ρ_i e j_{ik}. E mesmo quando fixarmos a densidade, a densidade de fluxo ainda não será unicamente determinada, pois o termo adicional $\nabla_l\, F_{ikl}$ permanece livre. Novamente, este termo adicional contribui como termo de bordo apenas quando integrarmos sobre superfícies abertas, pois a equação (3.93), com $C_{ik}\!=\!0$, implica que para qualquer superfície S,

$$\int_S d\sigma_k\ \hat{\jmath}_{ik} \,-\, \int_S d\sigma_k\ j_{ik} \;=\; \int_S d\sigma_k\ \nabla_l F_{ikl} \;=\; \int_{\partial S} dx_m\ F_{im}\ ,$$

onde $F_{im} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{mkl}\,F_{ikl}$, e esta integral se anula trivialmente quando S for fechada. Em particular, a pressão exercida sobre uma superfície depende de F_{ikl} quando esta for aberta, mas não quando for fechada.

Como no caso da energia, a questão de quais são as expressões corretas para a densidade e a densidade de fluxo de momento e de momento angular do campo eletromagnético deve ser decidida no laboratório. As expressões dadas acima passaram este teste.