2 Elementos da Hidrodinâmica

Neste capítulo, queremos apresentar algumas noções fundamentais da teoria dos fluidos. Na física, a noção geral de "fluido" engloba líquidos e gases. Trata-se de uma teoria de campos particularmente simples e concreta, na qual o campo fundamental é o *campo de velocidades* $\boldsymbol{v}$ cujo valor $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ no instante t e no ponto $\boldsymbol{x}$ indica a velocidade de fluxo do fluido neste instante e neste ponto. *Linhas de fluxo* são curvas cujo vetor tangente, em cada um dos seus pontos, coincide com o valor do campo de velocidades neste ponto, num determinado instante t. Em termos matemáticos, são curvas $\tau \mapsto \boldsymbol{x}(\tau)$ que satisfazem a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}(\tau) \;=\; \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}(\tau)) \; . \tag{2.1}$$

Para um campo de velocidades independente do tempo as linhas de fluxo são idênticas às trajetórias percorridas pelas partículas que constituem o fluido.

Para outros campos vetoriais, linhas de fluxo podem ser definidas de forma completamente análoga e, normalmente, são chamadas *linhas de campo*. Geralmente, os conceitos da dinâmica dos fluidos, particularmente as equações de balanço a serem discutidas a seguir, são de importância fundamental para todas as teorias de campos.

2.1 Equações de Balanço

Num fluido em escoamento, seja $\rho(t, \boldsymbol{x})$ a *densidade de massa* e $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x})$ a *densidade de fluxo de massa* no instante t e no ponto $\boldsymbol{x}$; portanto, ρ é um campo escalar e $\boldsymbol{j}$ é um campo vetorial descrevendo o fluxo de massa através de superfícies, por unidade de tempo e por unidade de superfície. Mais exatamente, se introduzirmos a *taxa de fluxo de massa* no instante t através de uma superfície S, $\mu_S(t)$, podemos representar a massa total atravessando a superfície S entre o instante t_1 e o instante t_2 como a integral

$$m_S(t_2, t_1) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt \; \mu_S(t) \; , \tag{2.2}$$

enquanto que a função $\mu_S(t)$ é dada pela integral de superfície

$$\mu_S(t) \;=\; \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x}) \; . \tag{2.3}$$

A densidade de massa e a densidade de fluxo de massa são relacionadas por

$$\boldsymbol{j} \;=\; \rho \boldsymbol{v} \; . \tag{2.4}$$

Consideremos agora um volume fixo V com bordo ∂V. A massa total contida em V no instante t é

$$m_V(t) \;=\; \int_V d^3x \; \rho(t, \boldsymbol{x}) \; .$$

Se no interior de V não há fontes ou sumidouros que criem ou aniquilem massa, então a massa contida em V só pode ser alterada por escoamento de massa através do bordo ∂V de V. Portanto, com orientação da normal de ∂V para fora, vem

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \; \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) \;&=\; \frac{dm_V}{dt}(t) \;=\; -\; \mu_{\partial V}(t) \;=\; -\int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x}) \\ &=\; -\int_V d^3x \; (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j})(t, \boldsymbol{x}) \; , \end{aligned}$$

onde no último passo foi utilizado o teorema de Gauss. Como este argumento vale para volumes V quaisquer, obtemos assim a *equação de balanço* ou *equação de continuidade* para a massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;+\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \;=\; 0 \; , \tag{2.5}$$

que é a expressão matemática da lei da *conservação da massa.*

Equações de balanço podem ser formuladas não apenas para a massa mas também para outras quantidades extensivas com distribuição contínua no espaço e dependência do tempo. Uma quantidade associada a um sistema físico é chamada *extensiva* se seu valor duplica, triplica, ... quando duplicamos, triplicamos, ... o sistema. Exemplos são a massa, o número de partículas, a carga elétrica, a energia, o momento linear, o momento angular, a entropia, a energia livre, etc.; contra-exemplos são a temperatura ou a pressão. No entanto, quando formularmos uma equação de balanço para uma quantidade extensiva qualquer a, temos que levar em conta a possibilidade da existência de fontes ou sumidouros, que também podem apresentar uma distribuição contínua no espaço, assim como uma dependência do tempo. Portanto, a forma geral da *equação de balanço* ou *equação de continuidade* para uma quantidade extensiva a é

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} \;+\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}^a \;=\; q^a \; , \tag{2.6}$$

onde ρ^a é a *densidade*, $\boldsymbol{j}^a$ é a *densidade de fluxo* e q^a é a *densidade de produção* da quantidade a; a última descreve então a taxa de criação por fontes ($q^a > 0$) ou de aniquilação por sumidouros ($q^a < 0$) da quantidade a, por unidade de tempo e de volume. Em termos de formas diferenciais, a equação (2.6) assume a forma

$$\frac{\partial \hat{\rho}^a}{\partial t} \;+\; d\hat{j}^a \;=\; \hat{q}^a \; , \tag{2.7}$$

com as 3-formas $\hat{\rho}^a = {*}\rho^a$ e $\hat{q}^a = {*}q^a$ assim como a 2-forma $\hat{j}^a = {*}j^a$.

A existência de fontes e sumidouros ($q^a \neq 0$) indica, em geral, que a quantidade a não é conservada ou, ainda, que o sistema físico considerado não é fechado. De fato, uma quantidade extensiva a é chamada uma *quantidade conservada* e a equação de balanço correspondente é chamada uma *lei de conservação* se, em sistemas físicos fechados, a correspondente densidade de produção q^a se anula, ou seja, se vale

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}^a \;=\; 0 \; . \tag{2.8}$$

Sistemas fechados são os sistemas físicos que não estão trocando quantidades extensivas com outros sistemas físicos. Para um entendimento correto deste conceito, é necessário observar que troca de uma quantidade extensiva a entre dois sistemas físicos 1 e 2 pode contribuir, em ambos os sistemas, tanto à densidade de fluxo $\boldsymbol{j}_1^a$ e $\boldsymbol{j}_2^a$ como à densidade de produção q_1^a e q_2^a. O primeiro caso ocorre quando os dois sistemas estão localizados em regiões separadas mas adjacentes no espaço e a troca está sendo efetuada por fluxo através da interface entre os dois, enquanto que o segundo caso ocorre quando os dois sistemas se sobrepõem no espaço, parcial ou totalmente. Portanto, num sistema aberto, mesmo uma quantidade conservada a pode ter uma densidade de produção $q^a \neq 0$, mas neste caso as fontes e os sumidouros que existem podem ser explicitamente identificados e atribuídos a um outro sistema aberto que está em interação com o primeiro.

> Como exemplo típico, consideremos a troca de energia e momento entre um conjunto de cargas elétricas (sistema 1) e o campo eletromagnético (sistema 2) ao qual estão sujeitos e que geram: energia e momento só do sistema de partículas carregadas, assim como energia ou momento só do campo eletromagnético, não são conservadas – uma vez que, por exemplo, a troca de momento entre os dois é expressão da força de Lorentz que o campo eletromagnético exerce sobre as cargas. Mas ambos os sistemas, 1 e 2, que se sobrepõem totalmente no espaço, são subsistemas abertos de um sistema total $1+2$ que é fechado, e portanto a soma das respectivas quantidades (energia das partículas + energia do campo e momento das partículas + momento do campo), esta sim, é conservada.

A título de exemplo de uma quantidade extensiva não conservada, podemos mencionar a entropia S. No entanto, esta ocupa uma posição híbrida entre quantidades conservadas e não conservadas, pois o segundo teorema fundamental da termodinâmica afirma exatamente que, em sistemas fechados, vale a desigualdade $q^S \geq 0$, ou seja, entropia pode ser criada mas não pode ser aniquilada.

Ao contrário do que acontece no caso da massa, a relação entre o campo de velocidades, a densidade e a densidade de fluxo de uma quantidade extensiva geral a em fluidos pode ser complicada, pois o transporte da quantidade a pode se efetuar por dois processos distintos.

a) Por *convecção* (transporte com o fluxo):
   Isto gera a *parte convectiva* $\boldsymbol{j}^a_{\mathrm{conv}}$ *da densidade de fluxo*, definida por

$$\boldsymbol{j}^a_{\mathrm{conv}} \;=\; \rho^a \boldsymbol{v} \; . \tag{2.9}$$

b) Por *condução*:
Isto gera a *parte condutiva* $\boldsymbol{j}^a_{\mathrm{cond}}$ *da densidade de fluxo* que pode estar presente mesmo quando $\boldsymbol{v} \equiv 0$ ou $\rho^a \equiv 0$ – por exemplo no caso da condução térmica ou da condução elétrica ao longo de um fio eletricamente neutro.

Portanto, a densidade de fluxo total é dada pela soma

$$\boldsymbol{j}^a \;=\; \boldsymbol{j}^a_{\mathrm{conv}} + \boldsymbol{j}^a_{\mathrm{cond}} \;=\; \rho^a \boldsymbol{v} \,+\, \boldsymbol{j}^a_{\mathrm{cond}} \;, \tag{2.10}$$

e a equação (2.4) pode ser vista como a afirmação de que, no caso da massa, não há transporte por condução.

2.2 Balanço de momento linear e de momento angular

Formular a equação de balanço para o momento linear constitui um caso particularmente interessante e importante. Como o momento linear é uma quantidade de natureza vetorial, teremos que estabelecer, separadamente, três equações de balanço: uma para cada componente. Escrevemos ρ^P_i para a densidade do i-ésimo componente do momento e j^P_{ik} para o k-ésimo componente da densidade de fluxo do i-ésimo componente do momento. Portanto, neste caso, a densidade já é um campo vetorial e a densidade de fluxo é um campo tensorial de grau 2.

Fontes do momento são forças externas que agem sobre o sistema, ou seja, a densidade de produção de momento é a *densidade de força* que denotaremos por $\boldsymbol{f}$. Com estas convenções, a equação de balanço para o momento torna-se

$$\frac{\partial \rho^P_i}{\partial t} \,+\, \partial_k j^P_{ik} \;=\; f_i \;. \tag{2.11}$$

A presença de um campo gravitacional externo $\boldsymbol{g}$, por exemplo, requer introduzir uma densidade de força $\boldsymbol{f} = \rho\, \boldsymbol{g}$.

A densidade de fluxo de momento possui uma outra interpretação que é muito importante, pois o momento atravessando uma superfície por unidade de tempo pode ser visto como força de pressão exercida sobre esta superfície. Mais exatamente, j^P_{ik} descreve o i-ésimo componente da força de pressão exercida sobre um elemento de superfície com normal na k-ésima direção e, portanto, a integral de superfície

$$F_i \;=\; \int_S d\sigma_k \; j^P_{ik} \tag{2.12}$$

descreve o i-ésimo componente da força de pressão exercida sobre uma superfície S pelo fluxo de momento considerado. Se, em particular, S for o bordo ∂V de um volume V, a equação (2.12) pode ser reescrita na forma

$$F_i \;=\; \int_{\partial V} d\sigma_k \; j^P_{ik} \;=\; \int_V d^3x \; \partial_k j^P_{ik} \;, \tag{2.13}$$

representando o i-ésimo componente da força de pressão que o volume V exerce sobre sua vizinhança.

Em fluidos, temos

$$\rho_i^P \;=\; \rho v_i \tag{2.14}$$

e

$$j_{ik}^P \;=\; \rho v_i v_k \,+\, \sigma_{ik} \;, \tag{2.15}$$

onde ρ é a densidade de massa e σ é a parte condutiva da densidade de fluxo de momento, sobre a qual não há nenhuma informação adicional dada "a priori". Segundo a interpretação descrita acima, σ representa as forças de pressão que não são geradas pelo escoamento das partículas do fluido, o que justifica chamar σ o *tensor de pressão.*

De forma completamente análoga à equação de balanço para o momento linear, podemos formular a equação de balanço para o momento angular. Seja ρ_i^L a densidade do i-ésimo componente do momento angular e j_{ik}^L o k-ésimo componente da densidade de fluxo do i-ésimo componente do momento angular.

Fontes do momento angular são torques externos que agem sobre o sistema, ou seja, a densidade de produção de momento angular é a *densidade de torque* que denotaremos por $\boldsymbol{t}$. Com estas convenções, a equação de balanço para o momento angular torna-se

$$\frac{\partial \rho_i^L}{\partial t} \,+\, \partial_k j_{ik}^L \;=\; t_i \;. \tag{2.16}$$

Para o escoamento de fluidos normais, podemos justificar as seguintes hipóteses:

a) Não há momento angular "interno", ou seja, existe apenas momento angular orbital. Isto significa que, para volumes suficientemente pequenos, o momento angular já é determinado pelo momento linear, segundo a fórmula $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$. Portanto, a densidade e a densidade de fluxo de momento angular podem ser expressas em termos da densidade e da densidade de fluxo de momento linear, respectivamente, como segue:

$$\rho_i^L \;=\; \epsilon_{ijl}\, x_j\, \rho_l^P \;, \tag{2.17}$$

$$j_{ik}^L \;=\; \epsilon_{ijl}\, x_j\, j_{lk}^P \;. \tag{2.18}$$

b) Não há torque "interno", ou seja, existe apenas torque orbital. Isto significa que, para volumes suficientemente pequenos, o torque já é determinado pela força, segundo a fórmula $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}$. Portanto, a densidade de torque pode ser expressa em termos da densidade de força, como segue:

$$t_i \;=\; \epsilon_{ijl}\, x_j\, f_l \;. \tag{2.19}$$

Em particular, temos $\boldsymbol{t} \equiv 0$ quando $\boldsymbol{f} \equiv 0$.

Na sua grande maioria, os sistemas encontrados na hidrodinâmica e na mecânica dos meios contínuos satisfazem as hipóteses a) e b). Um contraexemplo seria um sistema de partículas com spin e portanto com momento magnético, tal como um gas de elétrons, dentro de um campo magnético externo.

Sob as hipóteses a) e b), a equação de balanço (2.16) para o momento angular implica

$$\epsilon_{ijl}\, x_j\, \frac{\partial \rho_l^P}{\partial t} \;+\; \partial_k\big(\epsilon_{ijl}\, x_j\, j_{lk}^P\big) \;=\; \epsilon_{ijl}\, x_j\, f_l \;,$$

i.e.

$$\epsilon_{ijl}\, x_j \left(\frac{\partial \rho_l^P}{\partial t} \;+\; \partial_k j_{lk}^P\right) + \epsilon_{ikl}\, j_{lk}^P \;=\; \epsilon_{ijl}\, x_j\, f_l \;.$$

Usando a equação de balanço (2.11) para o momento linear, concluímos que

$$\epsilon_{ikl}\, j_{lk}^P \;=\; 0 \;,$$

i.e.

$$j_{lk}^P \;=\; j_{kl}^P \;, \tag{2.20}$$

afirmando que a densidade de fluxo de momento linear deve ser um campo tensorial *simétrico.*

2.3 As equações de Navier-Stokes

Em fluidos, temos, de acordo com as equações (2.15) e (2.20)

$$j_{ik}^P \;=\; \rho v_i v_k \;+\; \sigma_{ik}$$

com um tensor de pressão simétrico σ. Uma parte deste tensor pode ser facilmente identificada: a pressão escalar p providencia uma contribuição isotrópica $p\,\delta_{ik}$ a σ_{ik}, ou seja, temos

$$\sigma_{ik} \;=\; p\,\delta_{ik} \;+\; \sigma'_{ik} \;. \tag{2.21}$$

A parte restante σ' do tensor de pressão σ descreve *fricção interna* no fluido. Voltaremos a discutir este termo mais adiante.

Com as expressões obtidas até agora, a equação de continuidade (2.11) para o momento linear no fluido torna-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\rho v_i\big) \;+\; \partial_k\big(\rho v_i v_k + p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}\big) \;=\; f_i \;,$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\, \partial_k(\rho v_k) + \rho v_k \partial_k v_i + \partial_i p + \partial_k \sigma'_{ik} \;=\; f_i \;.$$

Usando a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;+\; \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}) \;=\; 0 \tag{2.22}$$

para a massa (veja as equações (2.4) e (2.5)) podemos simplificar:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \;+\; v_k \partial_k v_i\right) + \partial_i p \;+\; \partial_k \sigma'_{ik} \;=\; f_i \;. \tag{2.23}$$

Um *fluido ideal* é, por definição, um fluido no qual não há fricção interna e, portanto, vale $\sigma' = 0$. Neste caso, a equação (2.23) se reduz à *equação de Euler* para o escoamento de fluidos ideais:

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \,+\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} \right) \,+\, \boldsymbol{\nabla} p \;=\; \boldsymbol{f} \;. \tag{2.24}$$

Os diferentes termos nesta equação têm uma interpretação simples. Primeiro, definimos para qualquer campo A um novo campo DA/Dt por

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt}(t, \boldsymbol{x}) \;&=\; \left(\frac{\partial A}{\partial t} \,+\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, A \right) (t, \boldsymbol{x}) \\ &=\; \lim_{\Delta t \,\to\, 0} \frac{A(t + \Delta t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \Delta t) - A(t, \boldsymbol{x})}{\Delta t} \;. \end{aligned} \tag{2.25}$$

DA/Dt é chamado a *derivada substantiva* de A; ela descreve a variação temporal de A que observamos quando nos movimentamos junto com o fluido – ao contrário da derivada parcial $\partial A/\partial t$ de A, que descreve a variação temporal de A num ponto fixo do espaço. Em particular, $D\boldsymbol{v}/Dt$ descreve a variação temporal de $\boldsymbol{v}$, ou seja, a aceleração à qual está sujeito um elemento de massa do fluido na sua trajetória. Ademais, $-\boldsymbol{\nabla} p$ é a força de pressão agindo sobre um elemento de massa do fluido, direcionada da região de pressão mais alta para a região de pressão mais baixa. Assim, reconhecemos a equação de Euler, escrita na forma

$$\rho \, \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \;=\; \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p \;, \tag{2.26}$$

como sendo a equação de movimento de Newton para um fluido ideal. Usando a identidade

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) \;=\; \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} \tag{2.27}$$

a equação de Euler também pode ser escrita na forma

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2) - \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) \right) + \boldsymbol{\nabla} p \;=\; \boldsymbol{f} \;. \tag{2.28}$$

Faremos agora algumas hipóteses adicionais:

a) O fluido é *incompressível:*

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) \;=\; \rho_0 \;=\; \text{const.} \;. \tag{2.29}$$

(Obviamente, isto é uma aproximação útil apenas no caso de líquidos, não no de gases.)

b) O escoamento é *estacionário:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \;=\; 0 \;. \tag{2.30}$$

c) O escoamento é *irrotacional:*

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \;=\; 0 \; . \tag{2.31}$$

d) A força externa deriva de um *potencial:*

$$\boldsymbol{f} \;=\; -\,\boldsymbol{\nabla}\phi \; . \tag{2.32}$$

Então a equação (2.28) torna-se

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\tfrac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v}^2 + p + \phi\right) \;=\; 0 \; , \tag{2.33}$$

i.e.

$$\tfrac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v}^2 + p + \phi \;=\; \text{const.} \; . \tag{2.34}$$

Esta é a bem conhecida *lei de Bernoulli*, expressando a lei da conservação da energia para fluidos ideais incompressíveis. (Se omitirmos a condição (2.31), a expressão no lado esquerdo da equação (2.34) será constante apenas ao longo de cada linha de fluxo.) O caso mais simples é o da *hidrostática*:

$$\boldsymbol{v} \equiv 0 \; . \tag{2.35}$$

A equação de Euler se reduz então à condição de *equilíbrio hidrostático*

$$\boldsymbol{\nabla} p \;=\; \boldsymbol{f} \; . \tag{2.36}$$

No campo gravitacional homogêneo, temos $\boldsymbol{f} = \rho\, \boldsymbol{g}$ e, para fluidos incompressíveis (veja a equação (2.29))

$$\boldsymbol{\nabla}\big(p \,-\, \rho_0\, \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}\big) \;=\; 0 \; , \tag{2.37}$$

com a solução

$$p\,(\boldsymbol{x}) \;=\; \rho_0\, \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} \; , \tag{2.38}$$

que é o bem conhecido aumento linear da pressão com a profundidade. Finalmente, segundo a equação (2.13), o i-ésimo componente F_i da força de pressão exercida pelo fluido sobre um corpo nele inserido é

$$F_i \;=\; -\int_{\partial V} df_k\; j^P_{ik} \;=\; -\int_V d^{\,3}x\; \partial_k j^P_{ik} \; . \tag{2.39}$$

Naturalmente, a distribuição da pressão no interior de um corpo inserido no fluido é diferente da que encontraríamos na ausência do corpo. A última equação mostra, porém, que o resultado só depende dos valores da densidade de fluxo de momento na superfície ∂V da região do espaço ocupada pelo corpo. Portanto, para calcular a integral nesta equação, podemos empregar uma campo tensorial qualquer, desde que tenha os valores corretos na superfície ∂V de V. No presente caso, podemos usar $j^P_{ik} = p\delta_{ik}$ e obtemos

$$\partial_k j^P_{ik} \;=\; \partial_i p \;=\; \rho_0\, g_i \; ,$$

com o resultado

$$\boldsymbol{F} \;=\; -\,\rho_0\,|V|\,\boldsymbol{g}\;, \tag{2.40}$$

onde $|V|$ é o volume da região V: isto é a bem conhecida *lei do empuxo* de Arquimedes.

Finalmente, queremos levar em conta os efeitos da fricção, que se manifestam no *tensor de fricção* σ', a parte do tensor de pressão σ introduzida na equação (2.21). Fricção é uma conseqüência do movimento relativo entre as partículas do fluido e portanto só pode existir quando $\partial_i v_k \neq 0$.

A hipótese mais simples é a de uma dependência linear entre o tensor de fricção σ'_{ik} e o gradiente do campo de velocidades $\partial_i v_k$. O campo tensorial simétrico de grau 2 mais geral que depende de forma linear e rotacionalmente covariante de $\partial_i v_k$ é

$$\sigma'_{ik} \;=\; -\,\eta\,\big(\partial_i v_k + \partial_k v_i - \tfrac{2}{3}\,\delta_{ik}\partial_r v_r\big) - \zeta\,\delta_{ik}\partial_r v_r\;, \tag{2.41}$$

onde já separamos a parte $\partial_r v_r$ responsável pelas deformações do fluido que alteram o volume. A quantidade η se chama *viscosidade* e a quantidade ζ *viscosidade de volume*. Fluidos que satisfazam a simples lei (2.41) são chamados *fluidos Newtonianos*. Para fluidos não-Newtonianos (tais como sangue, mel, areia húmida etc.), no entanto, a relação entre σ'_{ik} e $\partial_i v_k$ pode ser muito mais complicado.

Substituíndo a equação (2.41) na equação de continuidade (2.23) para o momento e supondo que η e ζ são constantes, obtemos as *equações de Navier-Stokes*:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{\nabla}p - \eta\,\Delta\boldsymbol{v} - \big(\tfrac{1}{3}\eta+\zeta\big)\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) \;=\; \boldsymbol{f}\;. \tag{2.42}$$

Em conjunto com a equação de continuidade (2.22) para a massa, são quatro equações para cinco funções a serem determinadas: $\boldsymbol{v}$, ρ, p. Portanto, o sistema ainda é subdeterminado, até que seja exibida uma quinta equação, por exemplo na forma de uma *equação de material*

$$p \;=\; p\,(T,\rho)\;, \tag{2.43}$$

onde T é a temperatura. Mesmo assim, o sistema permanece subdeterminado – exceto quando mudanças de temperatura podem ser negligenciadas. Caso contrário, devemos levar em conta também os efeitos da condução do calor.

As equações de Navier-Stokes são as equações fundamentais da hidrodinâmica. Devido ao fato de serem não-lineares, sua solução é extremamente difícil e, em situações gerais, impossível. Atualmente, o entendimento de fenômenos especiais, principalmente o da turbulência, é tema da pesquisa. Uma discussão de questões desta natureza ultrapassaria os limites de um texto introdutório e deve ser reservada para a literatura mais avançada.