MAT111 - Cálculo I - IF - 2010

TRIGONOMETRIA

As Funçoes trigonométricas no triângulo retângulo

Analisando a figura a seguir, temos que os triângulos retângulos ΔOA_1B_1 e ΔOA_2B_2, são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes congruentes.

Segue-se desta semelhança, as seguintes relações:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} \qquad \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} \qquad \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2}$$

Observe que estas relações dependem apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos, onde θ é o ângulo $\widehat{A_iOB_i}$. Definimos então, para $0° < \theta < 90°$, as seguintes funções

$$sen\theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} \qquad \cos\theta = \frac{OB_1}{OA_1} \qquad tg\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

que se chamam, respectivamente, seno de θ, cosseno de θ e tangente de θ. Note que estas funções, chamadas de funções trigonométricas, estão relacionadas entre si.

Exercício 1: Demonstre que para $0° < \theta < 90°$ valem as seguintes relações:
(a) $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
(b) $tg\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$.
(c) $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$.

Exercício 2: Calcule o valor de $\cos\theta$, $\text{sen}\theta$ e $tg\theta$, para:
(a) $\theta = 30°$ e $\theta = 60°$. (Dica: tome um triângulo equilátero de lado 1).
(b) $\theta = 45°$.
(c) $\theta = 36°$ e $\theta = 18°$. (Dica: utilize o triângulo isósceles abaixo).

Observe que o domínio das funções definidas acima é $]0°, 90°[$, no entanto, não nos interessa esta limitação do domínio nem tampouco o uso da unidade *grau* para os valores do domínio, pois queremos definir funções cujos domínios sejam os maiores possíveis dentro do conjunto de todos os números reais. Para isso precisamos abandonar o triângulo retângulo e procurar um outro modelo geométrico que nos permita estabelecer relações análogas àquelas válidas no triângulo.

Medidas de ângulos e de arcos. Radianos

Dada uma circunferência, estamos acostumados a usar expressões do tipo, *arco de* $40°$, para nos referir ao arco que subentende um ângulo central de $40°$. Assim podemos nos referir aos arcos AB e CD como arcos de $40°$.

Note que, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice do ângulo. Para cada uma delas, o ângulo dado subentende um arco diferente, cujo comprimento depende do raio da circunferência ao qual ele pertence. Assim, na figura, comprimento de AB é menor que o comprimento de CD sendo ambos chamados de arcos de $40°$.

Temos então que um arco de circunferência corresponde a um único ângulo central, mas a um ângulo correspondem uma infinidade de arcos. No entanto, mostra-se, que se AB e CD são arcos correspondentes ao mesmo ângulo central em circunferências de raios r e r_1, então $\frac{p}{r} = \frac{p_1}{r_1}$, onde p é o comprimento do arco AB e p_1 é o comprimento do arco CD.

Definição: A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em uma circunferência centrada no vértice do ângulo e o raio da circunferência.

Pela figura, temos

$$\widehat{COD} = \widehat{AOB} = \frac{p}{r} \text{ radianos} = \frac{p_1}{r_1} \text{ radianos.}$$

No caso do comprimento P de uma semi-circunferência de raio r, a razão, já conhecida desde os Gregos antigos, é chamada de número π, então segue-se que

$$180° = \frac{P}{r} = \pi \text{ radianos}$$

Observe que a medida de um ângulo em radianos não depende da unidade de comprimento considerado, pois por exemplo, se o raio da circunferência é igual a $2Km$, o arco correspondente ao ângulo de $\frac{\pi}{2} radianos$ mede π quilômetros; se o raio da circunferência mede 2 polegadas o arco correspondente ao ângulo de $\frac{\pi}{2} radianos$ mede π polegadas.

Funções Trigonométricas

A CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA

Para prosseguir vamos considerar uma circunferência de raio 1 e tendo em mente o que foi discutido até aqui vamos identificar os ângulos e arcos correspondentes. Assim, para simplificar a nossa comunicação, vamos nos referir sem distinção ao ângulo π e ao arco π.

Vamos associar a cada número real um ponto sobre uma circunferência de raio 1, para depois disso podermos definir as funções trigonométricas de qualquer número real. Isto será feito da seguinte forma:

Sobre uma circunferência C de raio 1 vamos fixar um ponto A que será a origem dos arcos e a partir deste ponto vamos escolher o sentido anti-horário de percurso sobre a circunferência como sendo positivo para a representação dos arcos. Isto é, definimos a medida algébrica de um arco AB desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo se o sentido do percurso de A para B for horário.

No caso do desenho abaixo, a medida algébrica do arco AB (no sentido anti-horário) é um número positivo igual ao comprimento do arco AB ou a medida em radiano do ângulo central correspondente. Já no caso de arco AF (no sentido horário) sua medida algébrica é um número negativo igual a menos o comprimento do arco AF.

Exercício 1. Represente na circunferência abaixo os pontos correspondentes aos arcos de medidas:

medida de $AB = \dfrac{\pi}{8}$ medida de $AC = \dfrac{3\pi}{4}$

medida de $AD = -3$ medida de $AE = 0$

medida de $AF = 2\pi$ (todas em radianos)

Com o que fizemos até agora para cada número x do intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ corresponde um ponto $P = P(x)$ sobre a circunferência de tal forma que o arco AP tenha medida $|x|$ e o percurso de A para P seja anti-horário ou horário dependendo do sinal de x.

Como estender esta correspondência para números além deste intervalo?

Vamos definir uma função que a cada número real faz corresponder um ponto $P(x)$ na circunferência assim: se x é positivo percorremos sobre a circunferência no sentido anti-horário um comprimento igual a x até determinar $P(x)$, se x é negativo este percurso é feito no sentido horário.

Então se $x < -2\pi$ ou $x > 2\pi$ será necessário dar mais de uma volta na circunferência para atingir $P(x)$ num ou noutro sentido. Por outro lado, um mesmo ponto P da circunferência corresponderá a uma infinidade de números reais.

Exercícios

2. Quantas voltas serão dadas na circunferência para se representar os números $\dfrac{25\pi}{3}$ e -12?
3. Se um ponto K da circunferência corresponde ao número $\dfrac{\pi}{7}$ a que outros números este mesmo ponto corresponde?
4. Se um ponto P da circunferência corresponde a um número x qual é a forma dos outros números que também correspondem a este mesmo ponto? Estes números são chamados as várias determinações do arco AP.

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é o centro de uma circunferência C de raio 1 e tome $A = (1, 0)$ a origem dos arcos sobre C. Para cada número real x, seja $P(x)$ o ponto na circunferência C onde a medida de $AP = x$. Definimos

$\cos x =$ abscissa de P

$\operatorname{sen} x =$ ordenada de P

$\mathrm{tgx} = \dfrac{\mathrm{senx}}{\mathrm{cosx}}$ se $\cos x \neq 0$

Observe que tomando $P = A$ foi possível definir $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, e tomando $P = (0, 1)$ temos $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$.

5. Verifique que estas definições coincidem com as definições anteriores de funções trigonométricas no triângulo retângulo para arcos no 1º quadrante. Calcule ainda os valores de seno e cosseno para $x = \pi, x = \dfrac{3\pi}{2}$ e $x = 2\pi$.

   Aqui queremos chamar a atenção para a vantagem de estarmos medindo os ângulos centrais em radianos e **não em graus**. Observe que, não importa a unidade de medida escolhida para a unidade do sistema de coordenadas, teremos os arcos e os ângulos centrais (em radianos) representando os valores de x e os valores de $\text{sen}x, \cos x$ e tgx todos na mesma unidade. Por isso, no Cálculo e em suas aplicações, a convenção adotada é medir ângulos em radianos, para evitar confusões pois ao estudarmos funções da forma $F(x) = x + \ senx$, se escolhermos como unidade do sistema de coordenadas 1 centímetro, cada ponto $(x, F(x))$ do gráfico desta função terá suas ordenadas expressas em cm.

Exercícios

6. Verifique que, para todo número real x, temos: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
7. Quais são os valores máximos e mínimos para sen$x$ e para cos$x$? O que podemos dizer sobre os valores da função tangente?
8. Para que valores de x não é possível definir tgx?
9. Verifique que para todo número inteiro k e todo número real x temos: $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$. Isto quer dizer que a função cosseno é periódica de período 2π. A mesma igualdade vale para as funções seno e tangente? Por quê?
10. As funções seno e cosseno mudam de sinal dependendo do valor de x, ou seja, dependendo a posição do ponto $P(x)$ em cada um dos quadrantes do sistema de coordenadas. Além disso, estas funções são crescentes ou decrescentes em cada um dos quatro quadrantes. Observe estes fatos e complete a tabela a seguir:

11. Com base nos resultados obtidos até aqui faça um esboço dos gráficos das funções seno e cosseno.

Para analisarmos o comportamento da função tg e construirmos seu gráfico é mais adequada uma outra interpretação de tgx sem depender das funções seno e cosseno, mas apenas do ponto $P(x)$.

Para isso, vamos introduzir um outro eixo de coordenadas tendo como origem o ponto A e a direção da reta tangente à circunferência no ponto A, orientada positivamente como o eixo dos y do sistema original.

Sobre este eixo escolhemos a unidade de medida igual à do raio da circunferência.

Se AB é um arco de medida x, a reta que passa por 0 e por B encontra a circunferência em B' e o novo eixo em T. Vamos mostrar que tgx = medida de AT, isto é, tgx é a medida algébrica de AT. Para se convencer disso faça os dois próximos exercícios:

12. Se o ponto B está no $1^{\underline{o}}$ ou no $3^{\underline{o}}$ quadrantes, considere que a medida de $AB = x$ e a medida de $AB' = x + \pi$. Use a semelhança dos triângulos para completar as igualdades:

$\mathrm{tgx} = \dfrac{\mathrm{senx}}{\mathrm{cosx}} = \underline{\hspace{4cm}} =$ medida de AT

$\mathrm{tg(x+\pi)} = \dfrac{\mathrm{sen(x+\pi)}}{\mathrm{cos(x+\pi)}} = \underline{\hspace{3cm}} =$ medida de AT

13. Se o ponto B está no $2^{\underline{o}}$ ou no $4^{\underline{o}}$ quadrantes, repita o mesmo raciocínio para concluir que: tgx $= -$ medida de AT.

14. Usando esta nova interpretação para tgx e os cálculos feitos, mostre que a função tangente é periódica de período π. Assim, para fazer seu gráfico basta saber seu sinal e o seu crescimento para x nos dois primeiros quadrantes. Faça o gráfico desta função:

Bibliografia básica para este texto: Carmo, M.P., Morgado, A.C., Wagner, E. - Trigonometria , Números Complexos. IMPA, VITAE, 1992.

Exercícios:

15. Seja p o lado de um polígono regular de n lados e r o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que: $p = 2rtg\ \frac{\pi}{n}$.

16. As desigualdades abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique.
(a) $sen\ 2 > 0$ (b) $cos\ 4 < 0$ (c) $sen\ 3 > sen\ 2$ (d) $cos\ 3 > cos\ 2$
(e) $tg\ 5 > tg\ 6$ (f) $cos \frac{\pi}{4} < cos\ 1$ (g) $cos\sqrt{3} < 1$
(h) $|sen\ 3| > |sen\ 4|$

Cotangente, Secante e Cossecante

Definimos:

- $cotg\ a = \frac{cos\ a}{sen\ a},\ a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$'
- $sec\ a = \frac{1}{cos\ a},\ a \neq (\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z},$
- $cosec\ a = \frac{1}{sen\ a},\ a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$

17. Verifique que as extremidades dos arcos x e $-x$ são simétricas em relação ao eixo das abscissas; que as extremidades dos arcos x e $\pi - x$ são simétricas em relação ao exio das ordenadas; que as extremidades das arcos x e $\pi + x$ são simétricas em relação à origem e que as extremidades das arcos x e $\frac{\pi}{2} - x$ são simétricas en relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conclua que:
$sen(-x) = -senx \qquad cos(-x) = cosx \qquad tg(-x) = -tgx$
$sen(\pi - x) = senx \qquad cos(\pi - x) = -cosx \qquad tg(\pi - x) = -tgx$
$sen(\pi + x) = -senx \qquad cos(\pi + x) = -cosx \qquad tg(\pi + x) = tgx$
$sen(\frac{\pi}{2} - x) = cosx \qquad cos(\frac{\pi}{2} - x) = senx \qquad tg(\frac{\pi}{2} - x) = cotgx$

18. Usando o exercício anterior, mostre que
$(a)\ sen(\frac{\pi}{2} + x) = cosx \qquad (b)\ cos(\frac{\pi}{2} + x) = -senx$
$(c)\ tg(\frac{\pi}{2} + x) = -cotgx \qquad (d)\ sen(\frac{3\pi}{2} - x) = -cosx$
$(e)\ cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -senx \qquad (f)\ tg(\frac{3\pi}{2} - x) = cotgx$
$(g)\ sen(\frac{3\pi}{2} + x) = -cosx \qquad (h)\ cos(\frac{3\pi}{2} + x) = senx$
$(i)\ tg(\frac{3\pi}{2} + x) = -cotgx$

19. Observando-se as figuras abaixo e sabendo-se que a medida do arco AP vale x:

(a) Mostre que $cotgx = t$, (figura 1)
(b) Determine a equação da reta tangente à circunferência, no ponto P, (figura 2)
(c) Mostre que $secx = s$ e $cosecx = u$, (figura 2)

20. Verifique as relações:
(a) $sec^2x = 1 + tg^2x$,
(b) $cosec^2x = 1 + cotg^2x$,
(c) $cotgx = \{ \begin{array}{ll} \frac{1}{tgx}, & se\ x \neq k\frac{\pi}{2} \\ 0, & se\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}$

21. Calcular m para que exista um ângulo x com

$$cosx = \frac{2}{m-1} \qquad tgx = \sqrt{m-2}$$

22. O que significa uma função ser par? E ser ímpar? O que podemos dizer sobre as funções $sen\ x$ e $cos\ x$? Explique.

23. O que significa uma função ser periódica? Quais das funções trigonométricas estudadas são periódicas? Explique.

24. Mostre que $sen(a+b) = sen\ a\ cos\ b + sen\ b\ cos\ a$. (Sugestão: use a fórmula do $cos(a-b)$ para os arcos $\frac{\pi}{2} - a$ e b).

25. Encontre fórmulas, em termos de senos e cossenos de a e de b, para:
(a) $sen(a-b)$ (b) $sen\ 2a$ (c) $cos\ 2a$

26. Usando as fórmulas $cos^2x + sen^2x = 1$ e $cos\ 2x = cos^2x - sen^2x$ encontre fórmulas para $cos^2\ \left(\frac{x}{2}\right)$ e $sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

27. Deduza fórmulas para $tg(a+b)$ e $tg(a-b)$.

28. Nas fórmulas do produto faça $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha - \beta$ e mostre que:
(a) $cos\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(cos\ a + cos\ b)$

(b) $sen\left(\frac{a+b}{2}\right) sen\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(cos\ a - cos\ b)$

29. Encontre as fórmulas correspondentes para $(sen\ a + sen\ b)$ e $(sen\ a - sen\ b)$.

30. Deduza as seguintes identidades:
(a) $sen\ 2a = \frac{2\ tg\ a}{1+tg^2\ a}$ (b) $cos\ 2a = \frac{1-tg\ a}{1+tg^2\ a}$

(c) $tg\ 2a = \frac{2\ tg\ a}{1-tg^2\ a}$ (d) $(sec\ a - tg\ a)^2 = \frac{1-sen\ a}{1+sen\ a}$

(e) $tg^2\frac{a}{2} = \frac{sec\ a\ -1}{sec\ a\ +1}$ (f) $sec(a+b) = \frac{sec\ a\ sec\ b}{tg\ b\ -\ tg\ a}$

31. Enuncie e demosntre a lei do cosseno e dos senos.

32. Uma pessoa inspira e expira, completando o ciclo respiratório a cada 3 segundos. O volume mínimo e máximo de ar nos pulmões é, em média, de 2 litros e 4 litros, respectivamente. Qual das seguintes funções descreve melhor o volume de ar nos pulmões de uma pessoa, como função do tempo?
(a) $y = 2 + 2sen\frac{\pi t}{3}$ (b) $y = 2 + sen\frac{2\pi t}{3}$
(c) $y = 3 + sen\frac{2\pi t}{3}$ (d) $y = 3 + sen\frac{\pi t}{3}$

33. Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $sen\ a = \frac{3}{5}$ e $sen\ b = \frac{12}{13}$. Calcular $cos(a + b)$.

34. Os ângulos agudos a e b são tais que $tg\ a = \frac{1}{2}$ e $tg\ b = \frac{1}{3}$. Mostre que $a+b = 45°$.

35. Se $sen\ a = \frac{1}{3}$, calcular $sen\ 2a$ e $cos\ 2a$.

36. Dado $sen\ x = -\frac{24}{25}$, x no terceiro quadrante, calcular $sen(\frac{x}{2})$, $cos(\frac{x}{2})$ e $tg(\frac{x}{2})$.

37. Mostre que $tg\ 40° + tg\ 20° = 4\sqrt{3}sen10°$.