Introdução à Programação Linear (2000)
Algoritmo Simplex - versão 2.1

Leônidas de Oliveira Brandão
http://www.ime.usp.br/~leo
http://www.matematica.br
29 de outubro de 2001 18:41

Sumário

Índice Remissivo

Capítulo 5

Dualidade em Programação Linear

Neste capítulo introduziremos dualidade a partir de uma interpretação econômica (com dois "jogadores") via penalidades (multiplicadores de Lagrange[1]). A associação derivada desta interpretação com os problemas lineares não é a usual, porém atinge muito bem o objetivo de seu uso: determinar as retrições lineares no problema dual.

Fixada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathrm{I\!R}^{m\times n}$ de posto completo, um vetor $\boldsymbol{b} \in \mathrm{I\!R}^m$ e um vetor $\boldsymbol{c} \in \mathrm{I\!R}^n$, difinimos o problema canônico por (PLC):

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}. \end{array}\right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{x} \in X \\ & \text{sendo } X := \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{I\!R}^n :\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Para este problema, que também estamos denominando **Problema Canônico**, convencionando que, se $X = \emptyset$, então $VO = -\infty$ (valor objetivo). Assim, podemos reescrever este problema como:

$$\sup_{\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}} \{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} :\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}. \tag{5.2}$$

Podemos eliminar a restrição $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, impondo multas por violações. Para ficar mais fácil esta exposição suporemos a existência de dois jogadores, o primeiro deseja resolver o problema anterior e será denominado jogador J_P. O segundo jogador será o J_D, cujo objetivo (neste momento) é evitar que J_P viole alguma restrição.

Assim, se J_P permitir que para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ que $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} \neq b_i$, J_D aplicará uma multa $y_i \neq 0$ reduzindo o lucro de J_P. Além disso, para obtermos um problema equivalente ao problema 5.1, J_P está interessado em obter lucro máximo e J_D em ter prejuízo mínimo. Assim, para cada valor de produção $\boldsymbol{x}$ que J_P escolhe, J_D escolhe sua melhor multa: $\inf_{\boldsymbol{y} \in \mathrm{I\!R}^m} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})$.

Assim o problema (5.1) é equivalente a $\sup_{\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}} \{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \inf_{\boldsymbol{y} \in \mathrm{I\!R}^m} \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\}$, que ainda pode ser reescrito na forma

$$\sup_{\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{y} \in \mathrm{I\!R}^m} \{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\}. \tag{5.3}$$

Note que: como o objetivo de J_P é obter lucro máximo, para evitar que J_D reduza seu lucro com multas, J_P sempre que possível ($X \neq \emptyset$) manterá $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; entretante, se $X = \emptyset$, este problema produz como resposta $-\infty$, coincidindo com a convenção $\max_{\emptyset} f(x) = -\infty$.

Lema 5.1 *Os problemas (5.2) e (5.3) são equivalentes.*

[1] Joseph-Louis Lagrange, nascido em 1736 numa região da hoje Itália. O problema considerado por Lagrange, foi: $\min\{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in A\}$, A um conjunto aberto. As componentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, são denominadas **Multiplicadores de Lagrange**.

Demonstração Elementar a partir das observações acima. ■

Continuando com a investigação do jogo J_P/J_D, podemos "inverter" os papéis dos jogadores. Qual o problema derivado quando J_D primeiro seleciona sua variável $\boldsymbol{y}$, para depois J_P escolher $\boldsymbol{x}$?

Neste caso, podemos reescrever o sistema como

$$\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b}-\mathrm{A}\boldsymbol{x})\}=\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}'\mathrm{A}\boldsymbol{x})\}=\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x}'\mathrm{A}'\boldsymbol{y}\}=$$

e este problema pode finalmente ser reduzido ao seguinte

$$\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathrm{A}'\boldsymbol{y})\}. \tag{5.4}$$

Para este problema, podemos fazer uma análise "inversa" à que motivou a definição de (5.2). Agora, o jogador J_D é o primeiro a selecionar sua variável $\boldsymbol{y}$, procurando minizar o valor objetivo, enquanto J_P pode selecionar $\boldsymbol{x}$ de modo a penalizar J_D sempre que este não conseguir $\boldsymbol{c}-\mathrm{A}'\boldsymbol{y}\leqq\mathbf{0}$, pois, se ficar algum $c_i-\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{y}>0$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, J_P toma $\sup\{x_i\geqq 0\}=+\infty$.

Deste modo, J_D escolhe primeiro sua variável $\boldsymbol{y}$, mas sabe que depois dele J_P vai escolher seu $\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}$ tentando crescer o valor da função objetivo, o que resulta no problema:

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathrm{A}'\boldsymbol{y})\}\ \equiv\ \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{b}+\sup_{\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}}\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathrm{A}'\boldsymbol{y})\}.$$

este é o **problema dual** de (5.3), e (5.4).

É importante notar a relação entre os problemas com restrições linear, 5.1, e o sem restrições, 5.3: as multas só serão aplicadas quando o primeiro jogador não conseguir um ponto viável. Isso pode ser traduzido no lema seguinte.

Para simplificar a notação definiremos a **função objetivo estendida**, também conhecida com **função lagrangeana**[2]

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b}-\mathrm{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathrm{A}'\boldsymbol{y}). \tag{5.5}$$

Lema 5.2 *Qualquer que seja o poliedro primal P e seu correspondente dual D, sendo $S_x\subseteq\mathbb{R}^n$ e $S_y\subseteq\mathbb{R}^m$, respectivamente, os sinais das variáveis primais e duais, então*

$$\begin{aligned}\inf_{\boldsymbol{y}\in S_y}L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})&=\inf\nolimits_{\boldsymbol{y}\in S_y}\{\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b}-\mathrm{A}\boldsymbol{x})\}\ =\ \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}},\quad\forall\overline{\boldsymbol{x}}\in P,\quad e\\ \sup_{\boldsymbol{x}\in S_x}L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}})&=\sup\nolimits_{\boldsymbol{x}\in S_x}\{\overline{\boldsymbol{y}}'\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathrm{A}'\boldsymbol{y})\}\ =\ \overline{\boldsymbol{y}}'\boldsymbol{b},\quad\forall\overline{\boldsymbol{y}}\in D.\end{aligned}$$

Demonstração Fica a cargo do leitor (note que os sinais das variáveis duais são definidos de modo a impedir que as restrições primais sejam inviáveis). ■

Portanto, J_D está interessado em resolver o seguinte problema

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}\{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}:\mathrm{A}'\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{c}\}. \tag{5.6}$$

[2]Devido aos estudos de minimização irrestrita de Joseph-Louis Lagrange, usualmente considerado matemático Francês, mas nascido no Itália em 1736.

ou seja, o problema do jogador J_D, quando este inicia o jogo, é

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \\ & \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}. \end{array} \tag{5.7}$$

Podemos caracterizar o problema (5.3) como a busca pelo melhor plano de produção, como exposto no capítulo **??**: x_i quantidade de peças do produto i a serem produzidas e $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} = b_i$ a quantidade de insumo i disponível (a_{ij} a quantidade de insumo i no produto j).

Deste modo, podemos colocar o problema (5.4) como a determinação dos preços dos insumos, de modo a garantir à J_D que receba em cada unidade de produto ao menos o valor unitário de venda de cada produto ($\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{y} \geqq 0$) - vide capítulo **??**.

5.1 Como construir o dual de um problema linear

A partir da seção anterior, podemos notar que o processo de obtenção do dual consiste de dois passos: obtenção do "sinal" da multa (variável dual) e obtenção so "sinal" do poliedro dual. Nesta subseção, a partir de um problema primal de maximização, apresentaremos um esquema ilustrativo do referido processo.

Por simplicidade, admitamos que o problema primal seja de maximização na variável $\boldsymbol{x} \in S_x$, sendo S_x o "sinal" da variável $\boldsymbol{x}$ (no poliedro canônico por exemplo, teríamos $S_x := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$).

Para a obtenção do dual, existem dois passo principais (determinação dos "sinais" das variáveis duais e do poliedro dual), além de um passo simples que é inversão de papéis entre os jogadores (considerando o lagrangeano). Este processo é ilustrado abaixo.

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x} & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{x} \in \overline{X} \\ & (A) \end{array}\right\rangle \overset{(a)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{c} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ (B) \end{array}\right\rangle \overset{(b)}{\leftrightarrow} \left\langle \begin{array}{c} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ (C) \end{array}\right\rangle \overset{(c)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{y}\in \overline{Y}} & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \\ & \boldsymbol{y} \in S_y \\ & (D) \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Se pensarmos em termos de dedução da esquerda para a direita dos problemas: em

(a) devemos determinar o "sinal" da multa do problema (B), a partir do poliedro $\overline{X}$, de modo que este fique equivalente ao (A);

(b) devemos determinar o problema dual (basta aplicar a definição: inverter a ordem dos jogadores);

(c) devemos determinar o "sinal" do poliedro dual $\overline{Y}$, em (D), de modo que o problema (D) fique equivalente ao (C).

Por exemplo, para o problema canônico, teríamos a seguinte sequência:

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & (A) \end{array}\right\rangle \overset{(a)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{c} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \text{logo } S_y = \mathbb{R}^m \\ (B) \end{array}\right\rangle \overset{(b)}{\leftrightarrow} \left\langle \begin{array}{c} \inf\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ (C) \end{array}\right\rangle \overset{(c)}{\equiv} \left\langle \begin{array}{c} \min\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m} \ \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in S_y \\ \text{logo } S_y = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\} \\ (D) \end{array}\right.$$

5.2 Par Primal/Dual

Em função deste jogo duplo este par de problemas, (5.7) e (5.1), é designado par **primal-dual**. Se o problema (5.1) é o **Problema Primal**, então (5.7) é seu **Problema Dual**.

Podemos fazer o mesmo jogo com todas as outras variantes de restrições, obtendo a seguinte tabela

Restrições	Tipos de problemas/penalidades: minimização $y'(b - \mathbf{A}x)$	maximização $y'(b - \mathbf{A}x)$
$\mathbf{A}x = b$	$y \in \mathbb{R}^n$	$y \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{A}x \leqq b$	$y \in \mathbb{R}^n_-$	$y \in \mathbb{R}^n_+$
$\mathbf{A}x \geqq b$	$y \in \mathbb{R}^n_+$	$y \in \mathbb{R}^n_-$

Restrições	Tipos de problemas/penalidades: $\min_x \sup_y$ $y'(b - \mathbf{A}x)$	$\max_x \inf_y$ $y'(b - \mathbf{A}x)$
$b - \mathbf{A}x = \mathbf{0}$	$y \in \mathbb{R}^n$	$y \in \mathbb{R}^n$
$b - \mathbf{A}x \geqq \mathbf{0}$	$y \in \mathbb{R}^n_-$	$y \in \mathbb{R}^n_+$
$b - \mathbf{A}x \leqq \mathbf{0}$	$y \in \mathbb{R}^n_+$	$y \in \mathbb{R}^n_-$

Exercício 5.1 *Usando os multiplicadores, deduza os problemas duais de*

1. $\max\{c'x : \mathbf{A}x = b\}$;
2. $\max\{c'x : \mathbf{A}x \geqq b\}$;
3. $\max\{c'x : \mathbf{A}x \geqq b \wedge x \geqq \mathbf{0}\}$;
4. $\min\{c'x : \mathbf{A}x = b\}$;
5. $\min\{c'x : \mathbf{A}x \geqq b\}$;
6. $\min\{c'x : \mathbf{A}x \geqq b \wedge x \geqq \mathbf{0}\}$;

Exercício 5.2 *Considere o problema geral de maximização em Programação Linear, (P_{max}), abaixo descrito e obtenha seu dual.*
Sugestão: procure resolver este problema por dois processos, verificando o mesmo resultado, via dual do problema canônico de programação linear e via dualização usando o processo esquematizado na seção 5.1

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & \langle c^1, x^1\rangle & + & \langle c^2, x^2\rangle & + & \langle c^3, x^3\rangle & \\
 & \mathbf{A}^{11}x^1 & + & \mathbf{A}^{12}x^2 & + & \mathbf{A}^{13}x^3 & = b^1 \\
 & \mathbf{A}^{21}x^1 & + & \mathbf{A}^{22}x^2 & + & \mathbf{A}^{23}x^3 & \leqq b^2 \\
 & \mathbf{A}^{31}x^1 & + & \mathbf{A}^{32}x^2 & + & \mathbf{A}^{33}x^3 & \geqq b^3 \\
 & x^1\mathbb{R}^{n_1}_+ & , & x^1\mathbb{R}^{n_2} & , & x^1\mathbb{R}^{n_3}_- &
\end{array}$$

Exercício 5.3 *Prove que o dual do dual de um problema geral de maximização em Programação Linear equivale ao seu primal.*

Podemos relacionar a função de custo extendida com a viabilidade (e valor objetivo) dos problemas,

Lema 5.3 *Usando a função de custo estendida, valem as seguintes equivalências,*

$$\bar{x} \in \overline{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x = b\} \iff c'\bar{x} = \inf_{y \in \mathbb{R}^m} L(\bar{x}, y) \in \mathbb{R}, \tag{$\star$}$$

$$\bar{y} \in \overline{Y} := \{y \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}'y \geqq c\} \iff b'\bar{y} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}. \tag{$\star\star$}$$

Demonstração As duas equivalências seguem, respectivamente, das seguintes[3],

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^m} L(\bar{x}, y) = c'\bar{x} + \inf_{y \in \mathbb{R}^m} y'(b - \mathbf{A}\bar{x}) \in \mathbb{R} \iff \inf_{y \in \mathbb{R}^m} y'(b - \mathbf{A}\bar{x}) = 0 \iff \mathbf{A}\bar{x} = b$$

[3]Note que $\overline{X} \cap \mathbb{R}^n_+$ resulta no poliedro canônico $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x = b \wedge x \geqq \mathbf{0}\}$.

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R} \iff \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c}-\mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}}) = 0 \iff \boldsymbol{c}-\mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}} \leqq \mathbf{0} \iff \mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \boldsymbol{c}.$$

■

Em particular, quando consideramos um par de pontos viáveis nos problemas (5.1) e (5.7), podemos obter a seguinte desigualdade,

Lema 5.4 *Se* $\langle \overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+$ *e* $\overline{\boldsymbol{y}} \in \overline{Y}\rangle$, *então* $\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \leqq \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}$.

Demonstração Das hipóteses segue que $\boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} \overset{\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}}{=} (\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}})'\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{x}}'\mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{c} \overset{\overline{\boldsymbol{x}}\geqq\mathbf{0}\wedge\mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}}\geqq\boldsymbol{c}}{\geqq} \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}$. ■

Exercício 5.4 *Redefinindo* $\overline{Y} := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m : \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}\}$, *mostre que:* $\left\langle \overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+ \text{ e } \overline{\boldsymbol{y}}\in\overline{Y}\right\rangle \Rightarrow \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}$.

Note que $\overline{Y}$ acima definido forma o conjunto das restrições do dual do problema de minimização sobre $\overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+ = X$. Ou seja, o dual de $\min\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$ é $\max\{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} : \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}\}$. Daqui pode-se concluir que para um primal de minimização sobre $\overline{X}\cap\mathbb{R}^n_+$, o valor objetivo de qualquer ponto viável primal é maior ou igual a de qualquer viável dual ($\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}$). A este dois resultados, normalmente denominamos **Teorema Fraco de Dualidade**:

Teorema 5.1 *Considerando como restrições primais o poliedro canônico* X *e tomando* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *e* $\overline{\boldsymbol{y}}$, *respectivamente, um ponto viável primal e um viável dual:* $\begin{cases} \text{se o problema primal é de maximização, então } \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \leqq \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} \\ \text{se o problema primal é de minimização, então } \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \geqq \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}. \end{cases}$

Exemplo 5.1 *Alguns exemplos de funcionais não lineares onde a desigualdade é estrita: lembre-se, o jogador primal escolhe seu "melhor" ponto sabendo que o jogador dual vai tentar prejudicá-lo. Por exemplo, no problema* $\inf_{\boldsymbol{y}}\sup_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, *o jogador primal escolhe o* $\boldsymbol{y}$ *e depois o jogador dual escolhe seu* $\boldsymbol{x}$.

$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\inf_{\boldsymbol{y}\in B}\sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\sup_{\boldsymbol{x}\in A}\inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	$\boldsymbol{y}\in B \wedge \boldsymbol{x}\in A$
$\frac{x}{y}$	$+\infty$	0	$y>0\wedge x\geqq 0$
$-\frac{x}{y}$	0	$-\infty$	$y>0\wedge x>0$
$1-\frac{x}{y}$	1	$-\infty$	$y>0\wedge x>0$[4]
$-(x-y)^2$	0	$-\infty$	$y\in\mathbb{R}\wedge x\in\mathbb{R}$

Entretanto vale um resultado mais geral que o exposto no teorema acima. Mesmo para problemas de otimização não-lineares, vale o seguinte teorema Fraco de Dualidade,

Lema 5.5 *Sejam* A *e* B *quaisquer conjuntos e* $L(.,.) : A\times B \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *qualquer função. Então*

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in B}\sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \sup_{\boldsymbol{x}\in A}\inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Demonstração Quaisquer que sejam $\overline{\boldsymbol{x}}\in A$ e $\overline{\boldsymbol{y}}\in B$, teremos

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) \geqq L(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \geqq \inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}), \quad \forall(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})\in A\times B.$$

[4] Se deixar $x\geqq 0$, então ocorreria empate entre o primal e o dual, pois $\sup_{x\geqq 0}\inf_{y>0} 1-\frac{x}{y} = 1$ (o jogador primal escolheria $x=0$).

Deste modo podemos minimizar o funcional à esquerda quanto à $\overline{\boldsymbol{x}}$ e à direita quanto à $\overline{\boldsymbol{y}}$, seguindo daí a tese,

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in B}\sup_{\boldsymbol{x}\in A} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \sup_{\boldsymbol{x}\in A}\inf_{\boldsymbol{y}\in B} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

■

Apesar do resultado acima não estar no formato do Teorema Fraco de dualidade, 5.1, a partir de sua demonstração e do lema 5.2, podemos enquadrar o teorema 5.1 como corolário do lema acima: $\overline{\boldsymbol{x}}$ viável primal $\Rightarrow \inf_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}$ e $\overline{\boldsymbol{y}}$ viável dual $\Rightarrow \inf_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}$, assim, por exemplo, quando o primal é de maximização, para qualquer par viável $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$,

$$\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} = \inf_{\boldsymbol{y}\in S_y} L(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \leqq L(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \leqq \sup_{\boldsymbol{x}\in S_x} L(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}.$$

Exercício 5.5 *Adotando* $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}'\boldsymbol{y})$ *e as equivalências*

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+}\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+}\left\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n}\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{x})\right\} \equiv \max\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n}\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n}\left\{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+}\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{c} - \mathbf{A}'\boldsymbol{y})\right\} \equiv \min\{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} : \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\},$$

demonstre o teorema 5.1 como corolário do lema anterior.

5.3 Teorema Forte de Dualidade

Nesta seção voltaremos a trabalhar com o par primal/dual a partir do problema canônico, isto é,

$$\text{Primal:}\quad \left.\begin{array}{r}\max\ \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}\\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\end{array}\right\rangle \equiv \left\langle\begin{array}{l}\max\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in X\}\\ \text{sendo } X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n :\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\};\end{array}\right. \qquad \text{(PLC)}$$

$$\text{Dual:}\quad \left.\begin{array}{r}\min\ \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}\\ \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\end{array}\right\rangle \equiv \left\langle\begin{array}{l}\min\{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}' \in Y\}\\ \text{sendo } Y := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m :\ \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}\}.\end{array}\right. \qquad \text{(DLC)}$$

Denotaremos por VOP e VOD, respectivamente, os valores ótimos do (PLC) e do (DLC). Lembrando que VOP$= -\infty$ quando o (PLC) for inviável e VOD$= +\infty$ quando o (DLC) for inviável, podemos mostrar que

Lema 5.6 *Se o* (PLC) *é viável, então* VOP$=$ VOD
VOP$= +\infty \implies$ (DLC) *inviável.*

Demonstração Supondo o (PLC) viável, analisaremos separadamente dois casos:

- Se VOP$= +\infty$, então existe $\boldsymbol{x}_\lambda \in X$, $\forall\lambda \geqq 0$, para o qual
$$\lim_{\lambda\to\infty}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_\lambda = +\infty.$$
Neste caso não pode existir $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y$, pois se existisse um tal $\overline{\boldsymbol{y}}$, do teorema Fraco de Dualidade (5.1), para maximização, teríamos
$$\boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{x} \in X,$$
o que implicaria (por continuidade) que $\boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \lim_{\lambda\to\infty}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}_\lambda = +\infty$ (absurdo, pois $\boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}}$ é um número real).
- Se VOP$\in\mathbb{R}$, então existe um $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ que atinge o ótimo, VOP$= \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}$. Neste caso, da condição suficiente de otimalidade, existe uma base viável B que gera $\overline{\boldsymbol{x}}$ e para a qual
$$\boldsymbol{\gamma}_N = \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N\boldsymbol{\lambda} \leqq \mathbf{0},\quad \text{sendo } \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B. \qquad (\star)$$
Daí podemos provar que $\boldsymbol{\lambda}$ é um ponto viável no (DLC) e que VOD$= \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\lambda}$:

– $\boldsymbol{\lambda} \in Y$: para mostrar que $\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} \geqq \boldsymbol{c}$ fica mais fácil analisar separadamente os índices de B e de N,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B - \mathbf{A}'_B\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B - \mathbf{A}'_B(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c}_N - \mathbf{A}'_N\boldsymbol{\lambda} \overset{(\star)}{\leqq} \mathbf{0} \end{bmatrix} \leqq \mathbf{0} \implies \boldsymbol{c} - \mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} \leqq \mathbf{0}.$$

– Como $\overline{\boldsymbol{x}}$ é gerado por B, temos que $\overline{\boldsymbol{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \mathbf{0}$ e $\overline{\boldsymbol{x}}_N = \mathbf{0}$, deste modo

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{b}'(\mathbf{A}_B^{-1})'\boldsymbol{c}_B = (\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b})'\boldsymbol{c}_B = \overline{\boldsymbol{x}}'_B\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{c}'_B\overline{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{c}'_B\overline{\boldsymbol{x}}_B + \boldsymbol{c}'_N\mathbf{0} = \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}}. \qquad (\star\star)$$

Além disso, do teorema Fraco de Dualidade para o problema primal de maximização (teorema 5.1), segue que

$$\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \overset{(\star\star)}{=} \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\lambda} \leqq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}, \quad \forall \boldsymbol{y} \in Y.$$

Logo, $\boldsymbol{\lambda}$ é solução ótima do (DLC) e $\boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\lambda}$, como desejávamos demonstrar. ■

Do mesmo modo, se o dual for ilimitado, então o primal é inviável,

Lema 5.7 *Se o* (DLC) *é viável, então* VOD= VOP
VOD= $-\infty \implies$ (PLC) *inviável.*

Demonstração Colocaremos o (DLC) na forma canônica para podermos usar o lema acima e concluir a tese.

$$(\mathsf{DLC}) \quad \left\langle \begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \\ & \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{ll} \max & -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \\ & \mathbf{A}'\boldsymbol{y} - \mathbf{I}'\boldsymbol{y}^r = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}^r \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{ll} \max & -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}^+ + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y}^- - \mathbf{0}'\boldsymbol{y}^r \\ & [\mathbf{A}' | -\mathbf{A}' | -\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^+ \\ \boldsymbol{y}^- \\ \boldsymbol{y}^r \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} \\ & (\boldsymbol{y}^+, \boldsymbol{y}^-, \boldsymbol{y}^r)' \geqq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\mathrm{P})$$

Como (P) está no forma canônica e é viável por hipótese, podemos aplicar o lema anterior para concluir que:

- VOP= VOD: direto, apenas usando o fato que o dual do dual é o primal.
- VOD= $-\infty \implies$ (PLC) inviável: Como VOD= $-\infty$ e, da construção de (P), o valor objetivo de (P) é o negativo do correspondente do (DLC), segue que seu valor ótimo é o negativo de VOD, ou seja, VO de (P)= $+\infty$.

  Assim, estamos em condições de aplicar a segunda parte do lema 5.6 e daí concluimos que o dual de (P) é inviável. Para finalizar a tese, basta mostrarmos que o dual de (P) é precisamente o (PLC):

$$\text{dual de (P)} \equiv \left\langle \begin{array}{l} \min \boldsymbol{c}'\boldsymbol{w} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ -\mathbf{A}' \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \geqq \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{l} \min \boldsymbol{c}'\boldsymbol{w} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{w} \geqq -\boldsymbol{b} \\ -\mathbf{A}\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{w} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{array}{l} \min \boldsymbol{c}'\boldsymbol{w} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{w} \leqq \mathbf{0} \end{array} \right\rangle \overset{\boldsymbol{x}:=-\boldsymbol{w}}{\equiv} \left\langle \begin{array}{l} \max \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\mathrm{D})$$

  Como o dual do (DLC), (D), equivale ao (PLC), segue daí a tese. ■

Com estes dois lemas, podemos enunciar um resultado importante para problemas lineares, o **Teorema Forte de Dualidade**,

Teorema 5.2 *Se um dos problemas do par primal/dual é viável, então os valores ótimos coincidem.*

Demonstração Como qualquer problema de linear pode ser colocado na forma canônica, a tese segue diretamente dos lemas 5.6 e 5.7. ■

Exemplo 5.1 *Considere os problemas* (PLC) *e* (DLC)*, usando*

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{c} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, apesar do (PLC) *ter dimensão* 4*, fica fácil ver que o mesmo é equivalente a um problema no* $\mathbb{R}^2$*:* $\max\{-x_1 + x_2 : x_1 + x_2 \geqq 2 \wedge x_2 \leqq 2\}$.

Graficamente é fácil verificar que o (PLC) *tem solução ótima (única)* $\overline{\boldsymbol{x}} = (0, 2, 0, 0)$ *e o* (DLC) *tem como solução* $\boldsymbol{y} \in [\{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2\}]$*, sendo* $\boldsymbol{y}^1 = (0, 1)$ *e* $\boldsymbol{y}^2 = (-1, 2)$ *(como exercício, prove estas duas afirmações).*

Devemos notar que no (PLC)*, podemos utilizar duas bases distintas para o único vértice ótimo, sendo*

Base $B_1 = (2, 4)$	$\boldsymbol{\gamma}_{N_1} = (\gamma_1, \gamma_3) = (-2, 1)$
	$\mathbf{A}_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}'_{B_1}\mathbf{A}_{B_1}^{-1} = (1, 0)$
Base $B_2 = (2, 3)$	$\boldsymbol{\gamma}_{N_2} = (\gamma_2, \gamma_3) = (-1, -1)$
	$\mathbf{A}_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}'_{B_2}\mathbf{A}_{B_2}^{-1} = (0, 1)$

$\diamond$

5.4 Aplicações do Teorema Forte de Dualidade: Teorema de Alternativas

Nesta seção examinaremos teoremas de alternativas a partir do Teorema Forte de Dualidade. Estes teoremas podem ser caracterizados pela existência de dois sistemas (S_1 e S_2) mutuamente exclusivos: ambos os sistemas não podem ter solucão e se um deles não tem solução o outro tem.

Assim, um **teorema de alternativa** pode ser esquematizado da seguinte maneira: considerando os dois sistemas lineares S_1 e S_2, então

$S_1 \wedge S_2 = falso$: ou seja, ambos os sistemas não podem ter solução
$\neg S_1 \Rightarrow S_2$: ou seja, se S_1 não tem solução, então S_2 tem (ou vice-versa[5])

Um dos mais conhecidos (e antigos) teoremas de alternativas, que surgiu bem antes da teoria de Programação Linear, é o **Teorema de Farkas**, de 1902.

Teorema 5.3 *Se tomarmos* $S_1 : \begin{array}{ll} (1) & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ (2) & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}$ *e* $S_2 : \begin{array}{ll} (3) & \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \leqq \mathbf{0} \\ (4) & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} > 0 \end{array}$ *, então* (S_1, S_2) *constitue um teorema de alternativas.*

Demonstração Vamos usar o esquema de prova acima indicado:

- $S_1 \wedge S_2 = falso$: Por contradição suporemos a existência de um par $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, respectivamente, solução de S_1 e S_2. Neste caso teríamos

$$0 \overset{(4)}{<} \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} \overset{(1)}{=} (\mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}})'\overline{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{x}}'}_{\geqq \mathbf{0}} \underbrace{\mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}}}_{\leqq \mathbf{0}} \overset{(2)\wedge(3)}{\leqq} 0.$$

  o que é claramente uma contradição. Logo, não pode existir o par $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$.

- Nesta parte associaremos ao par (S_1, S_2) um par primal/dual, de modo que a negação de um dos sistemas equivala a inviabilidade de um dos problemas lineares e ilimitação do outro (via Teorema Forte de Dualidade)[6].

[5] Note que $A \Rightarrow B$ equivale a expressão $\neg B \Rightarrow \neg A$.

[6] Este é o ponto chave de demonstração de teorema de alternativas usando esta técnica: encontrar o par primal/dual conveniente.

Considere o par primal/dual $(P)\begin{cases} \min \mathbf{0}'\boldsymbol{x} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} \end{cases}$ e $(D)\left\{ \max \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} \quad \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \leqq \mathbf{0} \right.$.

Mostraremos que $\neg S_1 \Rightarrow S_2$. Suponha que S_1 não tenha solução, então (P) é inviável, logo $\mathsf{VOP} = +\infty$. Por outro lado, (D) é viável (para $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$), assim podemos aplicar o Teorema Forte de Dualidade para concluirmos que $\mathsf{VOD} = \mathsf{VOP} = +\infty$. Deste modo, (D) é ilimitado e portanto deve existir uma direção de ilimitação $\overline{\boldsymbol{y}}$, ou seja,

$$\exists \overline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}} \leqq \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} > 0,$$

seguindo daí que S_2 tem solução. ■

Uma consequência interessante deste teorema é uma caracterização de otimalidade do par primal/dual.

Teorema 5.4 *O par canônico de programação linear tem solução ótima* $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *se e somente se* $(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *é solução do sistema* $\begin{cases} \mathbf{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}'\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{x}} \\ \mathbf{A}'\overline{\boldsymbol{y}} \geqq \boldsymbol{c} \\ \overline{\boldsymbol{x}} \geqq \mathbf{0} \end{cases}$.

A demonstração deste teorema será omitida. A condição necessaria para otimalidade (que usa o teorema de Farkas) é bastante trabalhosa, porém a condição suficiente pode ser feita diretamente. Recomendamos que o leitor tente mostrar a condição suficiente.

Como exercícios de teoremas de alternativas, sugerimos o teorema de Gale e mais uma variante do teorema de Farkas bastante interessante, conforme abaixo.

Exercício 5.6 *Demonstre o teorema de alternativas de Gale:* $S_1 :\ (1)\ \ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *e* $S_2 : \begin{array}{ll} (2) & \mathbf{A}'\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \\ (3) & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} = 1 \end{array}$.

Note que os poliedros associados aos sistemas S_1 e S_2 são definidos por igualdades, por isso as variáveis $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ serão livres de sinais no par primal/dual adequado.

Exercício 5.7 *Considerando $\mathbf{1} = (1,1,\ldots,1)' \in \mathbb{R}^n$, mostre que os sistemas seguintes constituem um teorema de alternativas:* $S_1 : \begin{array}{ll} (1) & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ (2) & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$ *e* $S_2 :\ (3)\ \ \mathbf{A}'\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{1}$.

Muita atenção à desigualdade $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, que implica em $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Exemplo 5.2 *Dado dois conjuntos de pontos $\mathcal{A} := \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ e $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{b}_i\}_{i\in I}$, $I := \{1,2,\ldots,n\}$, determinar se existe um hiperplano que separe estritamente os dois conjuntos.*

Defina as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente, com linhas $\{(\boldsymbol{a}^i)', i \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $\{(\boldsymbol{b}^i)', i \in \{1,2,\ldots,n\}$. O problema é determinar a existência ou não de um vetor $(\boldsymbol{x},\gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} > \gamma\mathbf{1}$ e $\mathbf{B}\boldsymbol{x} < \gamma\mathbf{1}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \gamma \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{$\star$}$$

Mas este sistema está numa forma adequada para teoremas de alternativas e usando Gale, notamos que $(\star)$ tem solução se e somente se o sistema abaixo não tiver solução,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & -\mathbf{B}' \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0} \tag{$\star\star$}$$

Note que o sistema $(\star\star)$ tem solução $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, então $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ (pois $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{1}'\boldsymbol{u} - \mathbf{1}'\boldsymbol{v} = 0$). Assim, para resolver este sistema podemos construir o seguinte PL

$$
(P) \qquad
\begin{array}{ll}
\max & \mathbf{1}'\boldsymbol{u} + \mathbf{1}'\boldsymbol{v} - 2 \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & -\mathbf{B}' \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leqq \mathbf{1} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geqq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

Se (P) tem solução 0*, então* $(\star\star)$ *tem solução e* $(\star)$ *não. Por outro lado, se (P) tem solução menor que* 0*, então* $(\star\star)$ *não tem solução e assim,* $(\star)$ *tem solução.* $\diamond$

É importante notar que a viabilidade do sistema $(\star\star)$ é equivalente a existência de um ponto $\boldsymbol{x}$ dentro do casco convexo de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$:

$$
\sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{A}'\boldsymbol{u} = \mathbf{0} = \mathbf{B}'\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{b}_i, \text{ com } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = 1.
$$

Exercício 5.8 *Prove a afirmação acima.*