MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Prova 3 - 28/06/2018
Profa. Cláudia Cueva Candido

Nome : ______________________

NºUSP : Resolução da prova.

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique suas afirmações.

1. (3,0) Sejam $g(x,y) = \dfrac{y^2}{x^6+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = \operatorname{sen}(y + x^3)$.

a) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\cdot g(x,y)$.

c) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ em que $\vec{u}$ é o versor do $\nabla g(1,-1)$.

a) Sejam $\gamma(t) = (t,0)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(t) = (0,t)$, $t\in\mathbb{R}$. γ e β contínuas, $\gamma(0)=\beta(0)=(0,0)$

Temos $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{0^2}{t^6+0^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

$\displaystyle\lim_{t\to 0} g(\beta(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{0^6+t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$

$\neq \Rightarrow \nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

b) Temos $0 \le y^2 \le x^6 + y^2 \Rightarrow 0 \le \dfrac{y^2}{x^6+y^2} \le 1$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$\therefore$ g é função limitada. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim \operatorname{sen}(\underbrace{x+y^3}_{0}) = 0$ → 0, sen é contínua.

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{f(x,y)}^{0} \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\text{ltda}} = 0$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\cos(y+x^3)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(y+x^3)$ são contínuas $\Rightarrow$ f é diferenciável

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{-6x^5y^2}{(x^6+y^2)^2}$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{2y(x^6+y^2) - y^2\cdot 2y}{(x^6+y^2)^2} = \dfrac{2yx^6}{(x^6+y^2)^2}$. $\quad \nabla g(1,-1) = \left(\dfrac{-6}{4}, \dfrac{-2}{4}\right) = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow \|\nabla g(1,-1)\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$ e $\vec{u} = \dfrac{\nabla g(1,-1)}{\|\nabla g(1,-1)\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}(3,1)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1) \underset{\uparrow f \text{ é diferenciável!}}{=} \nabla f(1,-1)\cdot\vec{u} = (3,1)\cdot\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\right)(3,1) = \dfrac{-10}{\sqrt{10}}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1) = -\sqrt{10}}$$

2. (2,0) Seja S o elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$.

a) Parametrize a curva C obtida como intersecção de S com o plano $x + y = 0$.

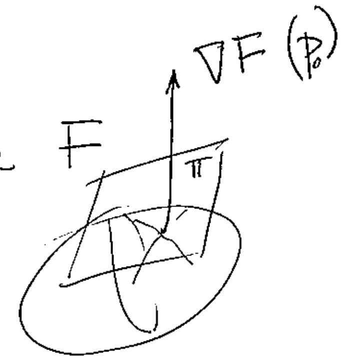
b) Determine a equação do plano tangente a S no ponto $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \end{cases}$ $\quad \dfrac{x^2}{4} + x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{5}{4}x^2 + z^2 = 1 \text{ no plano } x+y=0}$ C

$\dfrac{5}{4}x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 + \cancel{y}^2 = 1$ Escolho $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{2}x = \cos t \\ z = \operatorname{sen} t \\ y = -x \ \ldots \end{cases}$

$\gamma(t) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos t, \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\cos t, \operatorname{sen} t\right), t \in [0, 2\pi]$

é uma parametrização de C.

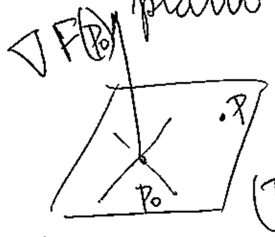


b) S é a superfície de nível 1 de F

$F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2$.

R.C. $\Rightarrow \nabla F(p) \perp S$ em p, pois F é diferenciável já que suas derivadas parciais $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{2x}{4}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z$ são contínuas.

Temos $p_0 = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in S$, $\nabla F(p_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -1\right)$ e o plano tangente, π, a S em p_0 é tq:



$P \in \pi \Leftrightarrow (P - P_0) \perp \nabla F(p_0)$

(π) $\left\langle \left(x - \sqrt{2}, \left(y - \frac{1}{2}\right), \left(z + \frac{1}{2}\right)\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -1\right) \right\rangle = 0$

(π) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + 1 \cdot (y - 1/2) - 1\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$

3. (2,5) Sejam $f(x,y) = x^3 - x^2 + y^2 - 2y$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

a) Determine os pontos críticos de f (ou seja, os pontos em que o gradiente de f é nulo). $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2x, 2y - 2)$

b) Justifique porque tem solução o problema

P: Determinar o valor mínimo e o valor máximo de f em D.

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y-2)$

c) Sendo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$, justifique porque as soluções do sistema S abaixo devem ser consideradas para resolver o problema P.

$$S \begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

d) Resolva o problema.

$\boxed{\text{Pontos críticos } P_1 = (0,1) \quad P_2 = (2/3, 1)}$

a) $\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2/3 \\ 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$

b) $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \therefore D$ é o disco de centro $(0,1)$ e raio 1. D é fechado (a fronteira é a circunf) e limitado.
$\therefore D$ é compacto
f é polinomial e $\therefore$ contínua $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ $\exists$ mín/Máx de f em D.

c) O ponto de mín/Máx de f em D pode ser ponto crítico interior: P_1 ou P_2 ou pode estar na fronteira de D $\partial D = \{(\ ) \mid g(x,y) = 0\}$
Temos f e g diferenciáveis, pois suas derivadas parciais são contínuas e $\nabla g(x,y) \neq \vec{0}$ na ∂D.
Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, se P_0 é pt de mín/Máx de f em D então é solução de S.
$\therefore$ as soluções de S são candidatos a solução de P na ∂D.

d) $S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x = \lambda 2x & (1) \Leftrightarrow x(3x - 2(\lambda+1)) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x = 2(\lambda+1) \\ 2y - 2 = \lambda(2y-2) & (2) \Leftrightarrow 2(y-1)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 & (3) \end{cases}$

De (1)
- $x = 0$ e (2) $\begin{cases} y = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ mas é sol de 3 em (3): $y = 0$ ou $y = 2$ $\quad \begin{cases} P_3 = (0,0) \\ P_4 = (0,2) \end{cases}$
- $x = \frac{2\lambda+2}{3} \neq 0$ e (2) $\begin{cases} y = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ $\quad P_5 = (-1,1)$ $P_6 = (1,1)$

Comparando valores nos candidatos
$f(P_1) = -1$ $f(P_2) = \frac{-31}{27}$ $f(P_3) = 0$ $f(P_4) = 0$ $f(P_5) = -3$ $f(P_6) = -1$

Conclusão: O valor mínimo de f em D é -3.
O valor máximo de f em D é 0.

4. (2,5)Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique, cuidadosamente, sua resposta.

a) Se $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$ então não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

b) Existe e é nulo o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x-y^3)}{x-y^3}$.

c) O plano tangente ao gráfico da função de duas variáveis f, diferenciável, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ é o plano de equação $-2x+2y-z+3=0$ então a curva dada por $\gamma(t) = (t^2,\ t^3+t)$ não pode ser parametrização da curva de nível f pelo ponto (x_0,y_0).

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^2)^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{1/3} = 0$

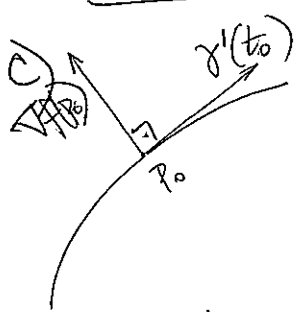
Falsa. $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x-y^3)}{x-y^3} \underset{\uparrow}{=} \lim_{w\to 0}\frac{1-\cos w}{w} \overset{L'H}{=} \lim_{w\to 0}\frac{\operatorname{sen} w}{1} = 0$

$w = x-y^3$
$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow w\to 0$

Verdadeira.

c)



Se γ é parametrização da curva de nível de f por $p_0 = (x_0,y_0)$ então f diferenciável $\overset{R.C.}{\Longrightarrow}$ $\nabla f(p_0) \perp \gamma'(t_0)$.

Do plano tangente dado segue que

$\gamma'(t) = (2t, 3t^2+1)$ $\quad \nabla f(x_0,y_0) = (-2,2)$.

Assim sendo, perguntamos se $\exists\ t_0 /$

$\langle \gamma'(t_0), \nabla f(x_0,y_0)\rangle = 0$

$\exists t_0 /\ \langle (2t, 3t^2+1)(-2,2)\rangle = 0$?

Mas $-4t+6t^2+2 = 0$ tem discriminante $\nabla = 16 - 4\cdot 6\cdot 2 < 0$

e $\therefore\ \nexists\ t_0$ tal que $\gamma'(t_0) \perp \nabla f(p_0)$

$\Rightarrow \gamma$ não ~~pode~~ ser parametrização de $C_k f$

Verdadeira.