MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Prova 2 - 10/05/2018
Profa. Cláudia Cueva Candido

Nome : Resolução

NºUSP :

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique suas afirmações.

1. Seja $f(x,y) = x^2 \ln(x^2 + y^4 + xy)$.
   a) Calcule as derivadas parciais de f e indique em que conjunto estão definidas.
   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0$, $f(1,0))$.

a) $\text{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^4 + xy > 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \ln(x^2+y^4+xy) + x^2 \cdot \frac{2x+y}{x^2+y^4+xy}, \quad \forall (x,y) \in \text{Dom} f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \frac{4y^3+x}{x^2+y^4+xy}, \quad \forall (x,y) \in \text{Dom} f.$$

b) $f(1,0) = 1^2 \ln(1^2 + 0^4 + 1.0) = 1 \ln 1 = 0.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 \cdot 1 \ln 1 + 1^2 \cdot \frac{2.1+0}{1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1^2 \cdot \frac{4.0^3+1}{1} = 1$$

Plano tangente ao Grf no pt $(1,0,f(1,0))$ é o plano de equação:

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

$$z = 0 + 2(x-1) + 1(y-0)$$

$$\therefore \boxed{2x + y - z - 2 = 0}$$

2. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}$.

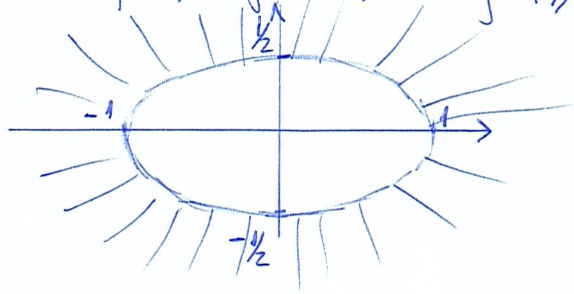
a) Determine e esboce $Dom\, f$.

b) Classifique as curvas de nível de f.

c) Esboce $C_k(f)$ para $k = 0, 1$ e 2.

d) Esboce o gráfico de f.

a) $Dom\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + 4y^2 - 1 \geq 0\}$



b) $C_k(f) = \{(x,y) \in Dom\, f \,/\, f(x,y) = k\}$

$\sqrt{x^2 + 4y^2 - 1} = k \Rightarrow k \geq 0$

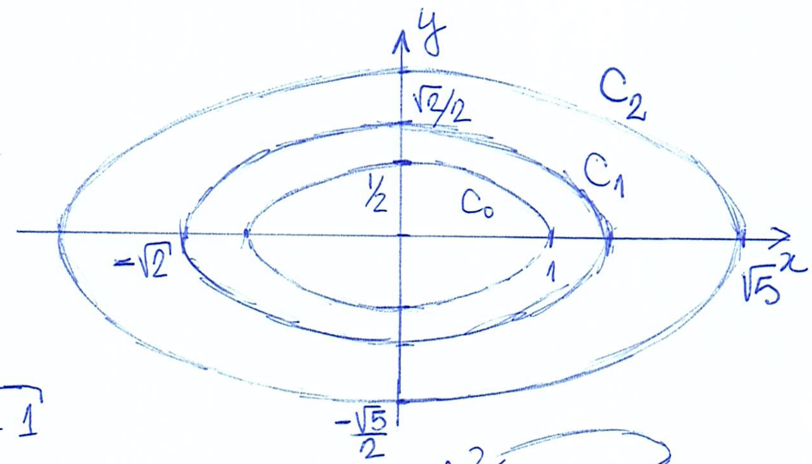
$x^2 + 4y^2 = 1 + k^2$

Eq. de $C_k(f)$: $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{1+k^2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1+k^2}{4}}\right)^2} = 1$ $\Bigg\{$ A curva $C_k(f)$ é elipse com focos em Ox.

c) $k = 0$: $x^2 + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$ (corta Ox em $(-1,0)$ e $(1,0)$; Oy em $(0, -\frac{1}{2})$ $(0, \frac{1}{2})$

$k = 1$ $\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1$ (Ox em $(-\sqrt{2}, 0)$ $(\sqrt{2}, 0)$ e Oy $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$).

$k = 2$: $\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2} = 1$



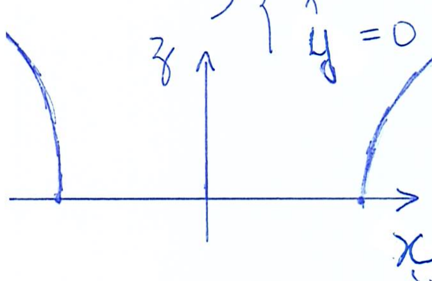
Cortes Verticais

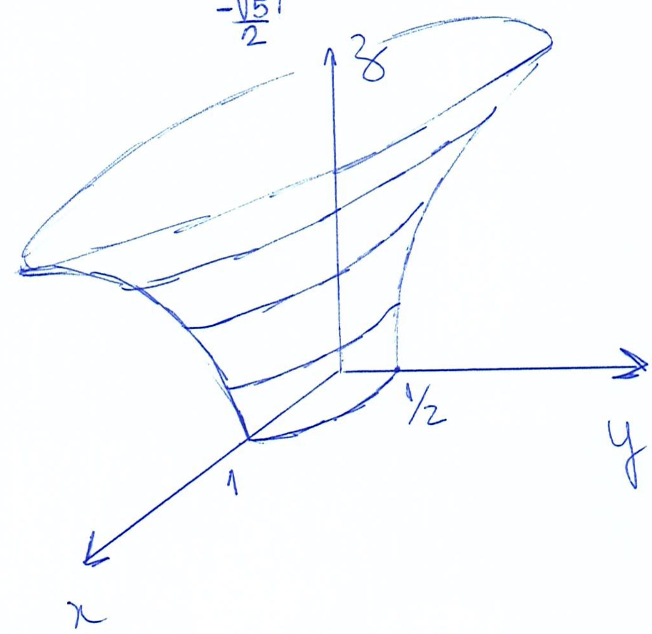
d) $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1} \\ y = 0 \end{cases} > z = \sqrt{x^2 - 1}$

$\Updownarrow$

$z \geq 0$ e $x^2 - z^2 = 1$

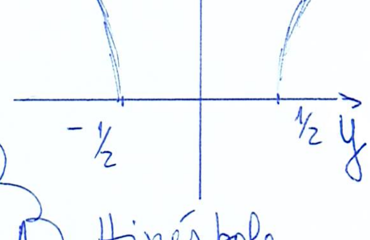
Hipérbole com $z \geq 0$ corta Ox





$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1} \\ x = 0 \end{cases}$

$z = \sqrt{4y^2 - 1} \Leftrightarrow$ $z \geq 0$ e $4y^2 - z^2 = 1$



Hipérbole com $z \geq 0$ corta Oy

3. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x + x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$. $\text{Dom} f = \mathbb{R}^2$

a) Classifique e esboce $C_k(f)$ para $k = 0$ e 1.

b) Determine a equação da reta tangente a $C_1(f)$ no ponto $\left(\dfrac{-3}{2}, 2\right)$.

c) Mostre que não há pontos do $Gr f$ no plano de equação $z = -1$.

a) $C_k(f) = \{(x,y) \in \text{Dom} f = \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = k\}$

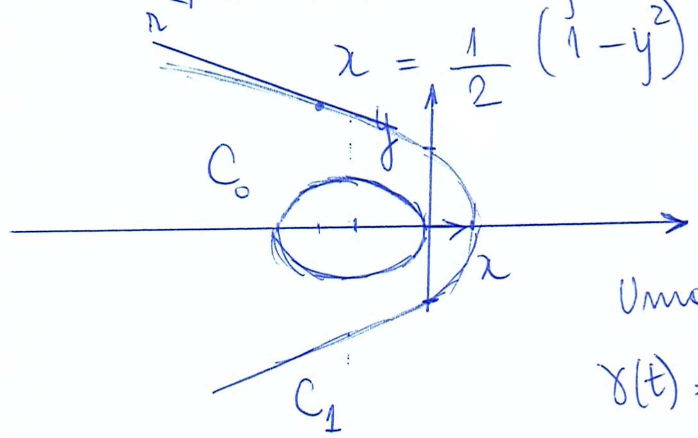
<u>$k=0$</u> : $f(x,y) = 0 \iff 2x + x^2 + 2y^2 = 0$

$\iff (x+1)^2 + 2y^2 = 1$: elipse

<u>$k=1$</u> : $f(x,y) = 1 \iff 2x + x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 1$

$\iff 2x = 1 - y^2$

$x = \frac{1}{2}(1 - y^2)$: parábola.



b) $C_1(f)$: $x = \frac{1}{2}(1 - y^2)$

Uma parametrização é:

$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}(1 - t^2), t\right)$.

$\gamma(t_0) = \left(\frac{-3}{2}, 2\right) \Rightarrow t_0 = 2$ (de fato $\gamma(2) = (-3/2, 2)$).

Uma eq vetorial da reta r é: $(x,y) = \gamma(t_0) + \lambda(\gamma'(t_0))$.

$(x,y) = \underbrace{\left(\frac{-3}{2}, 2\right)}_{\gamma(t_0)} + \lambda\underbrace{(-2, 1)}_{\gamma'(t_0)}$, (pois $\gamma'(t) = (-t, 1)$
$\gamma'(2) = (-2, 1)$).

c) $Gr f \cap \{(\ ) \,/\, z = -1\}$: $\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = -1 \end{cases}$

$f(x,y) = -1 \iff 2x + x^2 + 2y^2 = -x^2 - y^2 - 1$

$\iff 2x^2 + 2x + 2y^2 = -1$.

Mas $2x^2 + 2x + 2y^2 = x^2 + x^2 + 2x + 2y^2 = -1$.

$\iff x^2 + (x+1)^2 + 2y^2 = 0$ Abs.!

pois $x^2 + 2y^2 \geq 0$ e $(x+1)^2 \geq 1$ $\therefore$ Não há pontos (x,y) com $f(x,y) = -1$.

4. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique cuidadosamente suas afirmações.

a) Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é vazia a intersecção de duas curvas de nível k_1 e k_2, de f, com $k_1 \neq k_2$.

b) Se $\gamma(t) = \left(\operatorname{tg} t - 1, \dfrac{-1}{\cos t}\right)$, $t \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, então $Im\,\gamma$ está contida em uma curva de nível da função $f(x, y) = x^2 - y^2$.

c) Se a função de uma variável $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, tal que $h(1) = h'(1) = 1$, e $f(x, y) = e^{x/y}h(y)$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) > \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

a) Verdadeira. Suponhamos que exista $(x_0, y_0) \in C_{k_1}(f) \cap C_{k_2}(f)$.

Então: $(x_0, y_0) \in C_{k_1}(f) \Rightarrow f(x_0, y_0) = k_1$
$(x_0, y_0) \in C_{k_2}(f) \Rightarrow f(x_0, y_0) = k_2$ } Abs.!

pois $k_1 \neq k_2$ e f é função e $\therefore$ a cada (x_0, y_0) f associa um único valor real.

b) $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\operatorname{tg} t - 1, \dfrac{-1}{\cos t}\right)$.

Temos $f(\gamma(t)) = (\operatorname{tg} t - 1)^2 + \left(\dfrac{-1}{\cos t}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 t - 2\operatorname{tg} t + 1 - \sec^2 t$

$\Rightarrow f(\gamma(t)) = 2\operatorname{tg} t$ não é constante e $\therefore$ $Im\,\gamma$ não está contida em $C_k(f)$ para k real.

Falsa.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y} e^{x/y} h(y) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{1}{1} \cdot e^1 \cdot \underbrace{h(1)}_{=1} = e.$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-x}{y^2} e^{x/y} h(y) + e^{x/y} \cdot h'(y) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -e + e = 0.$

$e > 0$ e $\therefore$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) > \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ e a afirmação é verdadeira.