MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Prova 1 - 05/04/2018
Profa. Cláudia Cueva Candido

Nome : GABARITO

NºUSP :

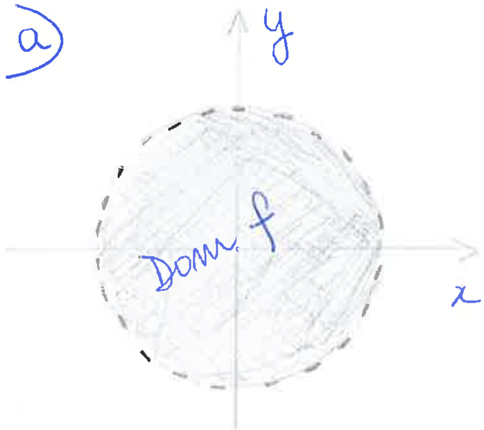
Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique suas afirmações.

1. (2,0) O domínio de uma função de duas variáveis dada por $h = h(x, y)$ é o maior subconjunto do $\mathbb{R}^2$ em que a expressão algébrica $h(x, y)$ está definida. a) Determine e esboce o domínio da função f dada por $f(x, y) = \dfrac{2xy - x^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \dfrac{p(x,y)}{r(x,y)}$.

b) Esboce a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x \geq 0\}$ e exiba uma expressão $g(x, y)$ de modo que o domínio da função g, definida por tal expressão, seja igual a A.

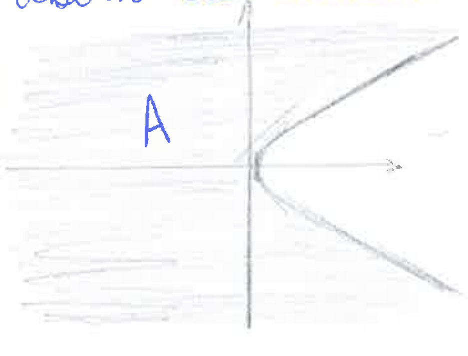
a)



A função p é polinomial e está definida no $\mathbb{R}^2$.
A função r é uma raiz de índice par e está definida para (x,y) tq $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Além disso está no denominador e devemos ter $9 - x^2 - y^2 > 0$ ou seja $x^2 + y^2 < 9$.

$\text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 9\}$ é o disco aberto de centro $(0,0)$ e raio 3.

b)



$y^2 - x \geq 0 \iff x \leq y^2$

Um exemplo é $g(x,y) =$

$g(x,y) = \sqrt[4]{y^2 - x}$.

$\text{Dom } g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x \geq 0\}$

2. Considere a curva parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (x(t)\ ,\ y(t)) = (t(t-3)^2\ ,\ t(t-3)).$$

$x(t) = t(t^2-6t+9) = t^3-6t^2+9t$ $\qquad$ $y(t) = t^2-3t$

a) Estude o sinal das funções coordenadas $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e indique a que quadrante pertence $\gamma(t)$ conforme t varia em $\mathbb{R}$. Marque os pontos que pertencem aos eixos. $x'(t) = 3t^2-12t+9 = 3(t^2-4t+3) = 3(t-1)(t-3)$.

b) Estude o sinal das derivadas x' e y' e indique direção e sentido do vetor $\gamma'(t)$ conforme t varia em $\mathbb{R}$. Marque no $\mathbb{R}^2$ os pontos em que a tangente é vertical ou horizontal.

c) A partir das informações dos itens anteriores esboce a $Im\,\gamma$ com os vetores tangentes e indique o sentido de percurso determinado por γ.

a)

		0		3	
$t(t-3)^2 = x$:	$-$		$+$		$+$
$t(t-3) = y$:	$+$		$-$		$+$
$\gamma(t) \in$	2º Q		4º Q		1º Q

$\gamma(0) = (0,0)$

$\gamma(3) = (0,0)$

$\gamma'(3) = (0,3)$

$\gamma'(0) = (9,-3)$

b)

		0		1		3/2		3	
$3(t-1)(t-3) = x'$:	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
$2t-3 = y'$:	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$\gamma'(t)$									

marcados no plano

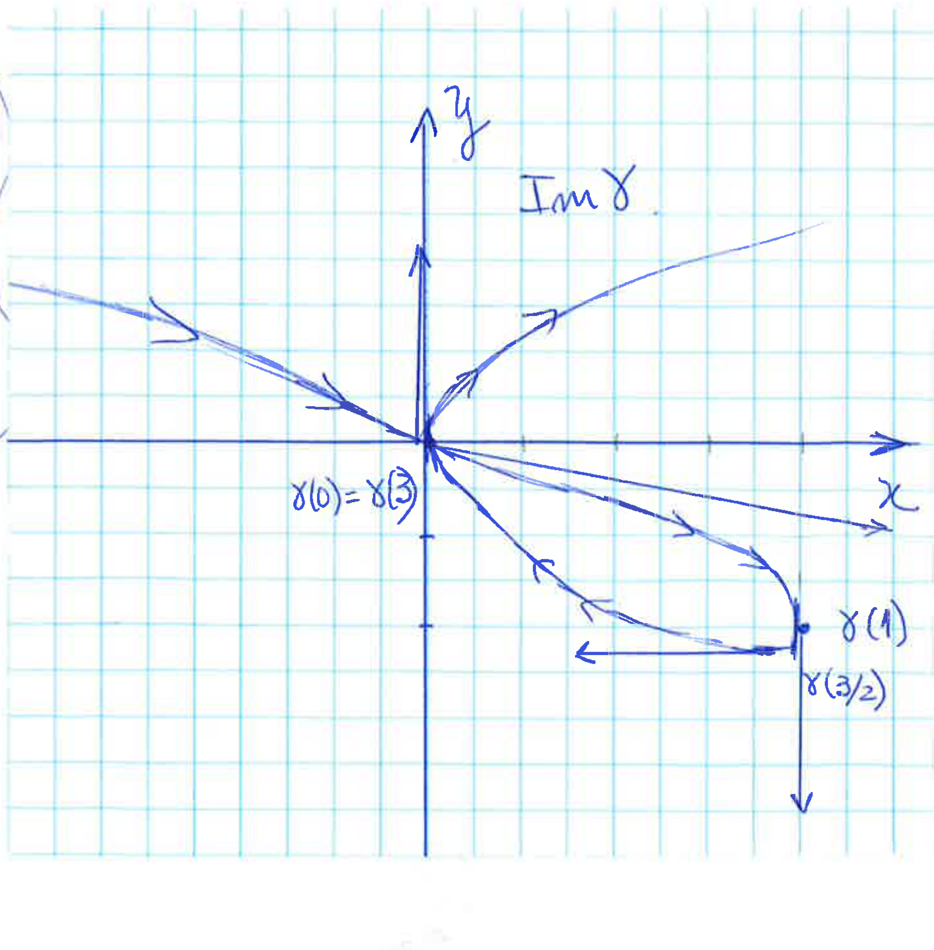
$\gamma(1) = (4,-2)$

$\gamma(3/2) = \left(\frac{27}{8}, \frac{-9}{4}\right)$

$\gamma'(1) = (0,-1)$

$\gamma'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-9}{4}, 0\right)$

marcados no plano



3. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

a) Se $\beta(t) = (\text{sen } t \ , \ \text{sen}^3 t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, então $Im\,\beta = Im\,\gamma$.

b) A curva dada em coordenadas polares por $r = \cos\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, é uma circunferência no $\mathbb{R}^2$.

c) O domínio da função f dada por $f(x,y) = \ln(x - 2y)$ é uma região não limitada do $\mathbb{R}^2$.

d) A curva $\gamma(t) = \left(3 + \dfrac{\text{sen } t}{2} \ , \ 2 + \dfrac{\cos t}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, parametriza uma circunferência.

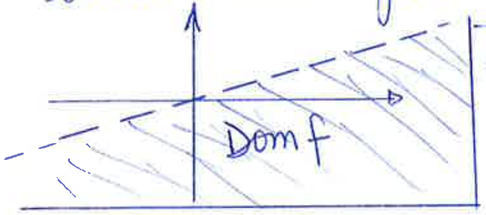
a) Falsa. De fato, por exemplo, $\gamma(2) = (2,8) \in Im\,\gamma$ mas $(2,8) \notin Im\,\beta$, pois $-1 \leq x_\beta(t) = \text{sen}\,t \leq 1$ e $1 \leq y(t) = \text{sen}^3 t \leq 1$.

b) Verdadeira. Note que de $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$ temos $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \frac{x}{r}$. Logo, a equação $r = \cos\theta$ equivale a: $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$

$x^2+y^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x-1/2)^2 + (y-0)^2 = (1/2)^2$: circunferência de centro $(1/2, 0)$ e raio $1/2$.

c) Verdadeira.
A função $\varphi(w) = \ln w$ está definida para $w > 0$.
Logo: $Dom\,f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y > 0\}$ não é limitada pois é um semiplano do $\mathbb{R}^2$.



d) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$x = 3 + \frac{\text{sen}\,t}{2} \Rightarrow \text{sen}\,t = 2(x-3)$

$y = 2 + \frac{\cos t}{3} \Rightarrow \cos t = 3(y-2)$.

d) Falsa!

$\therefore \boxed{(*)\, 4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 1}$ Não é equação de circunferência. Uma circunferência tem equação do tipo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ou seja: $\frac{1}{r^2}(x-a)^2 + \frac{1}{r^2}(y-b)^2 = 1$. Não é o caso em $(*)$.

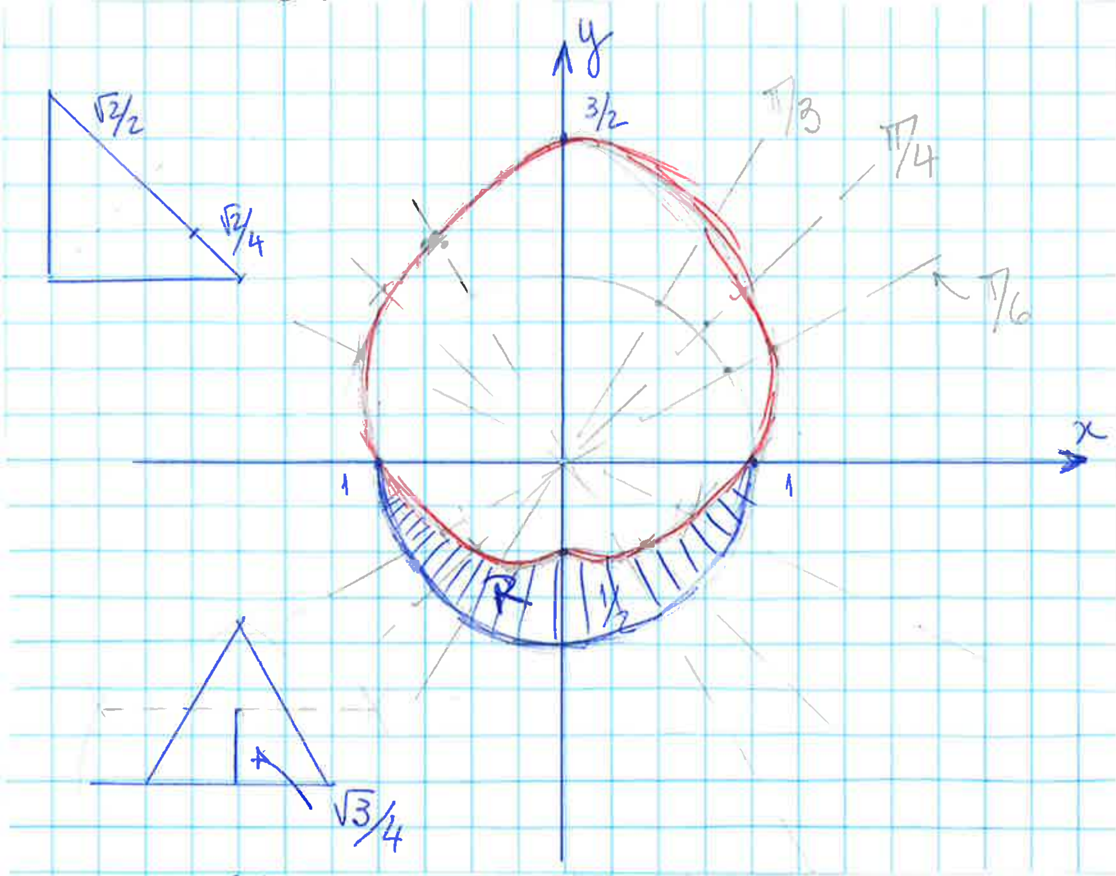
4. Seja $r = 1 + \frac{1}{2}$ sen θ curva dada em coordenadas polares.

a) Esboce a curva;

b) Esboce a região R interior à circunferência $r = 1$ e exterior à curva $r = 1 + \frac{1}{2}$ sen θ;

c) Determine o domínio de integração e calcule a área de R.

θ	r
0	1
$\pi/6$	$1 + 1/4$
$\pi/4$	$1 + \sqrt{2}/4$
$\pi/3$	$1 + \sqrt{3}/4$
$\pi/2$	$3/2$
$\pi - \pi/3$	$1 + \sqrt{3}/4$
$\pi - \pi/4$	$1 + \sqrt{2}/4$
$\pi - \pi/6$	$1 + 1/4$
π	1
$\pi + \pi/6$	$1 - 1/4$
$\pi + \pi/4$	$1 - \sqrt{2}/4$
$\pi + \pi/3$	$1 - \sqrt{3}/4$
$3\pi/2$	$1/2$
$2\pi - \pi/3$	$1 - \sqrt{3}/4$
$2\pi - \pi/4$	$1 - \sqrt{2}/4$
$2\pi - \pi/6$	$1 - 1/4$
2π	1



c) Domínio de integração: queremos $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tal que $1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta \leq r \leq 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \leq 0 \Rightarrow \pi \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} 1^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta\right)^2}_{1 + \text{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\text{sen}^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\left(1 - 1 - \text{sen}\,\theta - \frac{1}{4}\,\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta\Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{16}\theta\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{16}\,\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) - \frac{1}{16}(2\pi - \pi) + \frac{1}{32}(\text{sen}\,4\pi - \text{sen}\,2\pi)$$

$$\therefore \boxed{\text{Área}(R) = 1 - \frac{\pi}{16}}$$