MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 5 - 2018
Profa. Claudia Cueva Candido

1. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e seja $\gamma(t) = (t+1,\ -t^2),\quad t \in \mathbb{R}$, uma curva de nível de f. Sabendo que $f(-1,-4) = 2$ determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$, na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

2. Encontre os valores mínimo e máximo de $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ no disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Determine o retângulo de perímetro máximo, com lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.

4. Determine valor mínimo e valor máximo de f com as restrições dadas:
   a) $f(x,y) = xy,\ 9x^2 + y^2 = 4$
   b) $f(x,y,z) = x + 2y,\ x + y + z = 1 \quad \text{e} \quad y^2 + z^2 = 4$
   c) $f(x,y,z) = xyz,\ x^2 + y^2 + 3z^2 = 6$

5. Determine as dimensões da caixa sem tampa de maior volume que pode ser construída com $54cm^2$ de papelão.

6. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a,\ a \neq 0$, e que seja paralelo ao plano $x + y + z = 100$.

7. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ tangenciam-se no ponto $(1,1,2)$.

8. Mostre que todos os planos tangentes ao cone $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ passam pela origem.

9. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.
   a) $f(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
   b) $f(x,y) = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
   c) $f(x,y) = x^2y^2$
   d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y,\ x > 0$
   e) $f(x,y) = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
   f) $f(x,y) = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$
   g) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$
   h) $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

10. Determine o maior produto de três números cuja soma é 100. Exiba tais números.

11. Dentre os pontos do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ qual está mais próximo do ponto $(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$?

12. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função f em torno do ponto dado:

    a) $f(x, y) = e^{x+5y},\ P = (0, 0)$ b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$

13. Parametrize a curva C obtida como intersecção das superfícies de equação:

    a) $x^2 + y^2 = 4,\ x + y - z = 1$ b) $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 0$

    c) $z^2 = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ d) $z = xy,\ x^2 + y^2 = 1$

14. Verifique que a função $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

15. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

    a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

    b) Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ é solução da equação

    $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

16. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.