MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 4 - 2018
Profa. Claudia Cueva Candido

1. Determine os pontos de continuidade de f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad\quad, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

2. Seja $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$.

(a) Num mesmo sistema de coordenadas, esboce as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.

(b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? **Justifique.**

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

4. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^3-y}$ (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4\ \text{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\ \text{sen}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+\text{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\text{sen}(x^2+y^2)}$

(m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$ (n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

5. **Contínua e não diferenciável** - O gráfico da função contínua f, dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é uma folha de cone com vértice em $(0,0,0)$.

a) Mostre que não existem derivadas parciais de f no $(0,0)$ e conclua que f não é diferenciável em $(0,0)$.

b) Mostre que em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ f é de classe $\mathcal{C}^1$ e conclua que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

c) Mostre que se $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, então o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0))$ passa pela origem.

6. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Mostre que existem as derivadas parciais de f no $(0,0)$.

   b) Mostre que f não é contínua em $(0,0)$ e conclua que f não é diferenciável em $(0,0)$.

7. Sejam $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável com derivada contínua e $f(x,y) = x\ \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

   a) Mostre que f é diferenciável.

   b) Mostre que todos os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

8. Considere a curva C dada pela equação $x^2 + 4y^2 + \operatorname{sen}(x - 2y) = 8$. Determine a equação da reta tangete a C no ponto $(2,1)$.

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Para um certo $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que não pode ser a curva de nível de f que contém o ponto p:

   a) $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{t}, t\right)$ b) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$ c) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $\nabla f(-2,-2) = (h, -4)$ e seja $g(t) = f(2t^3 - 4t,\ t^4 - 3t)$. Determine h para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta de equação $y = 2x + 3$.

11. Determine a derivada direcional máxima de f em P e dê a direção e sentido em que ela ocorre.

    a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y,\ P = (1,0)$ b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ P = (1,2)$

    c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y}{z},\ P = (4,3,-1)$ d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z},\ P = (4,2,1)$

12. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t \cos t,\ t \operatorname{sen} t,\ \sqrt{t^2 + 4}),\ t \geq 0$. Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f. Faça um esboço.

13. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

14. **Quádricas** - Esboce o conjunto dos pontos (x,y,z) do $\mathbb{R}^3$ tais que vale:

    a) $z^2 = x^2 + y^2$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

    c) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ d) $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$

    e) $4x^2 - y^2 + z^2 = 0$ f) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$

    g) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$ h) $x^2 + (y-1)^2 = 1$