MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
Lista 3 - 2018
Profa. Claudia Cueva Candido

1. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

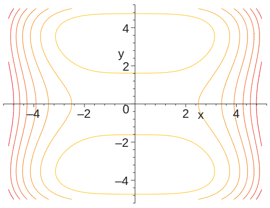
   (a) $f(x,y) = x + 2y - 3, \quad k = -2;$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}, \quad k = 5;$

   Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

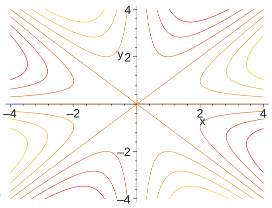
2. Esboce os gráficos de:

   (a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$
   (d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$
   (g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2 + 9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$
   (m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2 + y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2 + 4y^2}$
   (p) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ (r) $f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$

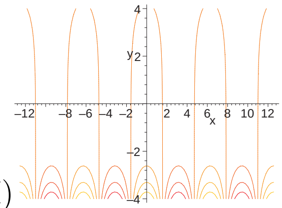
3. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



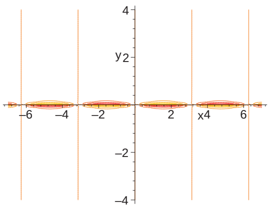
(I)



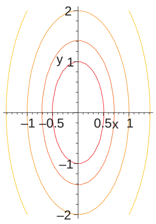
(II)



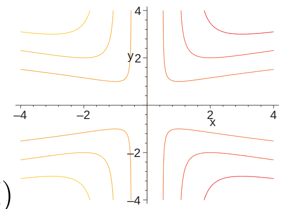
(III)



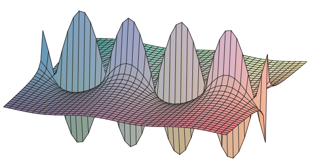
(IV)

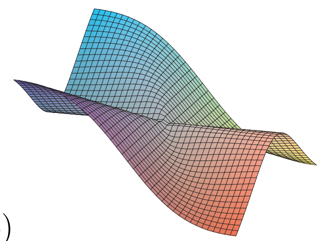


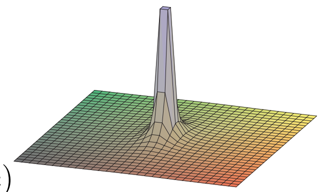
(V)

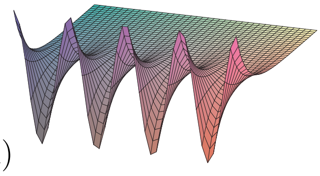


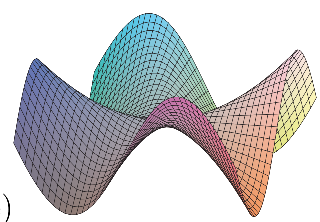
(VI)

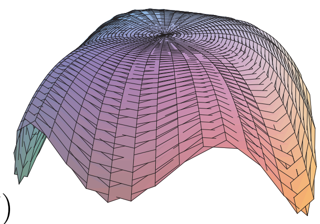

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

4. Seja $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t + 1, \mathrm{e}^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

   (a)Desenhe a imagem de γ, indicando o sentido de percurso.

   (b) A imagem de γ está contida numa curva de nível da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

5. Seja $f(x, y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

   (a) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

   (b) Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo I, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

   (c) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1, 0)$.

6. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:

   a) $f(x, y) = x^3y^2 + 2x - y$

   b) $f(x, y) = \mathrm{sen}(xy)$

   c) $f(x, y) = e^{x^3 - y^4}$

   d) $f(x, y) = x^2 \ln(x^2 + y^4 + xy)$

   e) $f(x, y) = \dfrac{xy^2 - x^2y}{x^2 + y^2}$

   f) $f(x, y) = xye^{xy}$

   g) $f(x, y) = \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x}$

   h) $f(x, y) = \ln(1 + \cos^2(xy^3))$

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = x^2y^2g(xy)$, em g é função derivável de uma variável, tal que $g(-2) = 2$ e $g'(-2) = 3$. Calcule $f(1, -2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2)$.

8. Dada a função $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$.

   Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

9. As funções dadas abaixo são diferenciáveis. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

   (a) $z = \mathrm{e}^{x^2 + y^2}$, no ponto $(0, 0, 1)$

   (b) $z = \ln(2x + y)$, no ponto $(-1, 3, 0)$

   (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3, -2, 5)$

   (d) $z = \mathrm{e}^x \ln y$, no ponto $(3, 1, 0)$

10. Determine o plano que passa por $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

11. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3y$.