MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I
1ª Lista de Exercícios - 2018
Profa. Claudia Cueva Candido

1. Considere o plano cartesiano, representação do $\mathbb{R}^2$. Dê a equação da curva e esboce-a:

   a) bissetriz dos quadrantes pares;

   b) circunferência de centro $(0,1)$ e raio 1;

   c) reta r paralela ao eixo $0y$ que contém o ponto $(2,2)$;

   d) reta s paralela ao eixo $0x$ que contém o ponto $(1,3)$;

   e) reta t simétrica à reta s em relação ao eixo $0x$;

   f) elipse com semi-eixo menor em $0x$ e semi-eixo maior em $0y$ que passa pelos pontos $(0,4)$, $(0,-4)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$.

2. Esboce o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ no plano cartesiano:

   a) $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$

   b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$

   c) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$

   d) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$

3. Esboce no plano cartesiano:

   a) a semi-reta $y = x$ com $x \geq 0$

   b) a semi-reta $y = x$ com $x \leq 0$

   c) o semi-eixo positovo $0y$

   d) a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$

   e) a circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$

   f) a região R contida no semiplano $x \geq 0$ interior ao disco de centro $(0,0)$ e raio 2 e exterior ao disco de centro $(1\ ,\ 0)$ e raio 1.

   g) a parte da coroa contida no 3º quadrante, entre os discos com centro na origem e raios 2 e 3.

4. esboce no plano cartesiano os conjuntos cujas expressões em coordenadas polares são dadas abaixo:

   a) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

   b) $r = 1$

   c) $r = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

   d) $r = \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

   e) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

   f) $r = 2, \quad \pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$

   g) $r = 1 + \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

   h) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

5. Calcule a área da região :

   a) limitada por um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$.

   b) limitada pela lemniscata de equação $r^2 = 4\cos 2\theta$.

   c) interior à cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

   d) limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

6. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

a) $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$
b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$
c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t), t \in \mathbb{R}$
d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\ \operatorname{sen} t), t \in [-\pi, \pi]$
e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$
f) $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t\ \operatorname{sen} t)\ ,\ t \ge 0$
g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R}$
i) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos^2 t + 2), t \in \mathbb{R}$
j) $\gamma(t) = (2 + \mathrm{e}^{-t}, 3 - \mathrm{e}^t), t \ge 0$

7. Esboce C e encontre uma parametrização para C, nos casos:

a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y \ge -x \text{ e } y \ge x\}$

b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x < 0 \text{ e } y > -10\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$

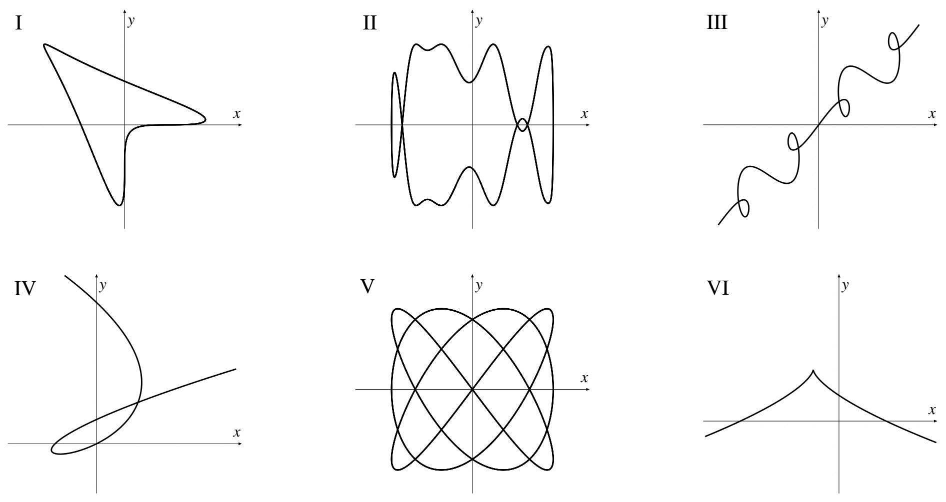
d) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d((x, y), r) = d((x, y), P)\}$, sendo $P = (0, 3)$ e r, a reta $y = 4$.

e) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d((x, y), P) + d((x, y), Q) = 10\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

f) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |d((x, y), P) - d((x, y), Q)| = 1,\ x > 0\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

8. Para cada curva (descrita por equações paramétricas) dos itens de (a) a (f), indique qual das figuras de I a VI representa a sua imagem. Justifique sua escolha.

a) $x = t^3 - 2t,\quad y = t^2 - t$
b) $x = t^3 - 1,\quad y = 2 - t^2$
c) $x = \operatorname{sen}(3t),\quad y = \operatorname{sen}(4t)$
d) $x = t + \operatorname{sen}(2t),\quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$
e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t),\quad y = \cos(t + \cos t)$
f) $x = \cos t,\quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



9. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \operatorname{sen} t \cos t),\ t \in \mathbb{R}$, tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Faça um esboço da curva.

10. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$.

a) Mostre que a função f não é derivável em $x = 0$.

b) Determine uma curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

c) Interprete geometricamente o fato de que f não é derivável em $x = 0$, mas a curva γ é derivável em t_0, onde $\gamma(t_0) = (0, 0)$.