Estruturas de Dados

Cristina Gomes Fernandes

Árvores AVL

Uma ABB é AVL se, para todo nó, a diferença da altura das subárvores esquerda e direita do nó é -1, 0 e 1.

Uma ABB AVL com n nós tem altura $O(\lg n)$.

Além das informações usuais de ABB, cada nó de uma árvore AVL tem um campo bal onde se guarda a diferença entre a altura das subárvores esquerda e direita do nó.

Inserção em árvores AVL

Suponha que inserimos um nó na subárvore esquerda de um nó p e esta subárvore teve sua altura aumentada por conta desta inserção. Temos três possibilidades:

- $bal(p) = 1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 0$ e a árvore de raiz p está balanceada, com a altura inalterada.

Inserção em árvores AVL

Suponha que inserimos um nó na subárvore esquerda de um nó p e esta subárvore teve sua altura aumentada por conta desta inserção. Temos três possibilidades:

- $bal(p) = 1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 0$ e a árvore de raiz p está balanceada, com a altura inalterada.

- $bal(p) = 0$:
  Passamos a ter $bal(p) = -1$ e a árvore de raiz p está balanceada, porém teve sua altura aumentada.

Inserção em árvores AVL

Suponha que inserimos um nó na subárvore esquerda de um nó p e esta subárvore teve sua altura aumentada por conta desta inserção. Temos três possibilidades:

- $bal(p) = 1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 0$ e a árvore de raiz p está balanceada, com a altura inalterada.

- $bal(p) = 0$:
  Passamos a ter $bal(p) = -1$ e a árvore de raiz p está balanceada, porém teve sua altura aumentada.

- $bal(p) = -1$:
  Passamos a ter $bal(p) = -2$, ou seja, o critério de balanceamento foi violado e precisamos rearranjar a árvore.

Inserção em árvores AVL

Caso 1: A inserção ocorreu na subárvore esquerda da subárvore esquerda de p. (Antes da inserção $bal(p) = -1$, depois da inserção $bal(q) = -1$.)

ROTACIONEDIR

Inserção em árvores AVL

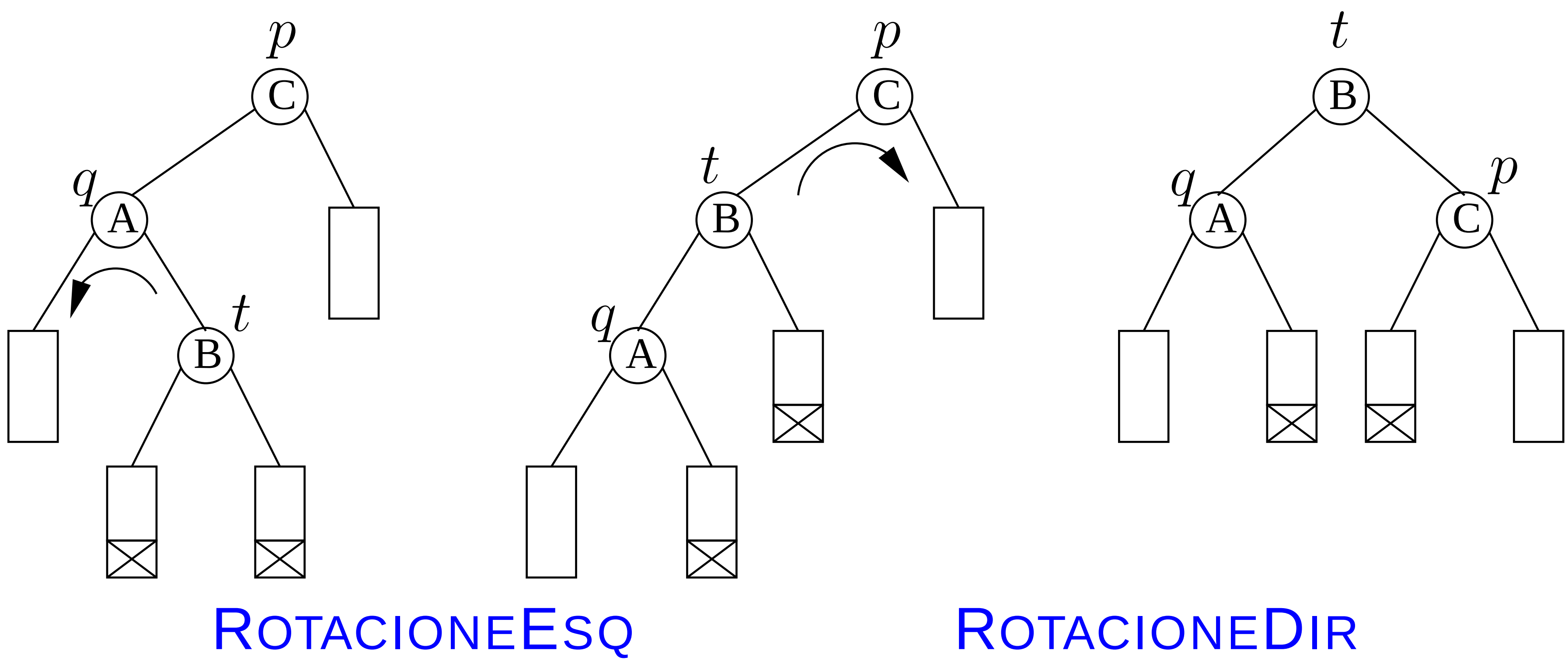
Caso 1: A inserção ocorreu na subárvore esquerda da subárvore esquerda de p. (Antes da inserção $bal(p) = -1$, depois da inserção $bal(q) = -1$.)

ROTACIONEDIR

A árvore resultante está balanceada e tem altura igual a altura antes da inserção. Ao final, $bal(p) = 0$ e $bal(q) = 0$.

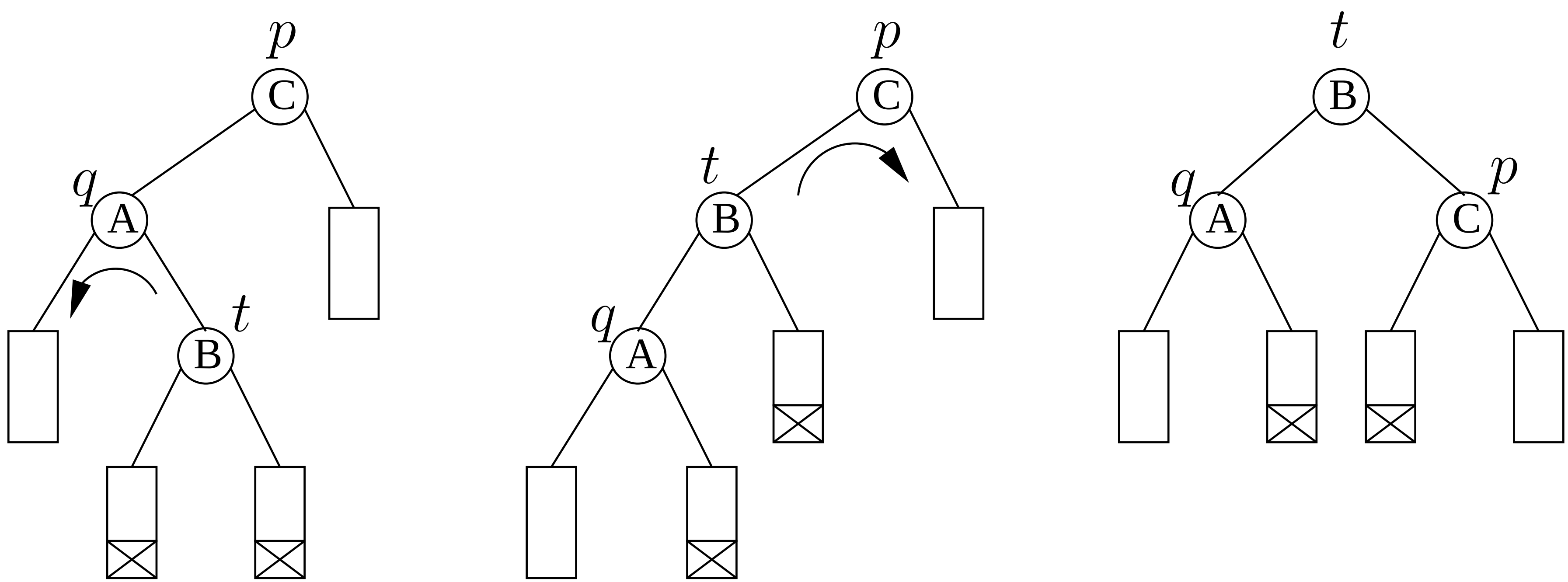
Inserção em árvores AVL

Caso 2: A inserção ocorreu na subárvore direita da subárvore esquerda de p. (Antes da inserção $bal(p) = -1$, depois da inserção $bal(q) = 1$.)



Inserção em árvores AVL

Caso 2: A inserção ocorreu na subárvore direita da subárvore esquerda de p. (Antes da inserção $bal(p) = -1$, depois da inserção $bal(q) = 1$.)



ROTACIONEESQ ROTACIONEDIR

Árvore balanceada e com altura igual, $bal(t) = 0$ e ($bal(q) = 0$ e $bal(p) = 1$), ou ($bal(q) = -1$ e $bal(p) = 0$).

Rotações

O nó p é tal que $dir(p) \neq$ NIL.

ROTACIONEESQ (p)

1 $q \leftarrow dir(p)$
2 $dir(p) \leftarrow esq(q)$
3 $esq(q) \leftarrow p$

Rotações

O nó p é tal que $dir(p) \neq \text{NIL}$.

ROTACIONEESQ (p)
1 $q \leftarrow dir(p)$
2 $dir(p) \leftarrow esq(q)$
3 $esq(q) \leftarrow p$

Esta implementação não mantem o campo pai, porém, para a implementação de AVL que apresentamos a seguir, precisamos do campo pai.

Rotações

O nó p é tal que $dir(p) \neq \text{NIL}$.

ROTACIONEESQ (p)
1 $q \leftarrow dir(p)$
2 $dir(p) \leftarrow esq(q)$
3 $esq(q) \leftarrow p$

Esta implementação não mantem o campo pai, porém, para a implementação de AVL que apresentamos a seguir, precisamos do campo pai.

Exercício: Escreva o ROTACIONEDIR.

Exercício: Ajuste estas rotinas para que mantenham o campo pai atualizado. Observe que um dos ajustes necessários envolve a raiz T da árvore.

Inserção em árvores AVL

INSIRAAVL (T, x)

$q \leftarrow$ INSIRA(T, x) ▷ insere x e devolve a célula nova
$bal(q) \leftarrow 0$
$cresceu \leftarrow$ VERDADE
$p \leftarrow pai(q)$
enquanto $cresceu$ **e** $p \neq$ NIL **faça**
    se $esq(p) = q$ ▷ a inserção foi na subárvore esquerda
        então se $bal(p) = 1$
            então $bal(p) \leftarrow 0$
                $cresceu \leftarrow$ FALSO
            senão se $bal(p) = 0$
                então $bal(p) \leftarrow -1$
                    $q \leftarrow p$
                    $p \leftarrow pai(p)$
                senão $\ldots$

Inserção em árvores AVL

INSIRAAVL (T, x)

senão se $bal(q) = -1$ ▷ Caso 1
    então ROTACIONEDIR(p)
        $bal(p) \leftarrow bal(q) \leftarrow 0$
    senão $t \leftarrow dir(q)$ ▷ Caso 2
        ROTACIONEESQ(q)
        ROTACIONEDIR(p)
        se $bal(t) = 1$
            então $bal(q) \leftarrow -1$
            senão $bal(q) \leftarrow 0$
        se $bal(t) = -1$
            então $bal(p) \leftarrow 1$
            senão $bal(p) \leftarrow 0$
        $bal(t) \leftarrow 0$
    $cresceu \leftarrow$ FALSO
senão ... ▷ a inserção foi na subárvore direita de p

Inserção em árvores AVL

Exercício: Complete a implementação anterior, escrevendo o caso simétrico, onde a inserção foi na subárvore direita de p.

Inserção em árvores AVL

Exercício: Complete a implementação anterior, escrevendo o caso simétrico, onde a inserção foi na subárvore direita de p.

O consumo de tempo do INSIRAAVL é $\mathrm{O}(h)$, onde $h = \mathrm{O}(n)$ e n é o número de nós na árvore de entrada.

Inserção em árvores AVL

Exercício: Complete a implementação anterior, escrevendo o caso simétrico, onde a inserção foi na subárvore direita de p.

O consumo de tempo do INSIRAAVL é $\mathrm{O}(h)$, onde $h = \mathrm{O}(n)$ e n é o número de nós na árvore de entrada.

Ademais, são feitas no máximo duas rotações por inserção.

Exercício: Qual é o número máximo de rotações que uma inserção em uma árvore rubro-negra pode fazer em função da altura h da árvore de entrada?

Inserção em árvores AVL

Exercício: Complete a implementação anterior, escrevendo o caso simétrico, onde a inserção foi na subárvore direita de p.

O consumo de tempo do INSIRAAVL é $\mathrm{O}(h)$, onde $h = \mathrm{O}(n)$ e n é o número de nós na árvore de entrada.

Ademais, são feitas no máximo duas rotações por inserção.

Exercício: Qual é o número máximo de rotações que uma inserção em uma árvore rubro-negra pode fazer em função da altura h da árvore de entrada?

Exercício: Simule a inserção em uma árvore AVL inicialmente vazia das seguintes chaves:

20, 17, 38, 40, 53, 10, 6, 16, 23, 14, 11, 50, 45, 47, 48, 49.

Remoção em árvores AVL

Suponha que removemos um nó na subárvore esquerda de um nó p e esta subárvore teve sua altura diminuída por conta desta remoção. Temos três possibilidades:

- $bal(p) = -1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 0$ e a árvore de raiz p está balanceada, mas com a altura menor.

Remoção em árvores AVL

Suponha que removemos um nó na subárvore esquerda de um nó p e esta subárvore teve sua altura diminuída por conta desta remoção. Temos três possibilidades:

- $bal(p) = -1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 0$ e a árvore de raiz p está balanceada, mas com a altura menor.

- $bal(p) = 0$:
  Passamos a ter $bal(p) = 1$ e a árvore de raiz p está balanceada, com sua altura inalterada.

Remoção em árvores AVL

Suponha que removemos um nó na subárvore esquerda de um nó p e esta subárvore teve sua altura diminuída por conta desta remoção. Temos três possibilidades:

- $bal(p) = -1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 0$ e a árvore de raiz p está balanceada, mas com a altura menor.

- $bal(p) = 0$:
  Passamos a ter $bal(p) = 1$ e a árvore de raiz p está balanceada, com sua altura inalterada.

- $bal(p) = 1$:
  Passamos a ter $bal(p) = 2$, ou seja, o critério de balanceamento foi violado e precisamos rearranjar a árvore.

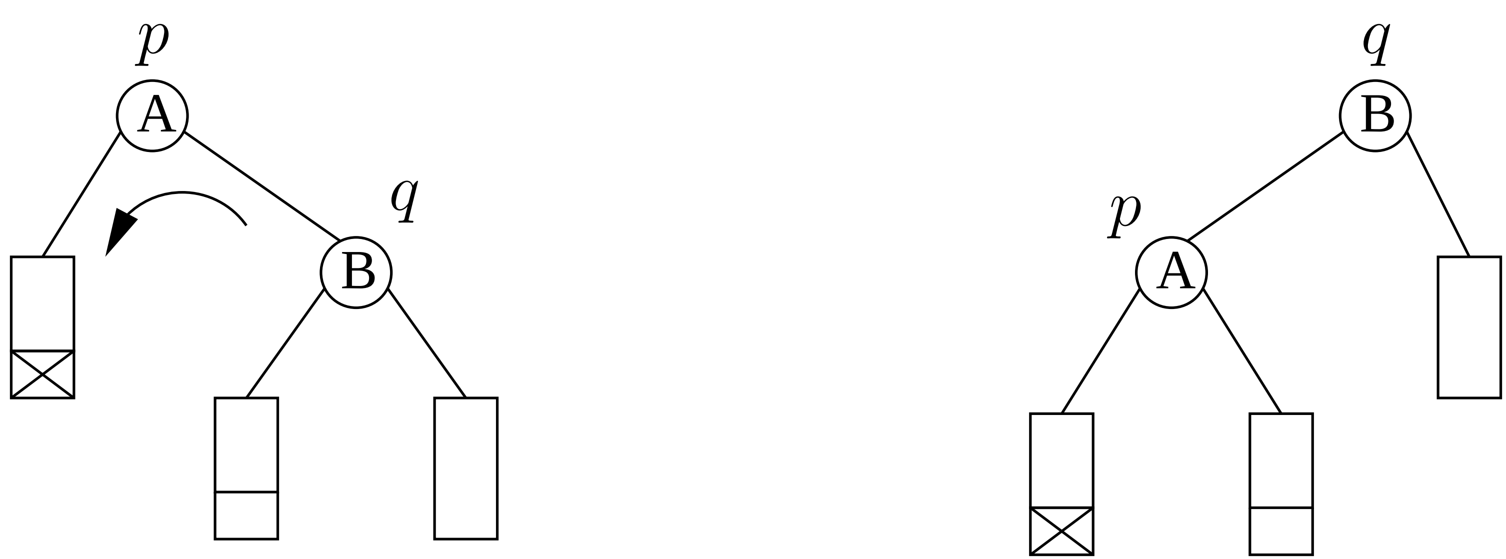
Remoção em árvores AVL

Caso 1: $bal(q) = 0$ ou 1, onde $q = dir(p)$.

ROTACIONEESQ

Remoção em árvores AVL

Caso 1: $bal(q) = 0$ ou 1, onde $q = dir(p)$.

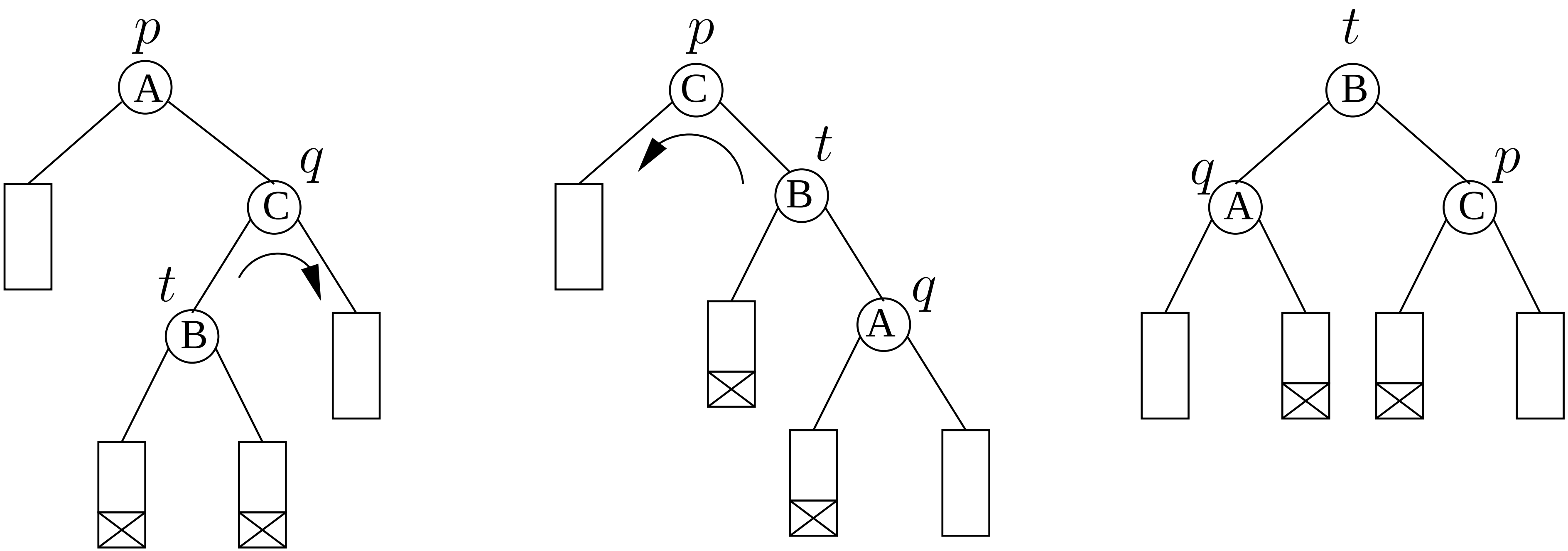


ROTACIONEESQ

A árvore resultante está balanceada e, se $bal(q) = 1$, a altura diminuiu e, ao final, $bal(p) = 0$ e $bal(q) = 0$. Caso contrário, a altura é igual a antes da remoção e, ao final, $bal(p) = 1$ e $bal(q) = -1$.

Remoção em árvores AVL

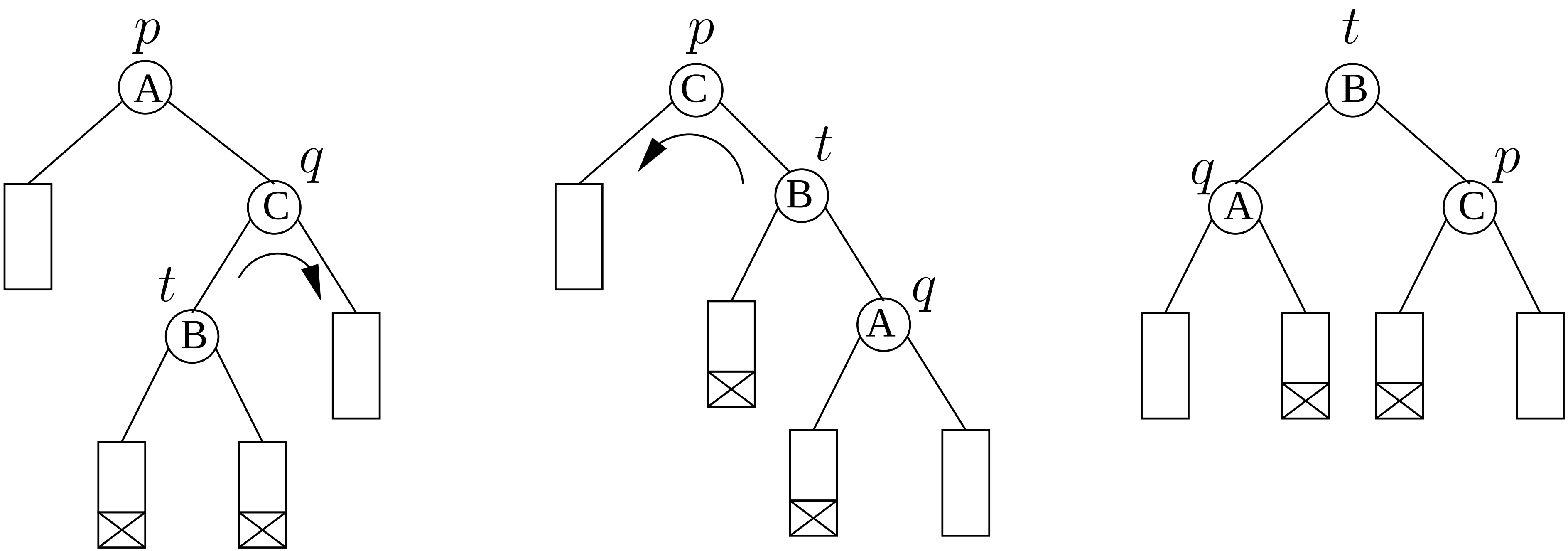
Caso 2: $bal(q) = -1$.



ROTACIONEDIR ROTACIONEESQ

Remoção em árvores AVL

Caso 2: $bal(q) = -1$.



ROTACIONEDIR ROTACIONEESQ

A árvore resultante está balanceada, a sua altura diminuiu, e se $bal(t) = 1$, ao final, $bal(p) = 0$ e $bal(q) = -1$, caso contrário, ao final, $bal(p) = 1$ e $bal(q) = 0$.

Remoção em árvores AVL

REMOVAAVL (T, x)

$(p, esquerda) \leftarrow$ REMOVA(T, x)
$\triangleright$ remove x e devolve o pai e se era filho esquerdo ou não
$diminuiu \leftarrow$ VERDADE
enquanto $diminuiu$ **e** $p \neq$ NIL **faça**
  se $esquerda$
    então $(p, diminuiu) \leftarrow$ AJUSTEESQ(p)
    senão $(p, diminuiu) \leftarrow$ AJUSTEDIR(p)
  se $pai(p) \neq$ NIL **e** $p = esq(pai(p))$
    então $esquerda \leftarrow$ VERDADE
    senão $esquerda \leftarrow$ FALSO
  $p \leftarrow pai(p)$

Segue a versão alterada da rotina REMOVA para ABBs.
As mudanças são nas linhas 11-13 e 15 de REMOVA.

Ajustes na remoção em ABBs

REMOVA (T, q)

se $esq(q) = \text{NIL}$ **ou** $dir(q) = \text{NIL}$
  então $p \leftarrow q$
  senão $p \leftarrow$ MÍNIMO$(dir(q))$ $info(q) \leftarrow info(p)$
se $esq(p) = \text{NIL}$
  então $f \leftarrow dir(p)$
  senão $f \leftarrow esq(p)$
se $f \neq \text{NIL}$ **então** $pai(f) \leftarrow pai(p)$
se $pai(p) = \text{NIL}$
  então $T \leftarrow f$
  senão se $p = esq(pai(p))$
    então $esq(pai(p)) \leftarrow f$ $esquerda \leftarrow$ VERDADE
    senão $dir(pai(p)) \leftarrow f$ $esquerda \leftarrow$ FALSO
$q \leftarrow pai(p)$
LIBERACÉLULA(p)
devolva $(q, esquerda)$

Remoção em árvores AVL

AJUSTEESQ (T, p)

se $bal(p) = -1$
    então $bal(p) \leftarrow 0$
        devolva $(p,$ VERDADE$)$
    senão se $bal(p) = 0$
        então $bal(p) \leftarrow 1$
            devolva $(p,$ FALSO$)$
        senão $\triangleright$ balanceie

Remoção em árvores AVL

AJUSTEESQ (T, p)

$\ldots$

senão $q \leftarrow dir(p)$

    se $bal(q) \geq 0$ $\triangleright$ rotação simples

        então ROTACIONEESQ(p)

            se $bal(q) = 0$

                então $bal(p) \leftarrow 1$

                    $bal(q) \leftarrow -1$

                    devolva $(q,$ FALSO$)$

                senão $bal(p) \leftarrow 0$

                    $bal(q) \leftarrow 0$

                    devolva $(q,$ VERDADE$)$

        senão $\triangleright$ rotação dupla

Remoção em árvores AVL

AJUSTEESQ (T, p)

```
        . . .
        senão ▷ rotação dupla
            t ← esq(q)
            ROTACIONEDIR(q)
            ROTACIONEESQ(p)
            se bal(t) = 1
               então bal(p) ← −1
               senão bal(p) ← 0
            se bal(t) = −1
               então bal(q) ← 1
               senão bal(q) ← 0
            bal(t) ← 0
            devolva (t, VERDADE)
```

Remoção em árvores AVL

Exercício: Escreva o AjusteDir.

Exercício: Na versão mostrada em aula do RemovaAVL, tínhamos as seguintes linhas para calcular o valor inicial da variável $esquerda$:

se $bal(p) = 1$ **ou** $esq(p) \neq \text{NIL}$
    então $esquerda \leftarrow$ FALSO
    senão $esquerda \leftarrow$ VERDADE

Encontre um exemplo que mostre que tal inicialização nem sempre funciona.

Remoção em ABB rubro-negra

Exercício: Simule a remoção do 6 e depois do 11 na árvore AVL do exercício anterior.

Exercício: Quanto tempo consome o REMOVAAVL em função da altura da árvore dada e em função do número de nós da árvore dada?

Exercício: Quantas rotações são feitas no máximo no REMOVAAVL?