Combinatória Poliédrica e Planos-de-Corte Faciais

Carlos E. Ferreira
Yoshiko Wakabayashi

Departamento de Ciência da Computação
IME – USP

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

Muitos problemas de otimização combinatória exerceram, e continuam exercendo ainda, um grande fascínio sobre os pesquisadores da área. A tentativa de se resolver alguns desses problemas motivou o surgimento de teorias interessantes, muitas das quais se desenvolveram independentemente das aplicações que a motivaram, e acabaram criando áreas relevantes de pesquisa. Um exemplo clássico é o problema do caixeiro viajante, que teve um papel importante na área de Combinatória Poliédrica.

Essa área tem como base de sustentação, a teoria de poliedros e a de programação linear. Em termos bem amplos, pode-se dizer que em Combinatória Poliédrica estuda-se propriedades de poliedros associados a problemas combinatórios. Tais estudos podem conduzir a relações min-max (fazendo uso de dualidade), ao desenvolvimento de algoritmos, ou revelar certas propriedades ou estruturas do problema em foco. Não raro, algumas dessas estruturas se fazem presentes em vários problemas, conduzindo a especulações e conseqüente desenvolvimento da teoria a respeito desses objetos.

Neste texto discutimos que tipos de problemas de otimização combinatória podem ser estudados através de métodos poliédricos. Mostramos como associar um poliedro a um problema, como obter uma descrição (completa ou parcial) de um tal poliedro, e como desenvolver um algoritmo baseado nessa descrição.

Neste ponto, cabe mencionar que há alguns fatos que nos desencorajam e outros que nos motivam a utilizar essa estratégia. Por um lado, sabemos que, para a classe de problemas de otimização $\mathcal{NP}$-difíceis, obter uma boa descrição do respectivo poliedro, não é uma tarefa fácil (se fosse, teríamos $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$). Por outro lado, uma boa razão para se usar essa estratégia no tratamento desses problemas, é o fato de que essa é uma das poucas estratégias que tem-se mostrado eficaz na resolução de instâncias reais de grande porte. Resultados recentes para o problema do caixeiro viajante, em que instâncias de mais de três mil cidades foram resolvidas aplicando métodos poliédricos, mostram a força dessa estratégia. Uma outra vantagem de se usar tais métodos, é o fato de que podemos derivar soluções aproximadas para os problemas, com garantia de qualidade.

Neste texto, focalizamos os resultados teóricos que consideramos mais relevantes para aqueles que trabalham — ou pretendem trabalhar — na área de otimização combinatória e têm interesse no desenvolvimento de algoritmos que fazem uso de técnicas de combinatória poliédrica. Assim, apresentamos primeiramente alguns resultados da teoria de poliedros, essenciais para este estudo. Como pré-requisitos, supomos apenas alguma familiaridade com programação linear (inteira), e alguns conceitos básicos da teoria de grafos. No decorrer do texto, referimos a conceitos de complexidade computacional, mas não os julgamos essenciais para a compreensão dos métodos que serão descritos.

O nosso objetivo é prover o material necessário para uma introdução a essa área, fornecendo a fundamentação teórica e ilustrando, através da descrição de alguns poliedros, o uso de certas técnicas de prova que são importantes neste contexto. Mostramos como os resultados a respeito da descrição facial de um poliedro podem ser usados para o desenvolvimento de um algoritmo *branch and cut*, que é uma combinação do método *branch and bound* com métodos de planos-de-corte faciais.

Dividimos este texto em 5 capítulos. No *Capítulo 1* apresentamos alguns conceitos básicos da teoria de grafos e de álgebra linear, com a finalidade de fixar a terminologia e a notação adotada.

O *Capítulo 2* é dedicado à teoria de poliedros. Diversos resultados importantes são apresentados, como projeção de poliedros, lemas alternativos sobre existência de solução de sistemas lineares, polaridade cônica, formas de descrição de poliedros e caracterização de facetas,

No *Capítulo 3* apresentamos a teoria sobre métodos de planos-de-corte, mostrando alguns resultados clássicos sobre fecho inteiro de poliedros, matrizes unimodulares, sistemas TDI, cortes de Gomory e posto de Chvátal. Mencionamos, sem provar, o resultado fundamental devido a Grötschel, Lovász e Schrijver, mostrando a equivalência entre problemas de otimização e de separação.

Exemplos de poliedros associados a problemas clássicos de otimização combinatória são apresentados no *Capítulo 4*. Incluímos alguns poliedros "bem caracterizados" (poliedro dos emparelhamentos de um grafo, poliedro de um de um matróide), assim como descrições parciais de poliedros de problemas $\mathcal{NP}$-difíceis (problema do caixeiro viajante, problema de Steiner em grafos).

No *Capítulo 5* discutimos em detalhe a implementação de um algoritmo *branch and cut*. Essa discussão é feita em torno do problema de Steiner em grafos, porém, incluindo considerações gerais válidas para outros problemas também. São discutidos tópicos como separação, heurísticas primais, manutenção do problema de programação linear, *etc.*

A realização da *X Escola de Computação* motivou-nos, ou melhor, apressou-nos a escrever este texto. Na verdade, a idéia de produzir um texto desta natureza era algo que vínhamos acalentando há algum tempo. Assim, este texto surgiu de versões preliminares — espalhadas em dezenas de folhas avulsas e anotações mentais de ambos os autores — do material que tem sido utilizado em disciplinas e palestras no Departamento de Computação do IME-USP nos últimos anos. Ainda assim, mudanças de percurso ocorreram, em relação ao que incluir, excluir, enfatizar e referenciar. Agora, tendo finalmente que tornar público este trabalho, sentimos que expomos um texto peliminar, ainda longe daquilo que idealizamos. Neste sentido, gostaríamos de contar com sugestões da parte dos leitores, para incorporá-las numa versão futura deste texto. O leitor interessado pode acessar por `ftp`[1] o arquivo de referências e o código de uma implementação do algoritmo discutido no Capítulo 5.

A principal motivação para escrever este texto é que ele seja usado em cursos de pós-graduação, no ensino de uma disciplina sobre Combinatória Poliédrica. Neste sentido, este texto cobre mais tópicos do que o estritamente necessário para a apresentação do método de planos-de-corte faciais. Além disso, os dois primeiros capítulos podem ser usados como uma introdução "poliédrica" a programação linear e dualidade. Quanto ao capítulo sobre implementação, o objetivo é que ele sirva de base para um projeto a ser desenvolvido pelos alunos da disciplina. Este texto, devidamente condensado, pode também ser usado por alunos de final da graduação em Ciência da Computação ou Matemática Aplicada.

Antes de finalizar, gostaríamos de expressar o nosso *Dankeschön* muito especial ao Professor Martin Grötschel, que guiou os nossos primeiros passos na área de Combinatória Poliédrica e muito contribuiu para a nossa formação. Gostaríamos também de agradecer muitíssimo aos nossos alunos de doutorado Flávio Keidi Miyazawa e Orlando Lee, que participaram pacientemente da revisão de versões preliminares deste texto, contribuindo com sugestões e apontando erros. Certamente eles não podem ser responsabilizados pelos erros que eventualmente ainda restaram nesta versão final. Estendemos os nossos agradecimentos ao Marko Loparić, pelas observações feitas durante as aulas, que foram incorporadas a este texto. Agradecemos também aos docentes do nosso departamento, em especial ao Arnaldo Mandel, José Augusto R. Soares, José Coelho de Pina Jr., Maria Angela Gurgel, Nami Kobayashi e Yoshiharu Kohayakawa, pelo apoio moral e TEXnico.

Durante a elaboração deste texto contamos com apoio do CNPq (projetos de pesquisa ProComb/ProTeM-CC-II, proc. no. 680065/94-6; e bolsas de pesquisa, proc. nos. 300752/94-6 e 304527/89-0) e da CAPES/DAAD (projeto ProBral, proc. no. 001/94). Expressamos aqui os nossos agradecimentos a essas agências e também à coordenação da *X Escola de Computação* pela oportunidade de divulgar este texto.

São Paulo, maio de 1996

Carlos E. Ferreira

Yoshiko Wakabayashi

[1]Para maiores informações, escreva para `[yw, cef]@ime.usp.br`