

Geometria Computacional

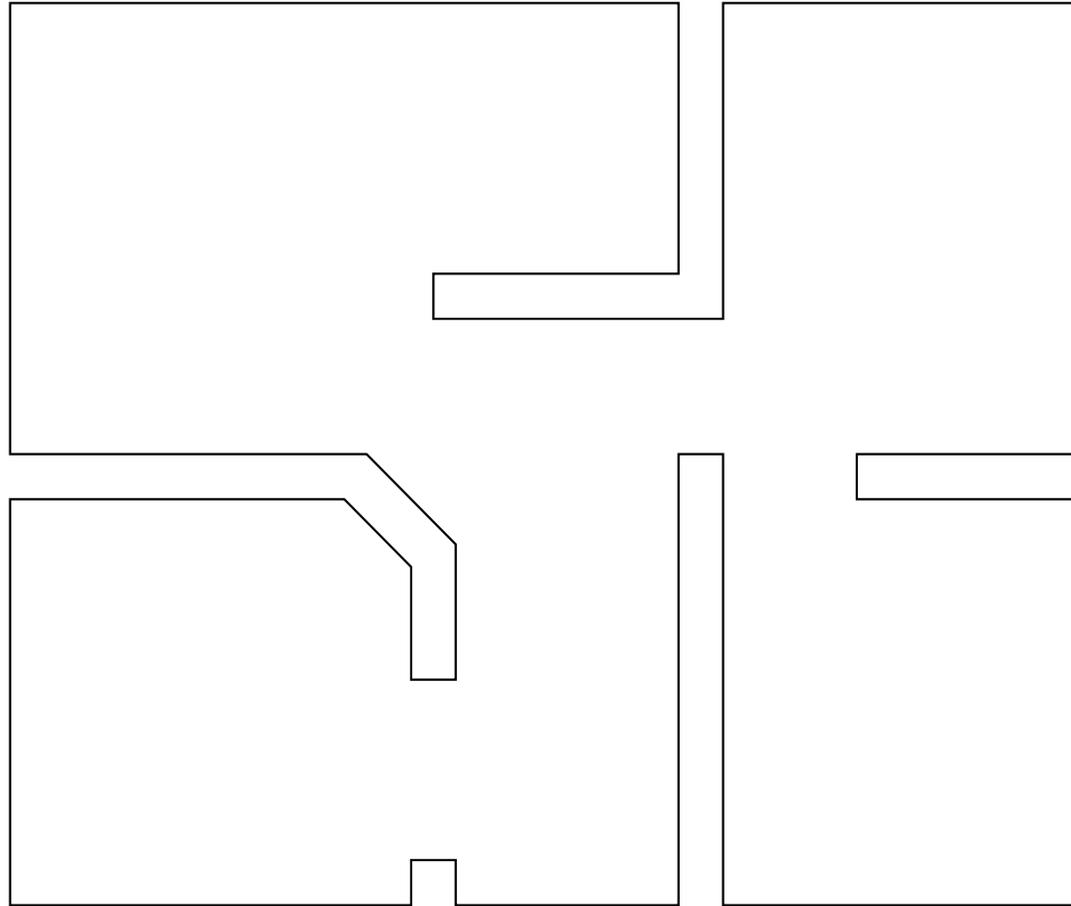
Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

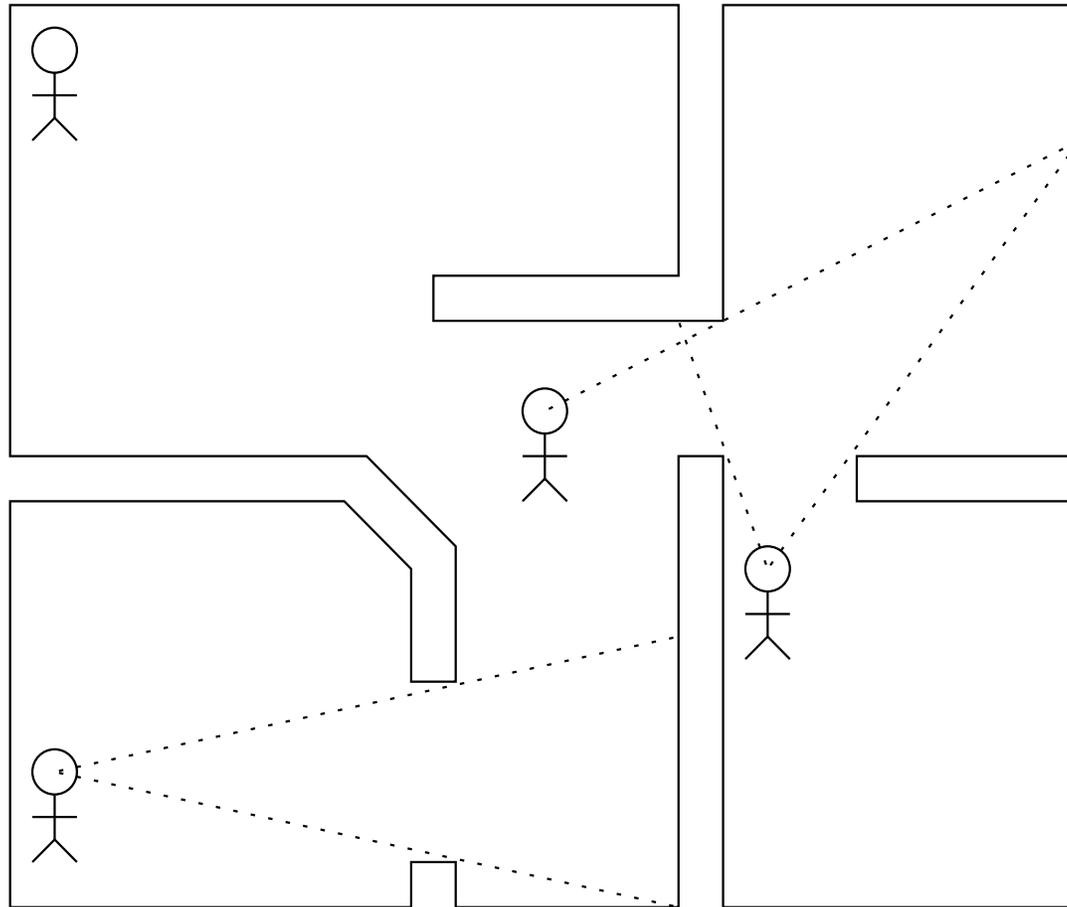
segundo semestre de 2014

Teorema da Galeria de Arte



Quantos guardas são necessários?

Teorema da Galeria de Arte



Quantos guardas são necessários? **Quatro?**

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Primeira prova: Chvátal

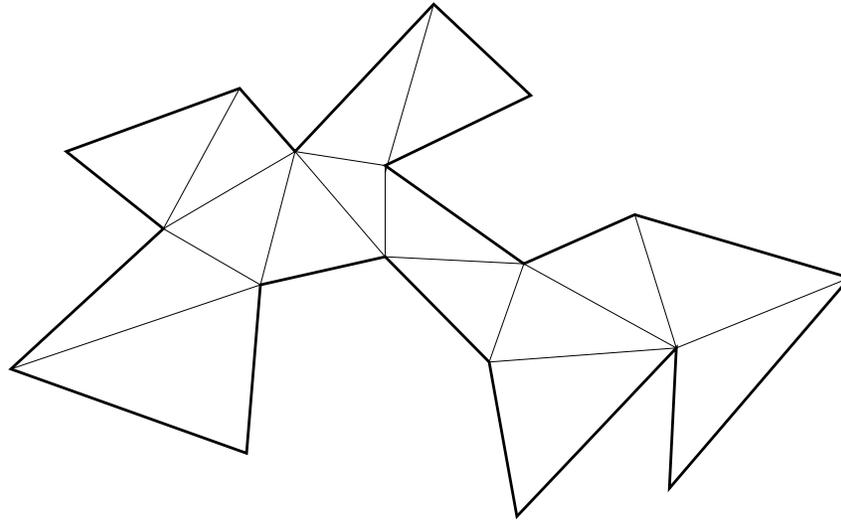
Prova que veremos: Fisk

Ingredientes:

triangulação de polígonos e coloração de grafos

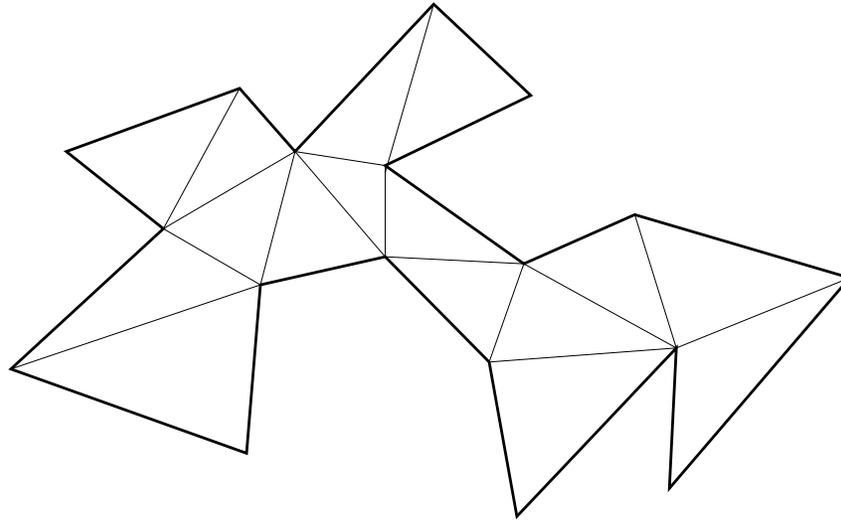
Triangulação de polígonos

Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

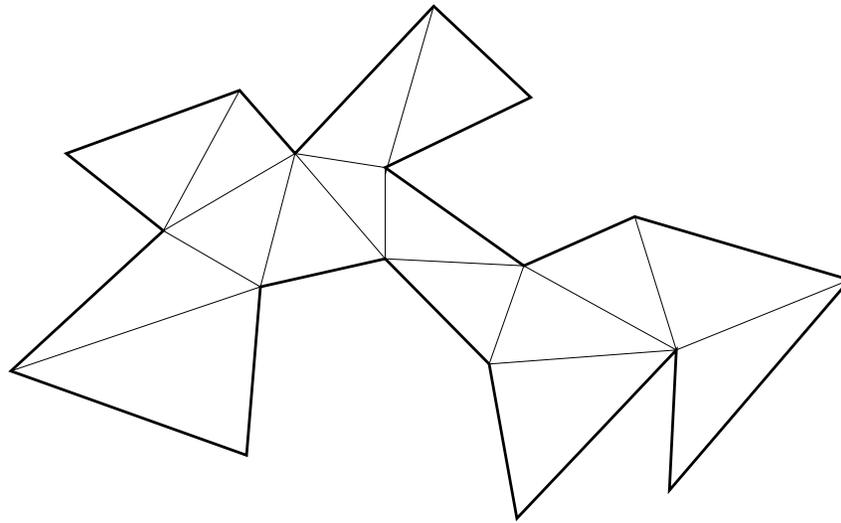
Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P .

Triangulação de polígonos

Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P .

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma **k -coloração** (ou é **k -colorível**) se existe uma função $c : V \leftarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E .

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k -coloração (ou é k -colorível) se existe uma função $c : V \leftarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E .

P : polígono

T : triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
 $uv \in E$ sse uv está em T

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k -coloração (ou é k -colorível) se existe uma função $c : V \leftarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E .

P : polígono

T : triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e $uv \in E$ sse uv está em T

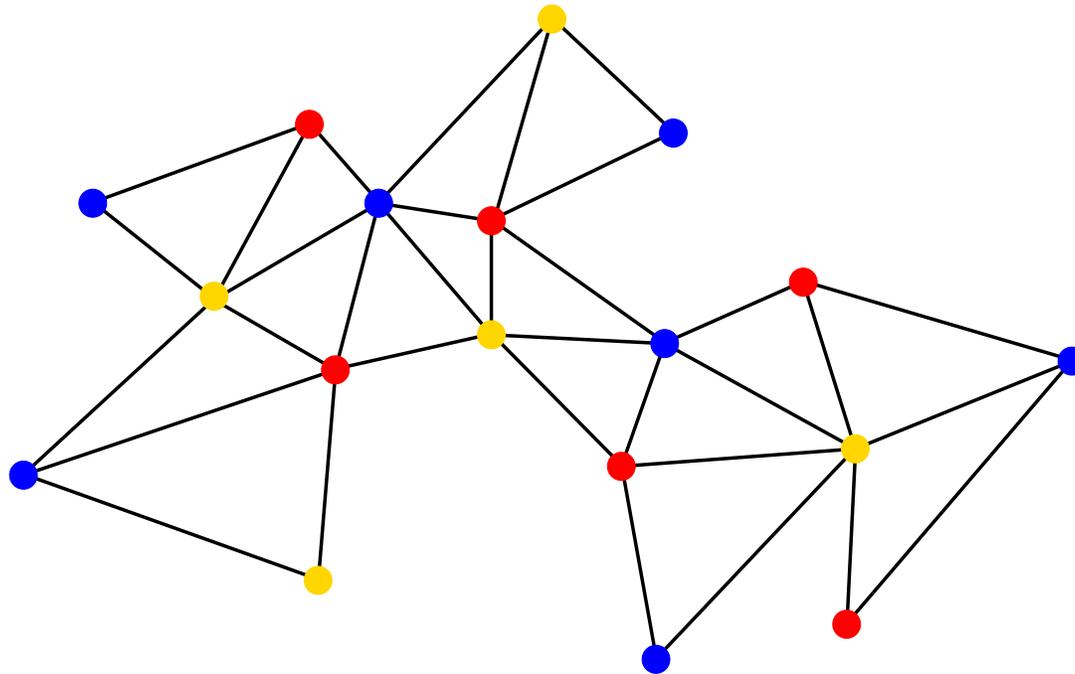
G_T é um grafo **outerplanar**

(planar com todos os vértices na face externa)

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração de grafos

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.



Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, **existe uma triangulação T de P .**

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.

Pelo teorema 1, **existe uma triangulação T de P .**

Pelo teorema 2, o grafo G_T **tem uma 3-coloração.**

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.

Pelo teorema 1, **existe uma triangulação T de P .**

Pelo teorema 2, o grafo G_T **tem uma 3-coloração.**

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto. Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P .

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.

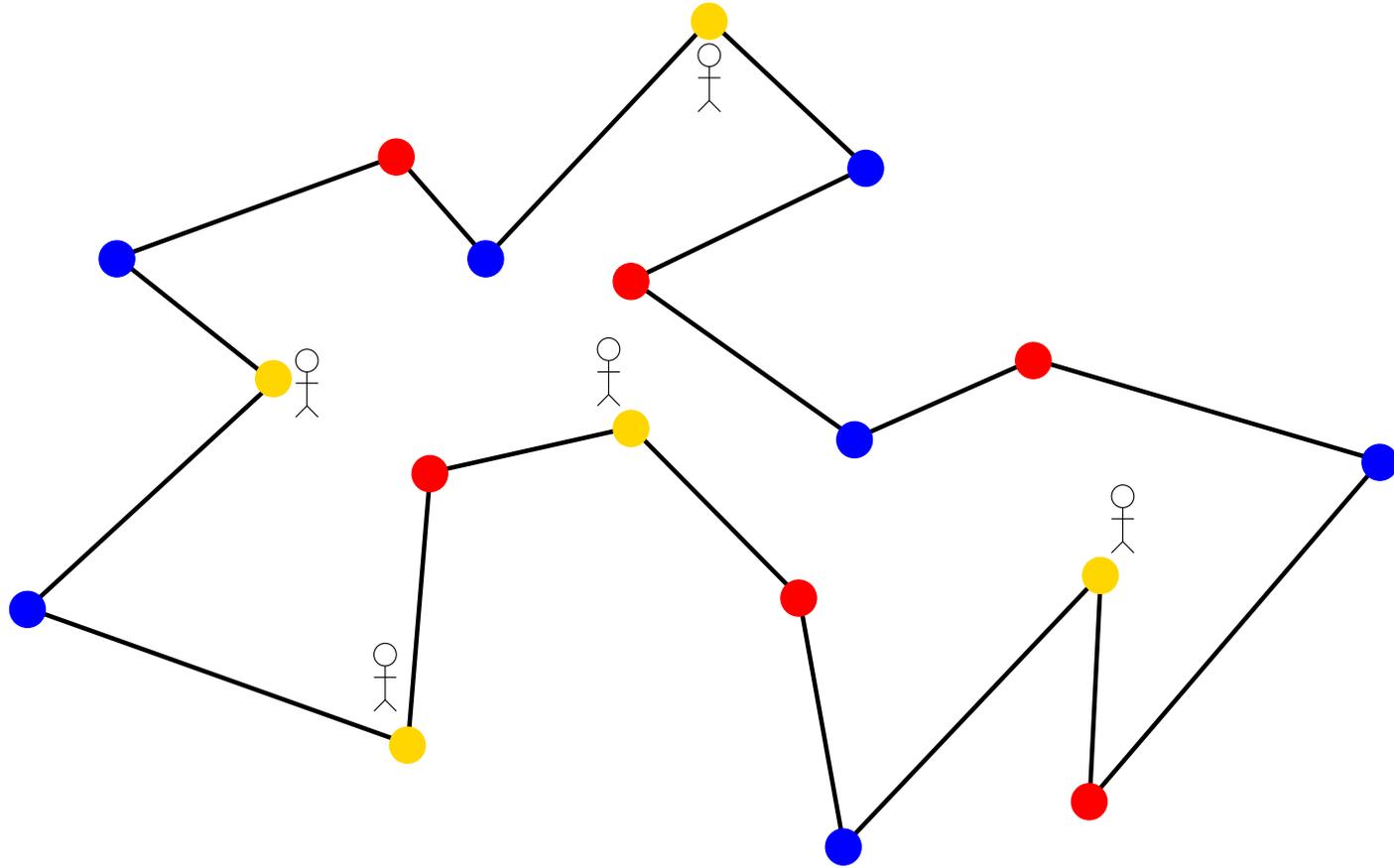
Pelo teorema 1, **existe uma triangulação T de P .**

Pelo teorema 2, o grafo G_T **tem uma 3-coloração.**

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto. Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P .

Uma das cores é usada no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes na coloração. ■

Exemplo



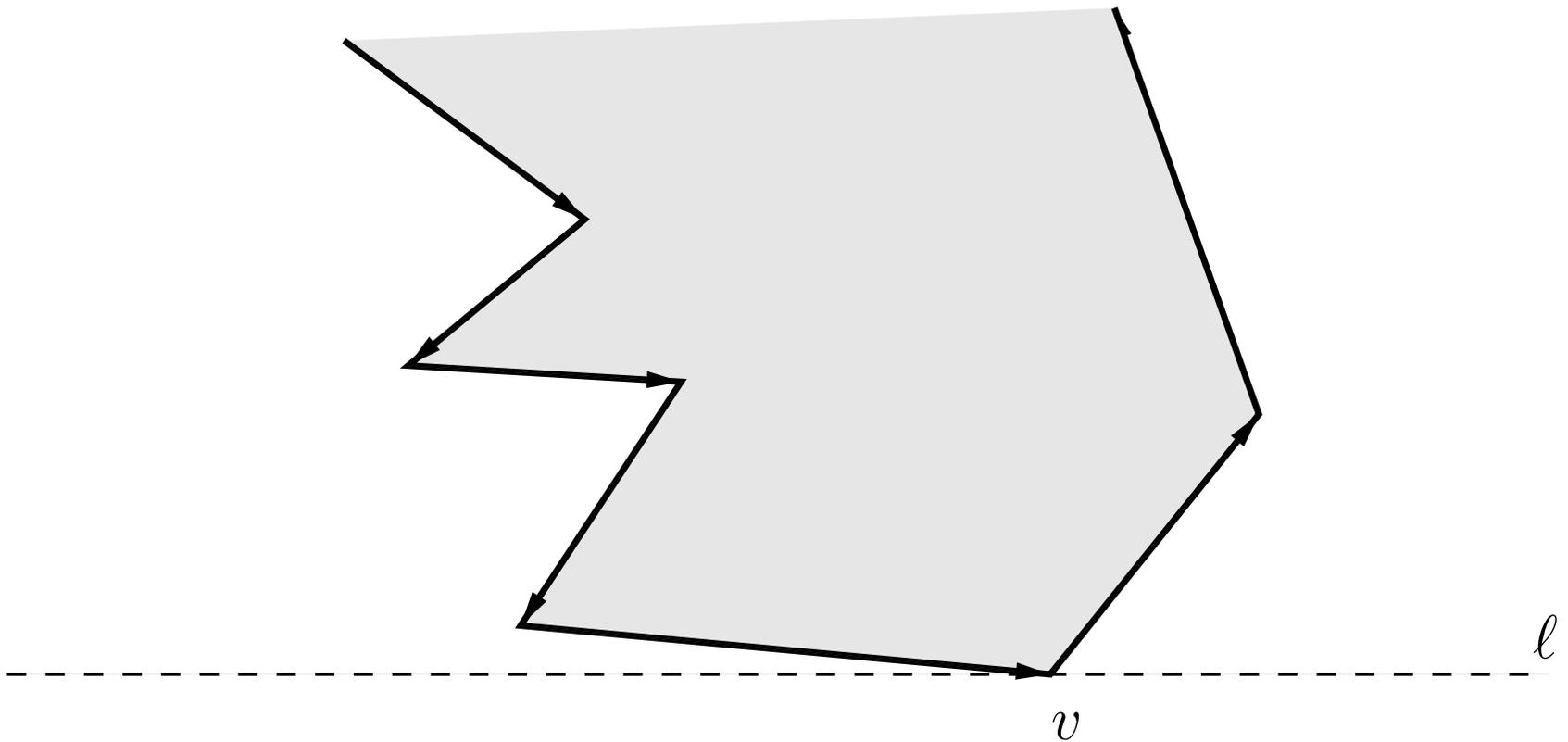
Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Prova: (Feita na aula.)



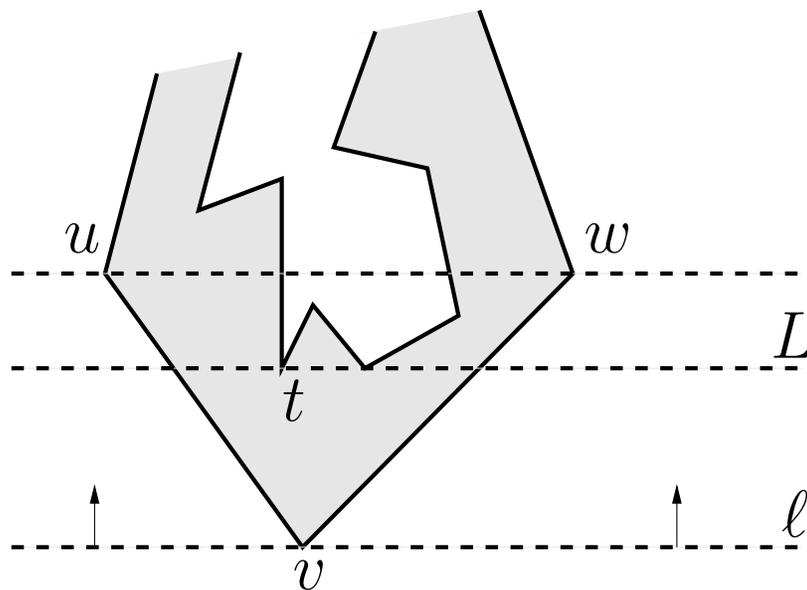
Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Prova: (Feita na aula.)



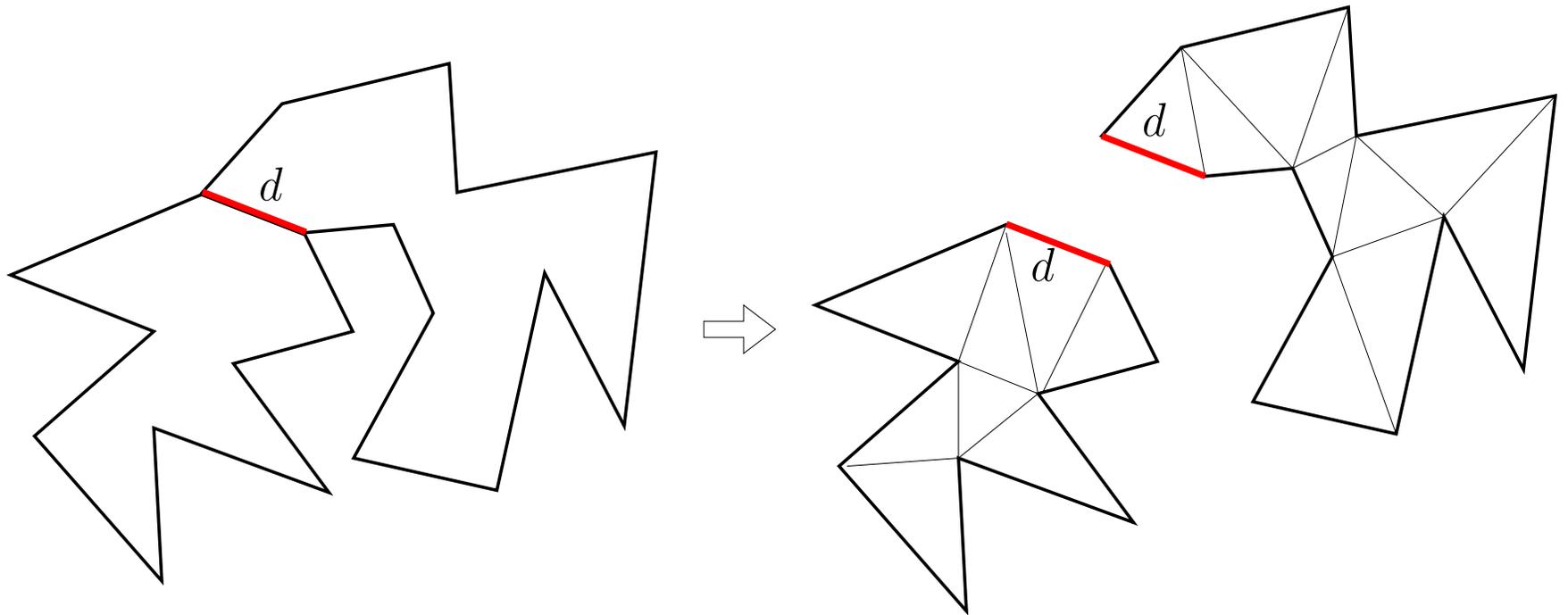
Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Prova: (Feita na aula.)



Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\pi$.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\pi$.

Prova: Conseqüência direta do Teorema da Triangulação.

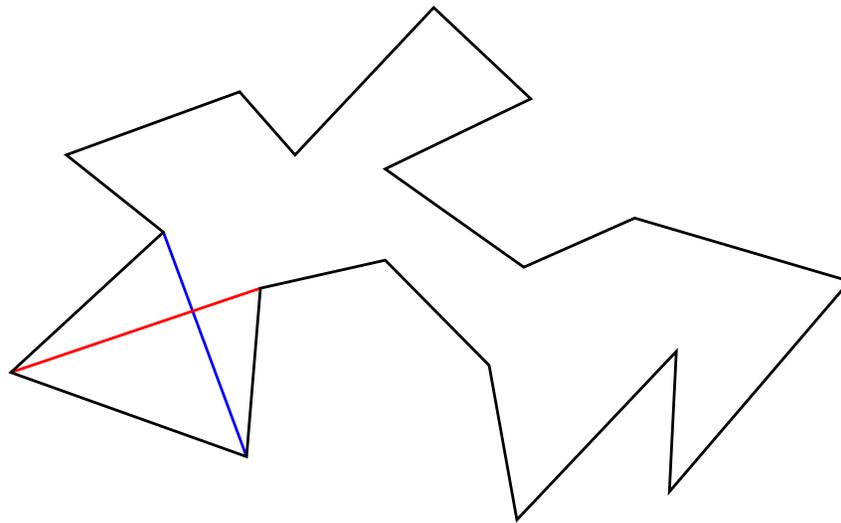
Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma **orelha** de P se uw é uma diagonal de P .

Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma **orelha** de P se uw é uma diagonal de P .

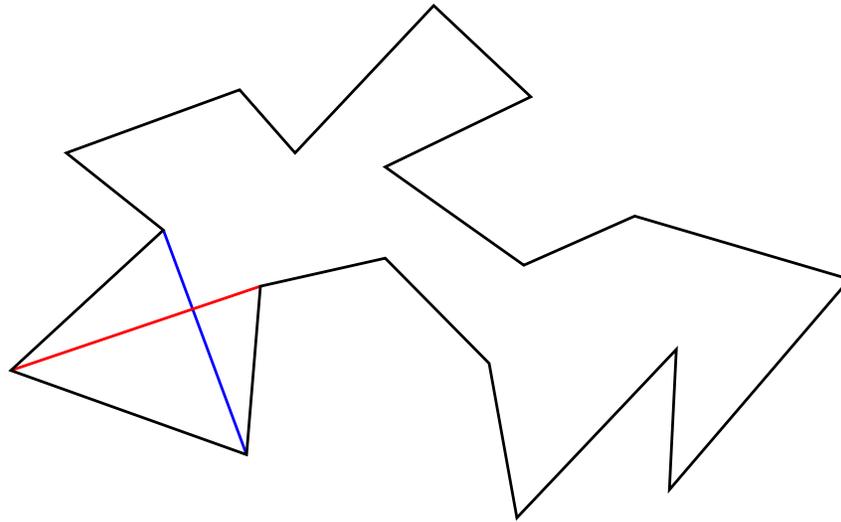
Duas orelhas **não se sobrepõem** se seus interiores são disjuntos.



Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma **orelha** de P se uw é uma diagonal de P .

Duas orelhas **não se sobrepõem** se seus interiores são disjuntos.



Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

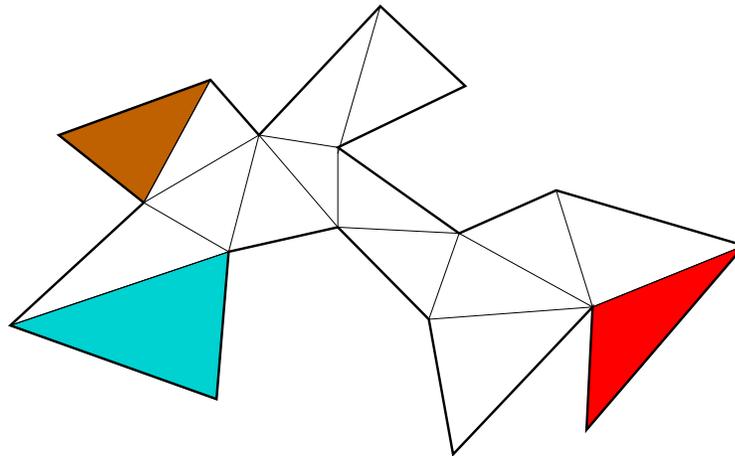
Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

Teorema 3: Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P . Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P .

Prova: (Feita na aula.)



Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.

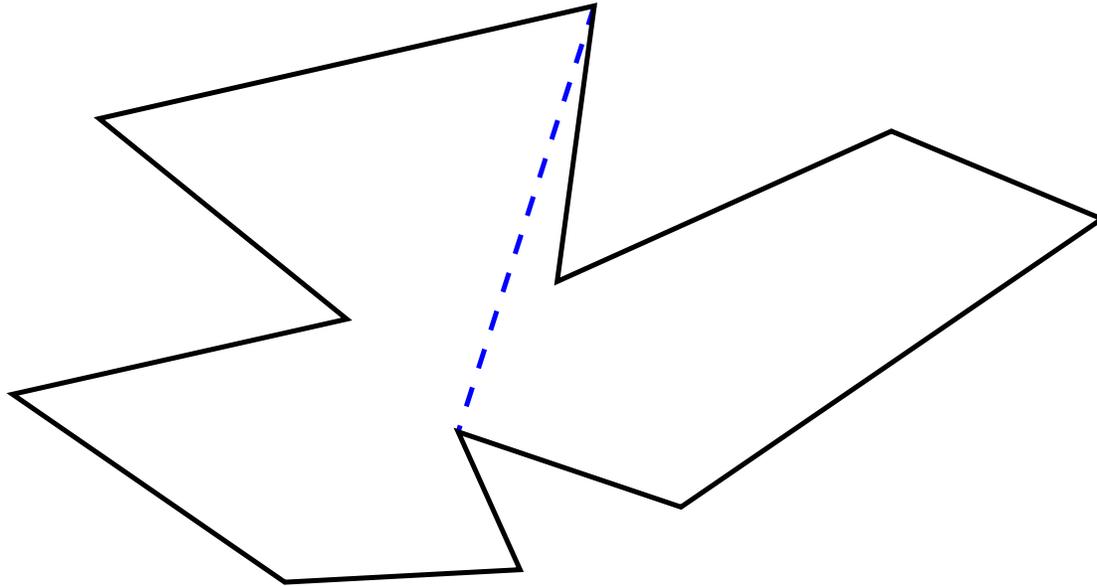
Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.

Prova: (Feita na aula.)

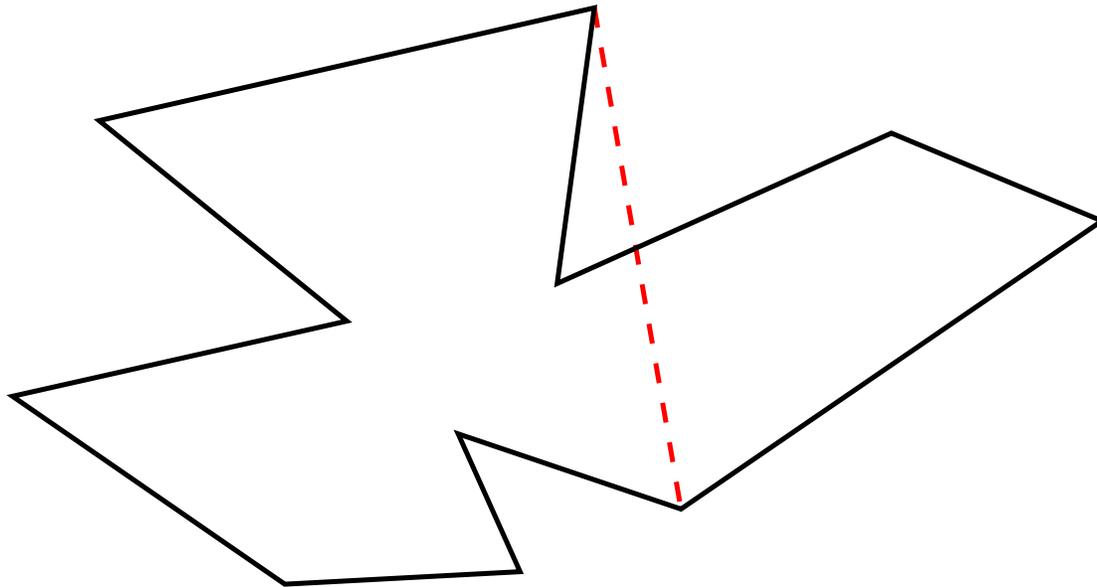
Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?



Teste de diagonal

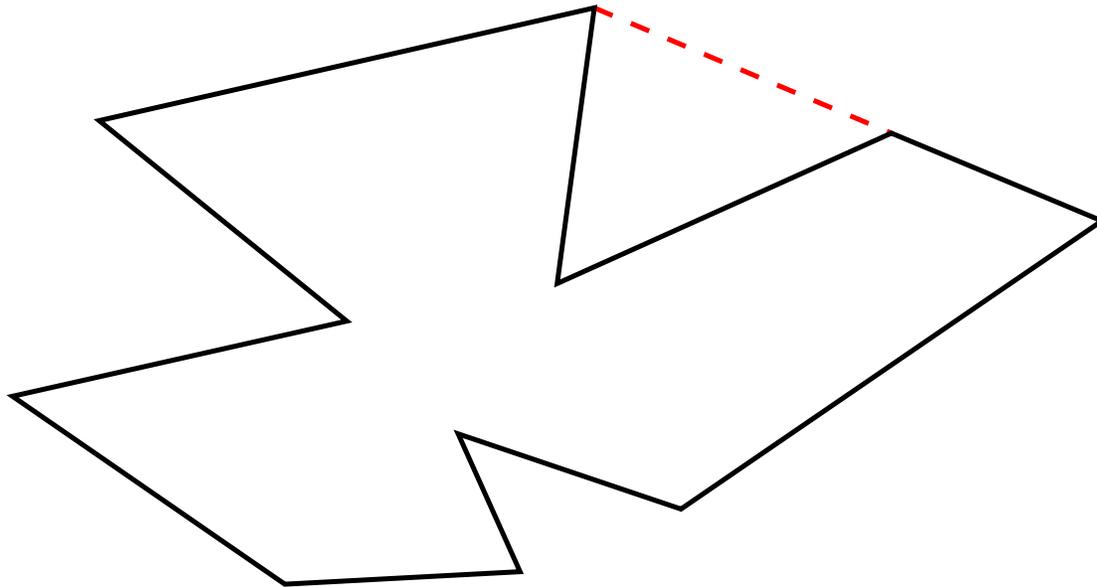
Como encontrar uma diagonal?



Interseção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?

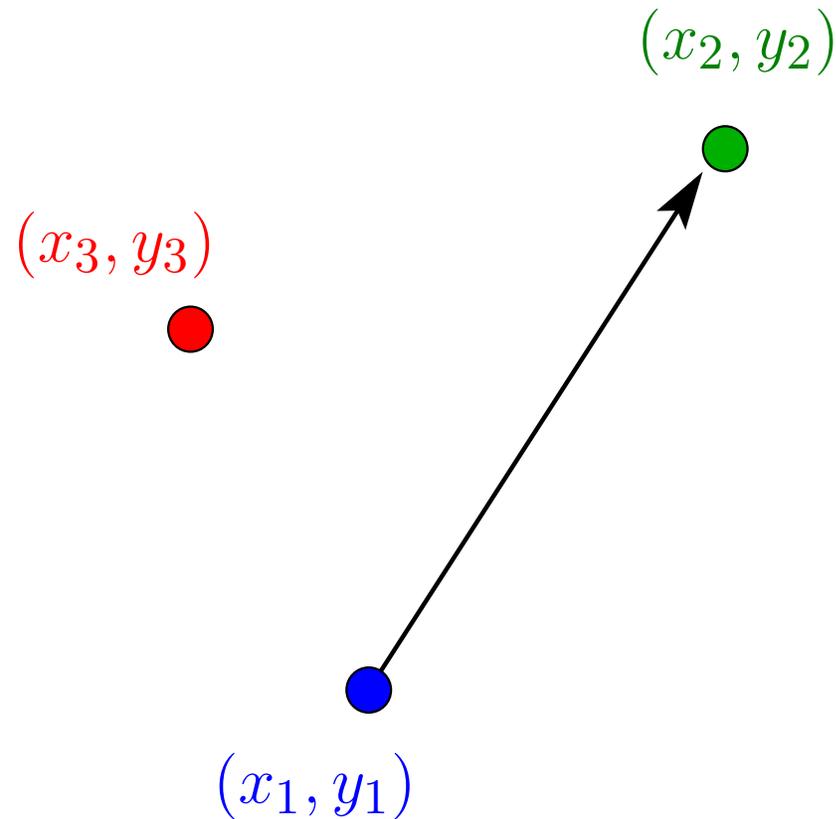


Interseção de segmentos: como decidir se
como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Pertinência: como decidir se
um segmento está dentro ou não do polígono?

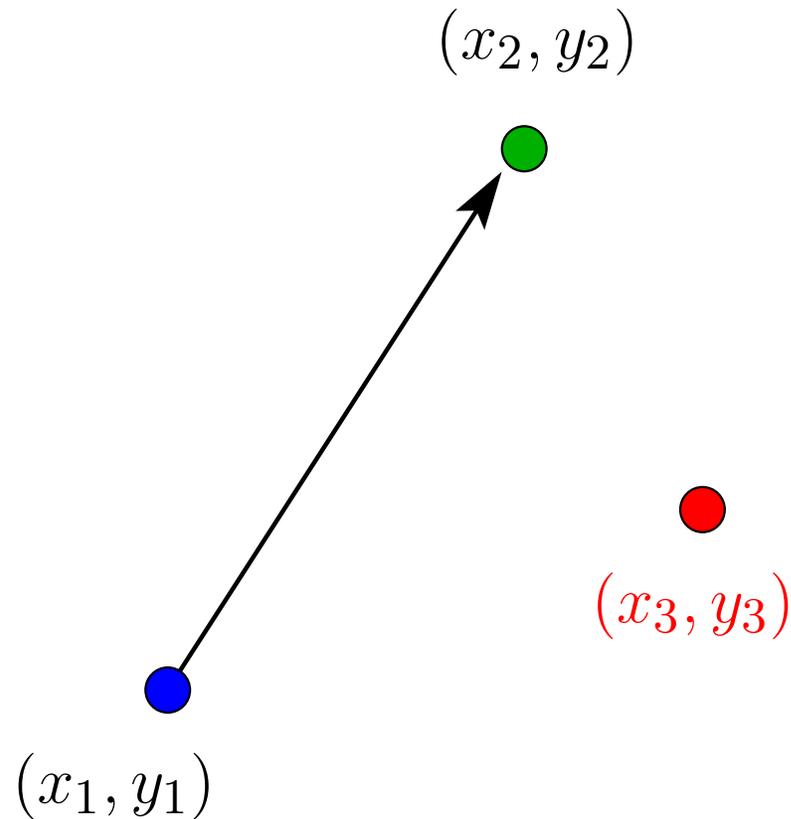
Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)) = VERDADE



Predicados geométricos

ESQUERDA($((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$) = FALSO



Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)): sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)): sinal do determinante

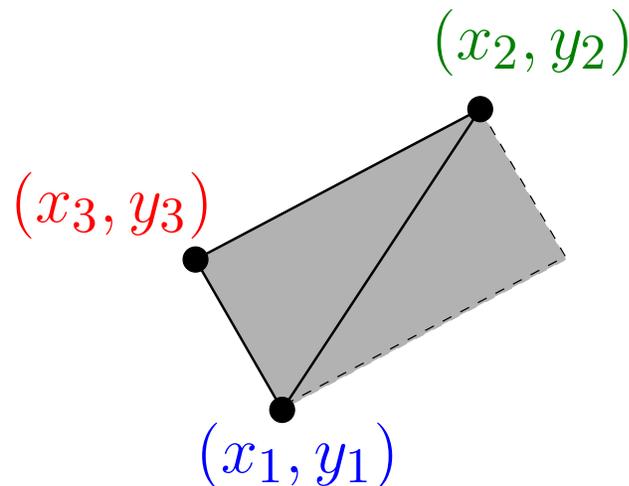
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)): sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

O valor absoluto deste número é duas vezes a área do triângulo de extremos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .



Predicados geométricos

ESQUERDA($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$)

1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$

2 então devolva VERDADE

4 senão devolva FALSO

Predicados geométricos

ESQUERDA($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$)

1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$

2 então devolva VERDADE

4 senão devolva FALSO

ESQUERDA⁺($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$)

1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) > 0$

2 então devolva VERDADE

4 senão devolva FALSO

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$

2 então devolva VERDADE

4 senão devolva FALSO

ESQUERDA⁺((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) > 0$

2 então devolva VERDADE

4 senão devolva FALSO

Podemos definir similarmente

DIREITA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

DIREITA⁺((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

COLINEAR((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

Interseção de dois segmentos

INTERSECTA:

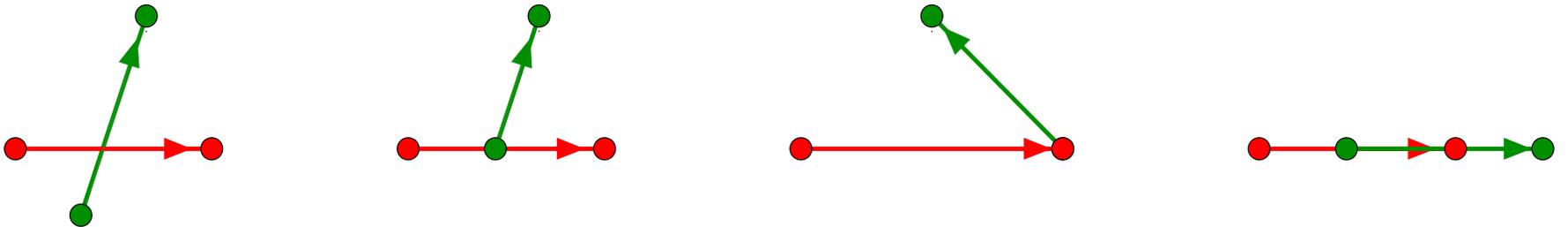
Recebe dois segmentos e devolve **VERDADE** se os segmentos se intersectam, e **FALSO** caso contrário.

Interseção de dois segmentos

INTERSECTA:

Recebe dois segmentos e devolve **VERDADE** se os segmentos se intersectam, e **FALSO** caso contrário.

Em geral, os extremos de cada segmento devem estar em lados opostos do outro segmento, mas há casos especiais.

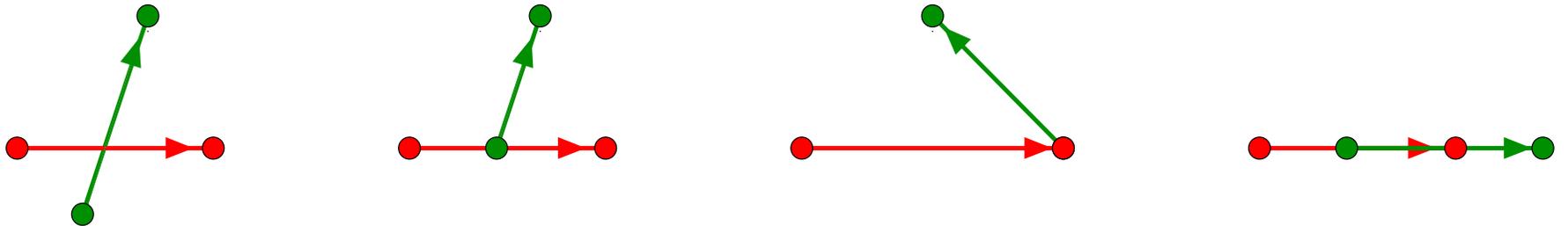


Interseção de dois segmentos

INTERSECTA:

Recebe dois segmentos e devolve **VERDADE** se os segmentos se intersectam, e **FALSO** caso contrário.

Em geral, os extremos de cada segmento devem estar em lados opostos do outro segmento, mas há casos especiais.



Hipótese de posição geral:

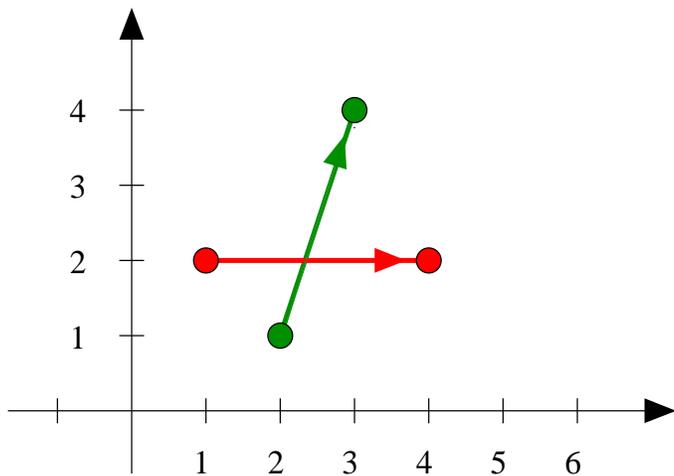
não há três vértices do polígono colineares.

Neste caso, é fácil detectar interseção de dois segmentos.

Interseção para pontos em posição geral

Intersecta $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$

- 1 se $\text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq \text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e $\text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq \text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$
- 2 então devolva **VERDADE**
- 3 senão devolva **FALSO**



$$\text{ESQUERDA}((1, 2), (4, 2), (2, 1)) = \text{FALSO}$$

$$\text{ESQUERDA}((1, 2), (4, 2), (3, 4)) = \text{VERDADE}$$

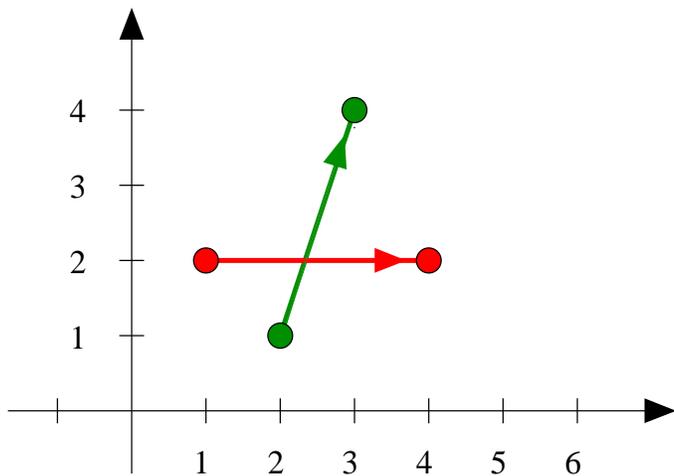
$$\text{ESQUERDA}((2, 1), (3, 4), (1, 2)) = \text{VERDADE}$$

$$\text{ESQUERDA}((2, 1), (3, 4), (4, 2)) = \text{FALSO}$$

Interseção para pontos em posição geral

Intersecta $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$

- 1 se $\text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq \text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e $\text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq \text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$
- 2 então devolva **VERDADE**
- 3 senão devolva **FALSO**



$$\text{ESQUERDA}((1, 2), (4, 2), (2, 1)) = \text{FALSO}$$

$$\text{ESQUERDA}((1, 2), (4, 2), (3, 4)) = \text{VERDADE}$$

$$\text{ESQUERDA}((2, 1), (3, 4), (1, 2)) = \text{VERDADE}$$

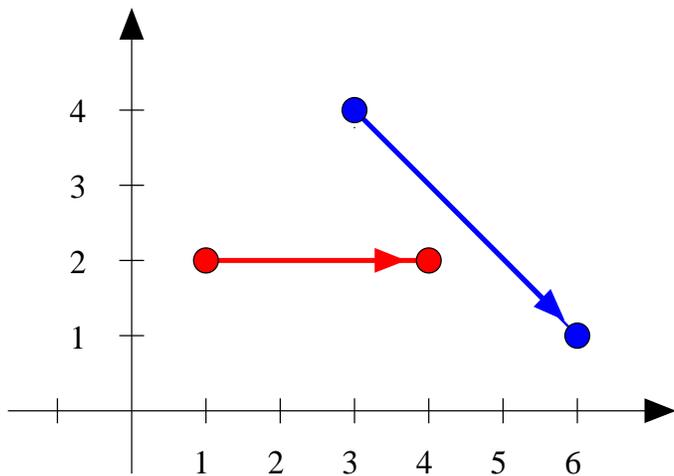
$$\text{ESQUERDA}((2, 1), (3, 4), (4, 2)) = \text{FALSO}$$

$$\text{Intersecta}((1, 2), (4, 2), (2, 1), (3, 4)) = \text{VERDADE}$$

Interseção para pontos em posição geral

Intersecta $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$

- 1 se $\text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq \text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e $\text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq \text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$
- 2 então devolva **VERDADE**
- 3 senão devolva **FALSO**



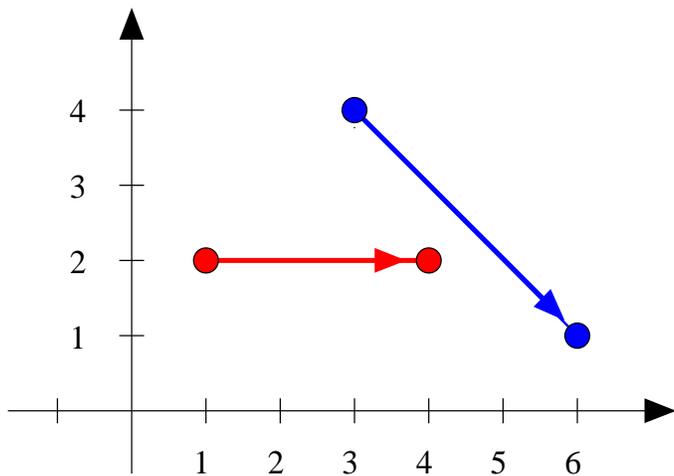
$$\text{ESQUERDA}((3, 4), (6, 1), (1, 2)) = \text{FALSO}$$

$$\text{ESQUERDA}((3, 4), (6, 1), (4, 2)) = \text{FALSO}$$

Interseção para pontos em posição geral

Intersecta $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$

- 1 se $\text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq \text{ESQUERDA}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e $\text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq \text{ESQUERDA}((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$
- 2 então devolva **VERDADE**
- 3 senão devolva **FALSO**



$\text{ESQUERDA}((3, 4), (6, 1), (1, 2)) = \text{FALSO}$

$\text{ESQUERDA}((3, 4), (6, 1), (4, 2)) = \text{FALSO}$

Intersecta $((1, 2), (4, 2), (3, 4), (6, 1)) = \text{FALSO}$

Algoritmos para triangulação

Algoritmo super ingênuo: $O(n^4)$

Algoritmos para triangulação

Algoritmo super ingênuo: $O(n^4)$

Algoritmo um pouco menos ingênuo:
 $O(n^2)$, usando orelhas!

Algoritmos para triangulação

Algoritmo super ingênuo: $O(n^4)$

Algoritmo um pouco menos ingênuo:
 $O(n^2)$, usando orelhas!

Algoritmos mais rápidos:

- $O(n \lg n)$, veremos em breve...
- $O(n)$, complicado... não estudaremos...
- $O(n \lg^* n)$, mais simples e rápido na prática