Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

`http://www.ime.usp.br/~cris/`

segundo semestre de 2014

Combinação convexa

P: coleção de pontos do plano, dada por $X[1\,..\,n], Y[1\,..\,n]$.

Combinação convexa

P: coleção de pontos do plano, dada por $X[1\,..\,n], Y[1\,..\,n]$.

Combinação convexa de pontos de P: soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n{=}1$.

Combinação convexa

P: coleção de pontos do plano, dada por $X[1\,.\,.\,n], Y[1\,.\,.\,n]$.

Combinação convexa de pontos de P: soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n{=}1$.

Fecho convexo de P: conjunto de combinações convexas de pontos de P, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathrm{conv}(P) := \{&\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \\ &\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}.\end{aligned}$$

Combinação convexa

P: coleção de pontos do plano, dada por $X[1\,..\,n], Y[1\,..\,n]$.

Combinação convexa de pontos de P: soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n{=}1$.

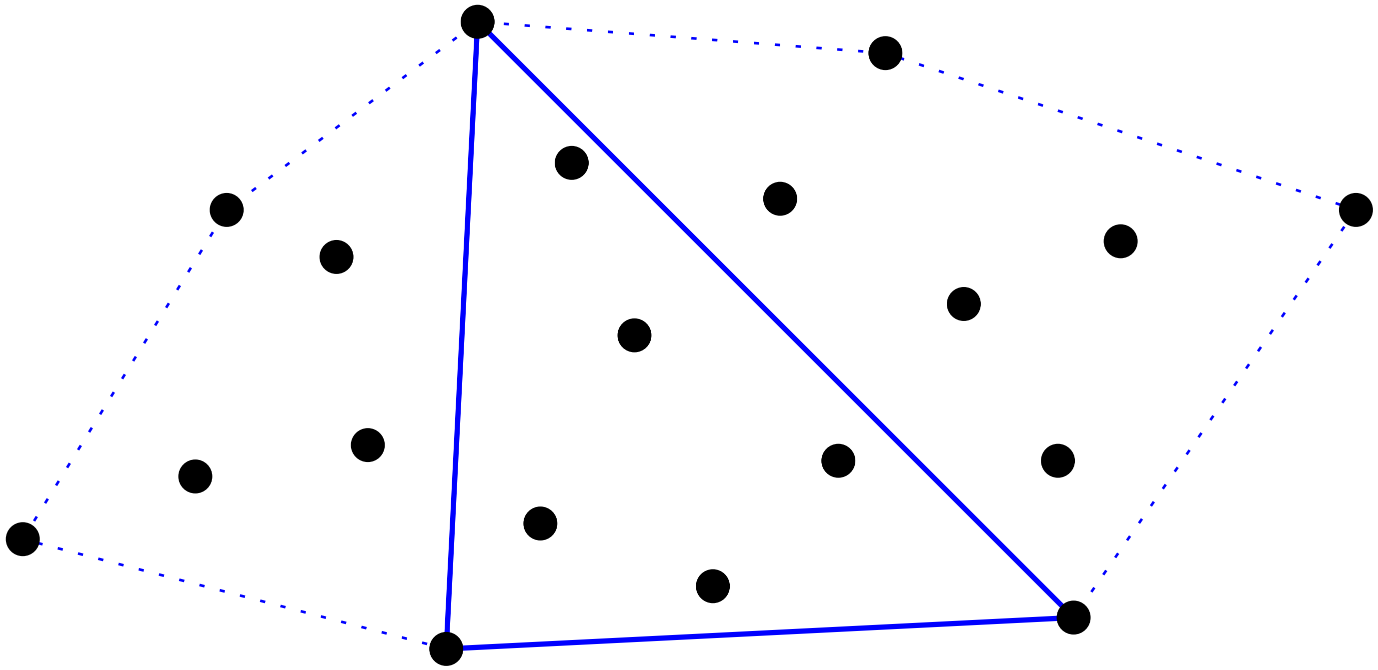
Fecho convexo de P: conjunto de combinações convexas de pontos de P, ou seja,

$$\mathrm{conv}(P) := \{\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}.$$

Problema: Dada uma coleção P de pontos do plano, determinar o fecho convexo de P.

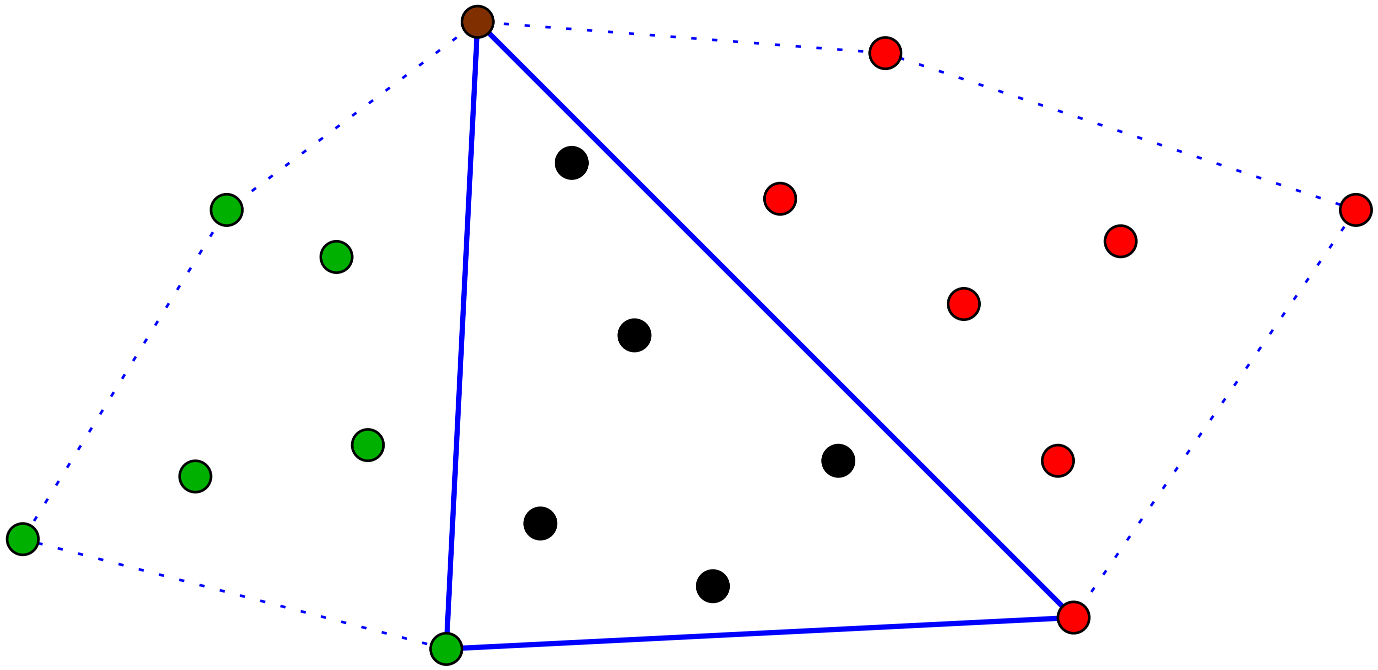
Quickhull

Ideia: descartar pontos que estão no interior do fecho convexo e concentrar o trabalho nos pontos que estão próximos da fronteira.



Quickhull

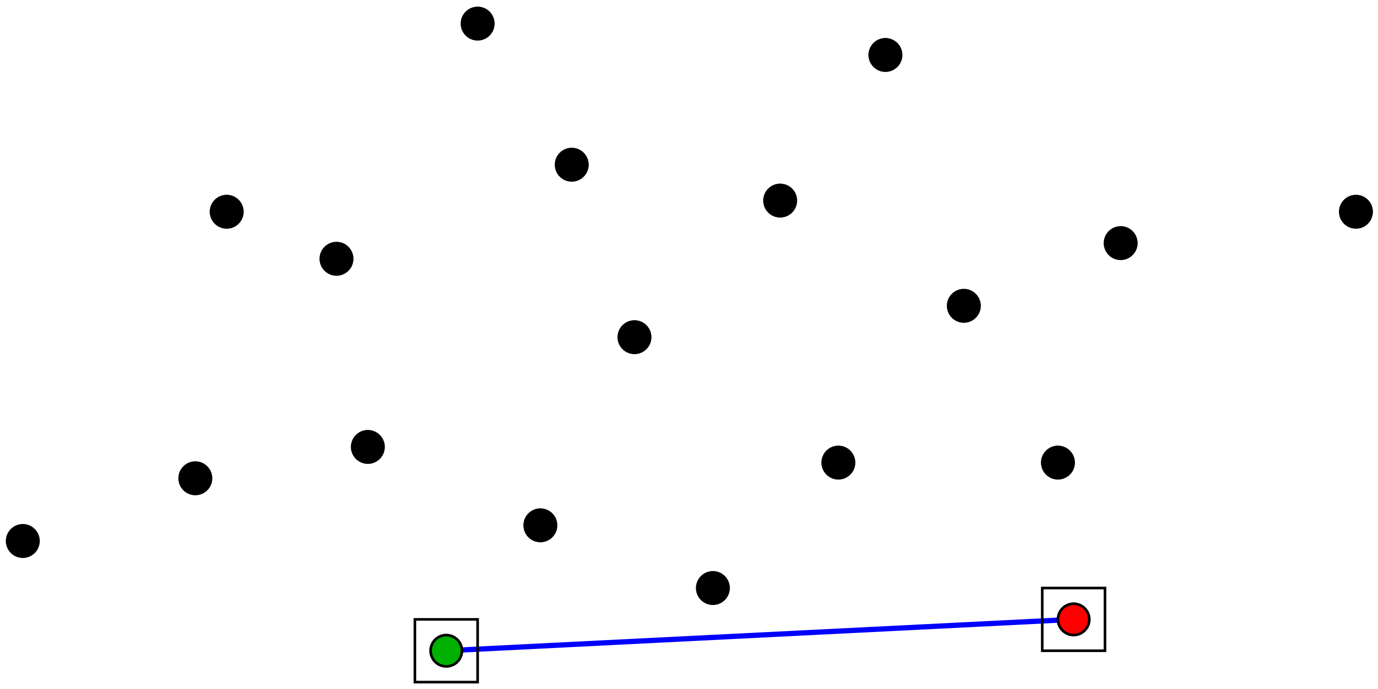
Ideia: descartar pontos que estão no interior do fecho convexo e concentrar o trabalho nos pontos que estão próximos da fronteira.



Monta coleções da esquerda e da direita
e aplica recursão nelas.

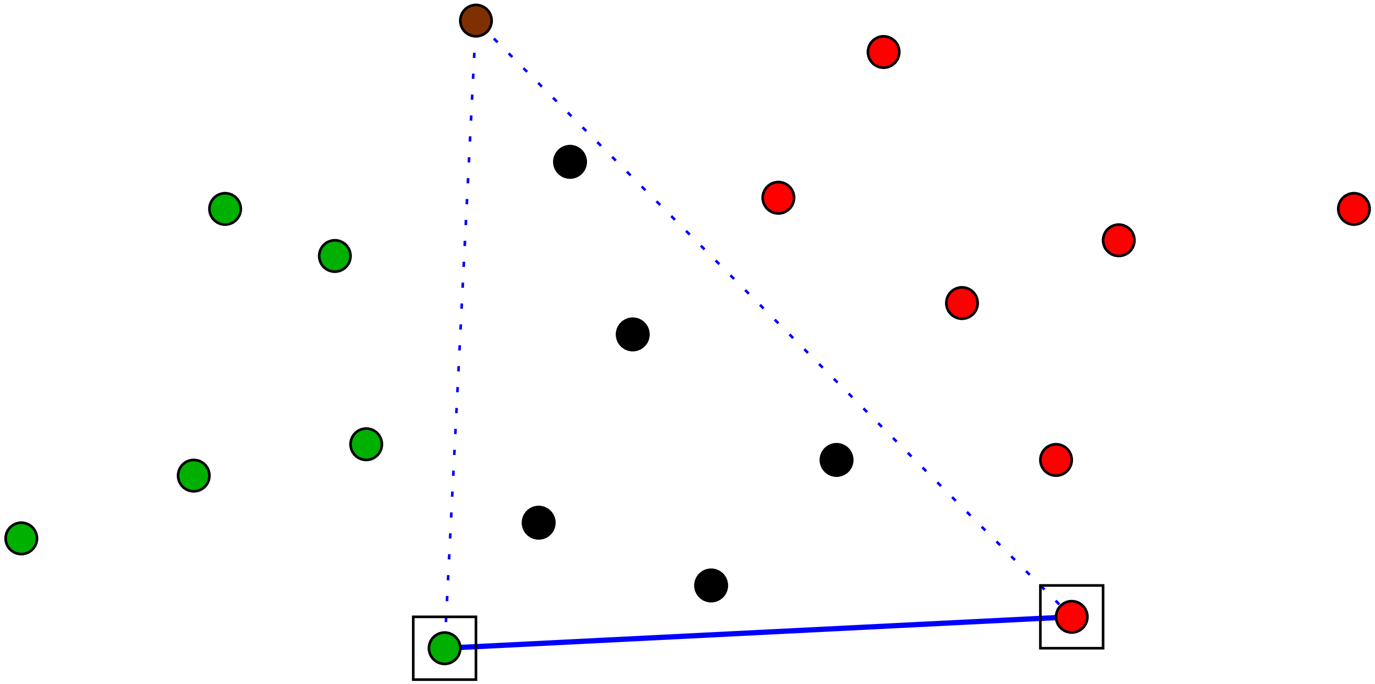
Como dividir a coleção?

Começamos com dois extremos consecutivos do fecho.



Como dividir a coleção?

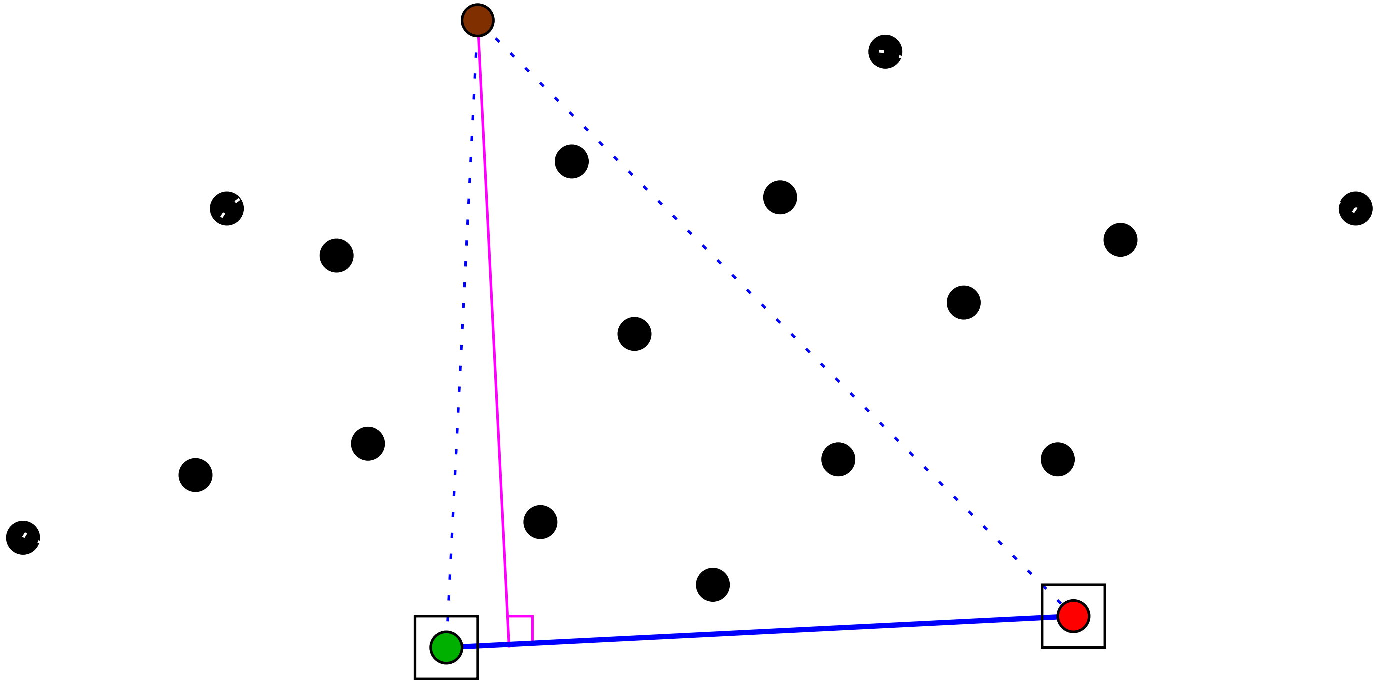
Começamos com dois extremos consecutivos do fecho.



Então precisamos encontrar o extremo marrom
e dividir em três a coleção de pontos.

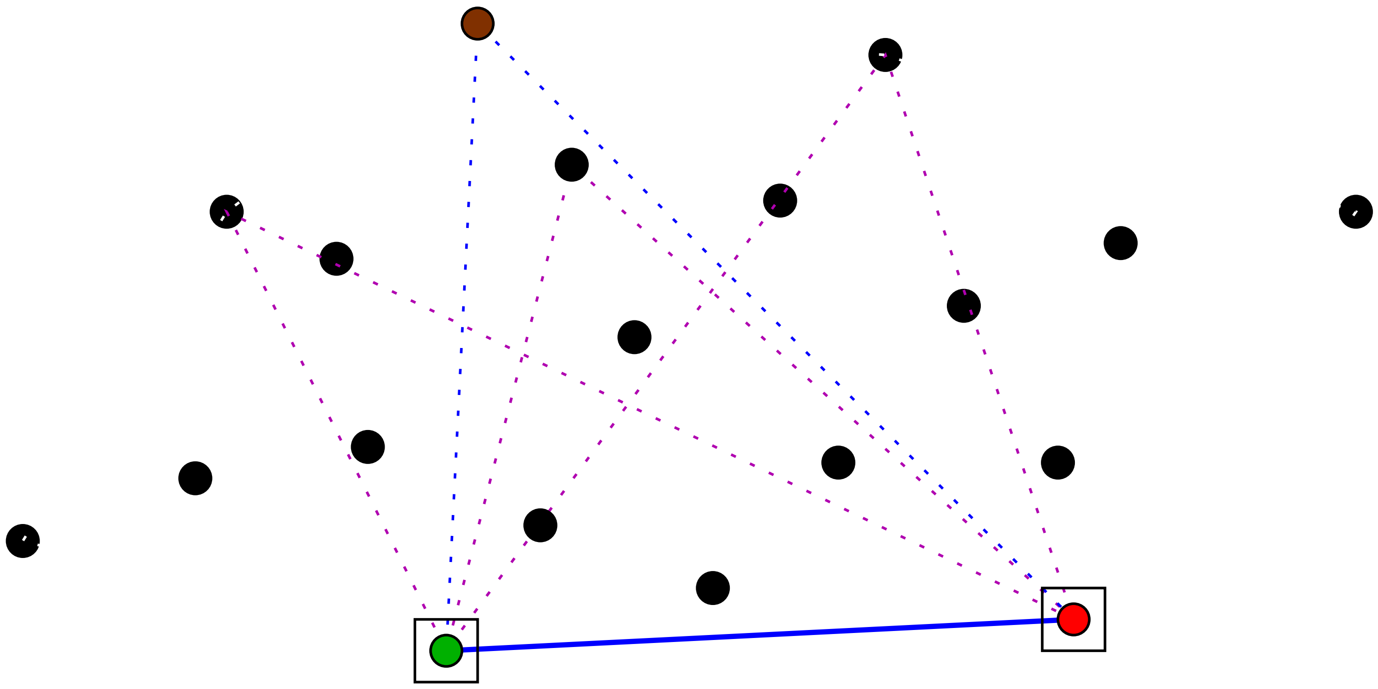
Como encontrar o ponto marrom?

O extremo marrom é o ponto mais distante da coleção em relação à reta que passa pelos dois extremos iniciais.



Como encontrar o ponto marrom?

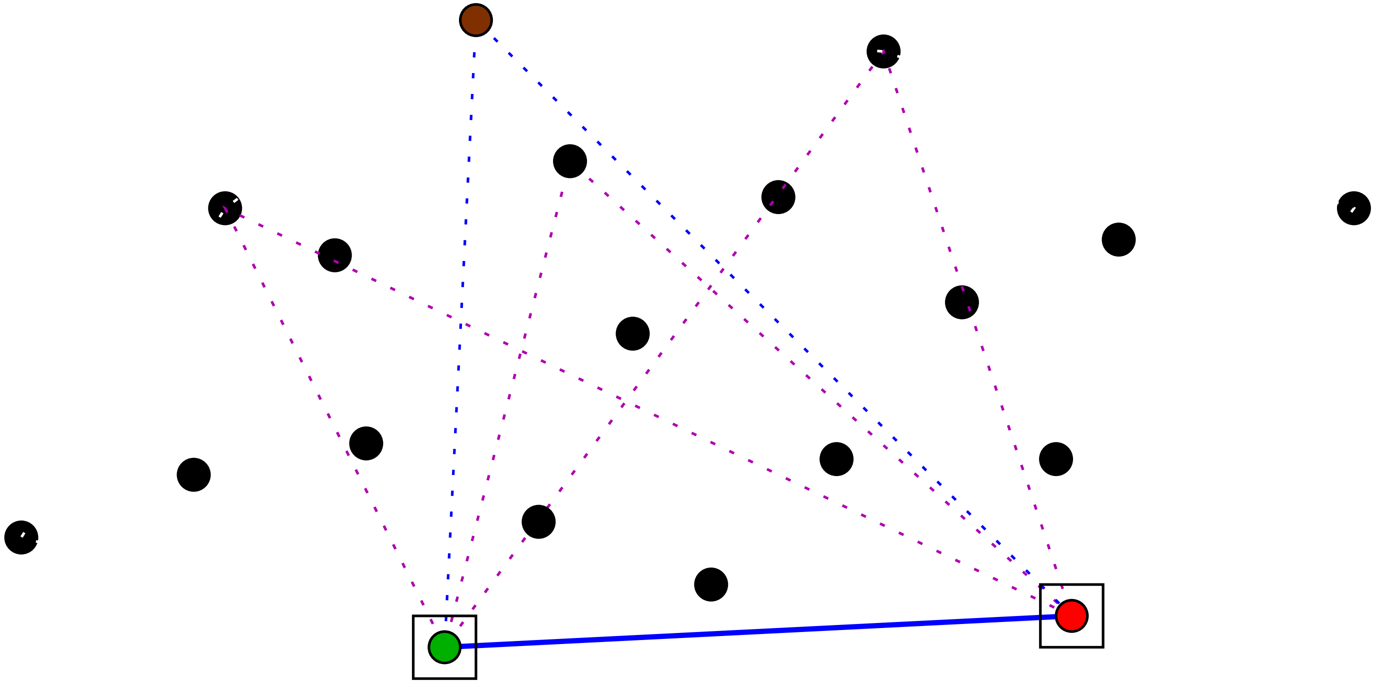
O extremo marrom é o ponto mais distante da coleção em relação à reta que passa pelos dois extremos iniciais.



Como são as áreas dos vários triângulos?
Qual tem a maior área?

Como encontrar o ponto marrom?

O extremo marrom é o ponto mais distante da coleção em relação à reta que passa pelos dois extremos iniciais.



Como são as áreas dos vários triângulos?
Qual tem a maior área?
O triângulo com terceira ponta mais distante!

O ponto marrom

$X[p\,..\,r], Y[p\,..\,r]$: coleção com ≥ 3 pontos em posição geral.

O ponto marrom

$X[p\,..\,r], Y[p\,..\,r]$: coleção com ≥ 3 pontos em posição geral.

A função abaixo devolve a área do triângulo cujos extremos são os pontos de índices i, j e k.

```
ÁREA $(X, Y, i, j, k)$
    devolva $|\textsc{Det}(X[i], Y[i], X[j], Y[j], X[k], Y[k])|/2$
```

O ponto marrom

$X[p\,.\,.\,r], Y[p\,.\,.\,r]$: coleção com ≥ 3 pontos em posição geral.

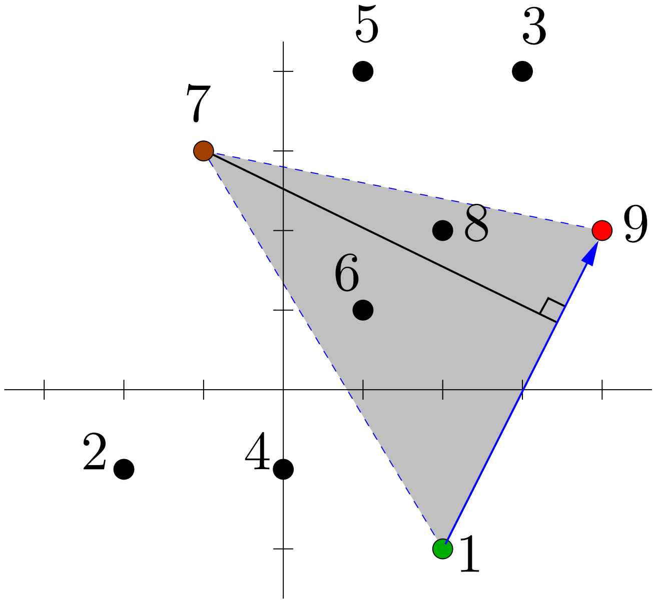
A função abaixo devolve a área do triângulo cujos extremos são os pontos de índices i, j e k.

```
ÁREA $(X, Y, i, j, k)$
  devolva $|\text{DET}(X[i], Y[i], X[j], Y[j], X[k], Y[k])|/2$
```

Recebe $X[p\,.\,.\,r], Y[p\,.\,.\,r]$ e, usando ÁREA, devolve o índice de um ponto extremo da coleção distinto de p e r.

```
PONTOEXTREMO $(X, Y, p, r)$
  $q \leftarrow p + 1$    $maior \leftarrow$ ÁREA$(X, Y, p, r, q)$
  para $i \leftarrow p + 2$ até $r - 1$ faça
      se ÁREA$(X, Y, p, r, i) > maior$
          então $q \leftarrow i$    $maior \leftarrow$ ÁREA$(X, Y, p, r, q)$
  devolva $q$
```

Exemplo

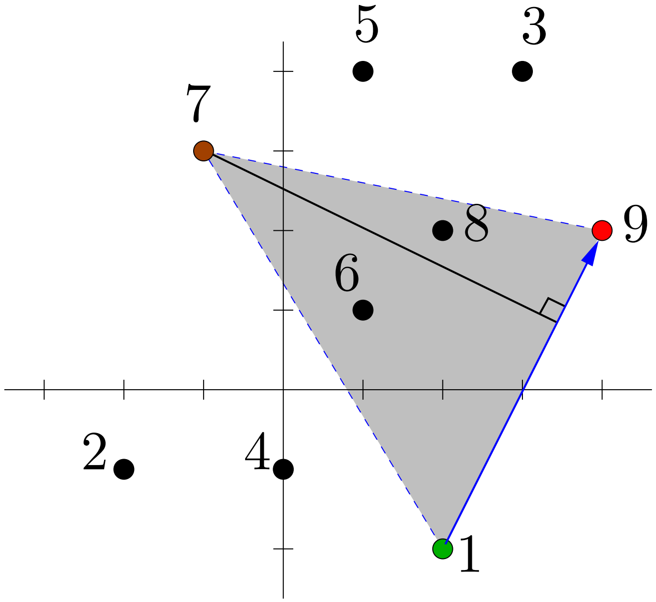


X	2	−2	3	0	1	1	−1	2	4
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Y	−2	−1	4	−1	4	1	3	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\textsc{PontoExtremo}(X, Y, 1, 9) = 7$$

Exemplo



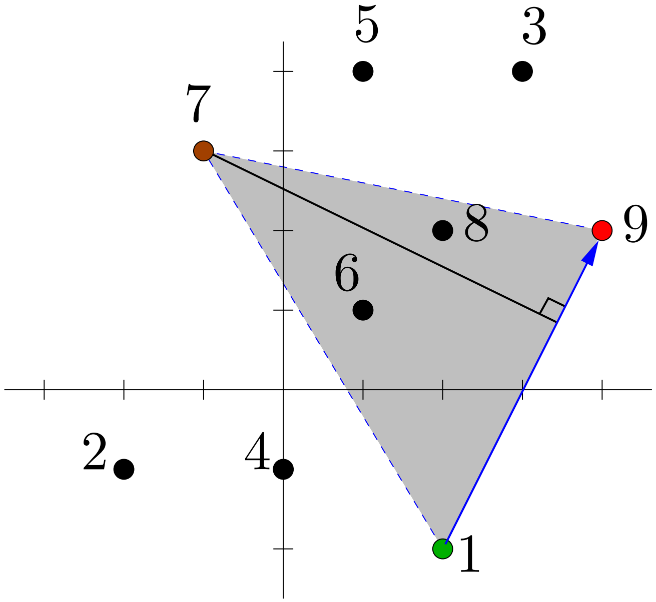
X	2	−2	3	0	1	1	−1	2	4
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Y	−2	−1	4	−1	4	1	3	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\textsc{PontoExtremo}(X, Y, 1, 9) = 7$$

Exercício: Mostre que o algoritmo de fato devolve o índice de um ponto extremo da coleção $X[p\,..\,r], Y[p\,..\,r]$.

Exemplo



X	2	-2	3	0	1	1	-1	2	4
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Y	-2	-1	4	-1	4	1	3	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PONTOEXTREMO$(X, Y, 1, 9) = 7$

Exercício: Mostre que o algoritmo de fato devolve o índice de um ponto extremo da coleção $X[p\,..\,r], Y[p\,..\,r]$.

Consumo de tempo de PONTOEXTREMO (X, Y, p, r):
$\Theta(n)$, onde $n := r - p + 1$.

Particionamento

PARTICIONE (X, Y, p, r):

Recebe coleção $X[p\,..\,r], Y[p\,..\,r]$ de pontos em posição geral, com pelo menos três pontos, tal que os pontos de índice p e r são extremos consecutivos na fronteira do fecho convexo da coleção no sentido anti-horário.

Particionamento

PARTICIONE (X, Y, p, r):

Recebe coleção $X[p\,.\,.\,r], Y[p\,.\,.\,r]$ de pontos em posição geral, com pelo menos três pontos, tal que os pontos de índice p e r são extremos consecutivos na fronteira do fecho convexo da coleção no sentido anti-horário.

Rearranja $X[p\,.\,.\,r], Y[p\,.\,.\,r]$ e devolve p', q tq $p \leq p' < q < r$ e

(i) o ponto de índice r permanece na mesma posição, enquanto que o ponto de índice p foi para a posição p',

(ii) o ponto de índice q é extremo,

(iii) $X[p\,.\,.\,p'{-}1], Y[p\,.\,.\,p'{-}1]$ é uma coleção de pontos interiores ao fecho convexo de $X[p\,.\,.\,r], Y[p\,.\,.\,r]$,

(iv) $\cdots$

Particionamento

PARTICIONE (X, Y, p, r):

Rearranja $X[p \,..\, r], Y[p \,..\, r]$ e devolve p', q tq $p \le p' < q < r$ e

(i) o ponto de índice r permanece na mesma posição, enquanto que o ponto de índice p foi para a posição p',

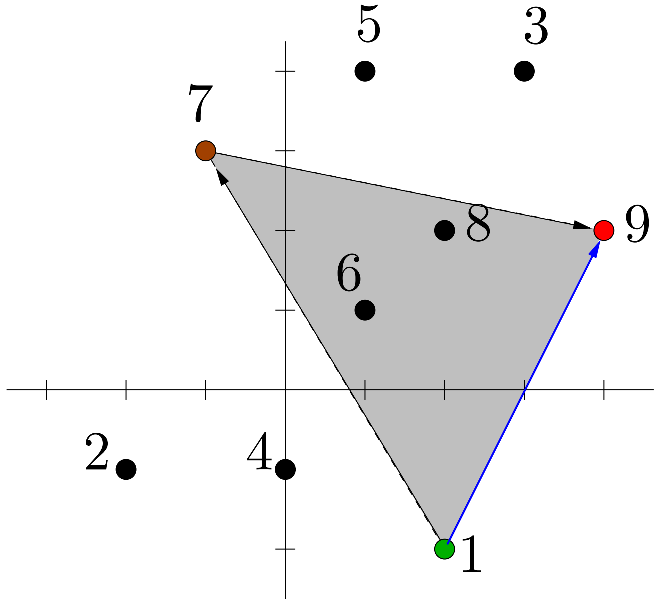
(ii) o ponto de índice q é extremo,

(iii) $X[p \,..\, p'{-}1], Y[p \,..\, p'{-}1]$ é uma coleção de pontos interiores ao fecho convexo de $X[p \,..\, r], Y[p \,..\, r]$,

(iv) $X[p'{+}1 \,..\, q{-}1], Y[p'{+}1 \,..\, q{-}1]$ é a coleção dos pontos que estão à esquerda da reta orientada determinada por $(X[p'], Y[p'])$ e $(X[q], Y[q])$,

(v) $X[q{+}1 \,..\, r{-}1], Y[q{+}1 \,..\, r{-}1]$ é a coleção dos pontos que estão à esquerda da reta orientada determinada por $(X[q], Y[q])$ e $(X[r], Y[r])$.

Particionamento

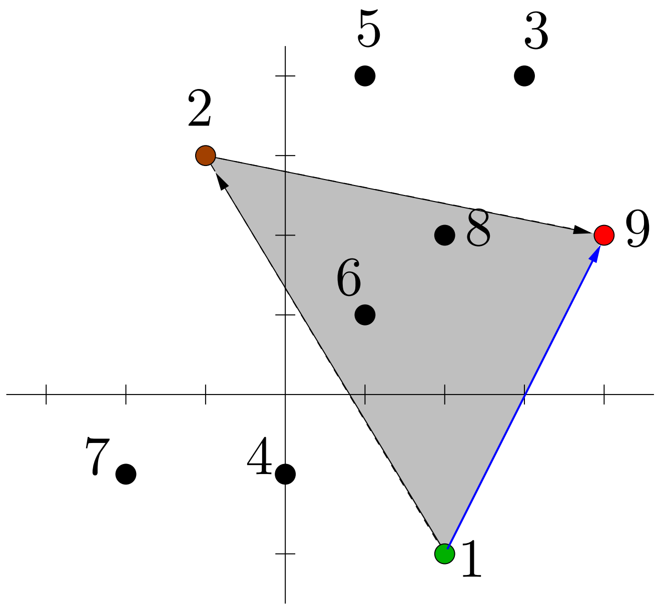


$\text{PARTICIONE}(X, Y, 1, 9)$

	p						q		r
X	2	−2	3	0	1	1	−1	2	4
Y	−2	−1	4	−1	4	1	3	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Encontra o ponto extremo indicado por q.

Particionamento



PARTICIONE$(X, Y, 1, 9)$

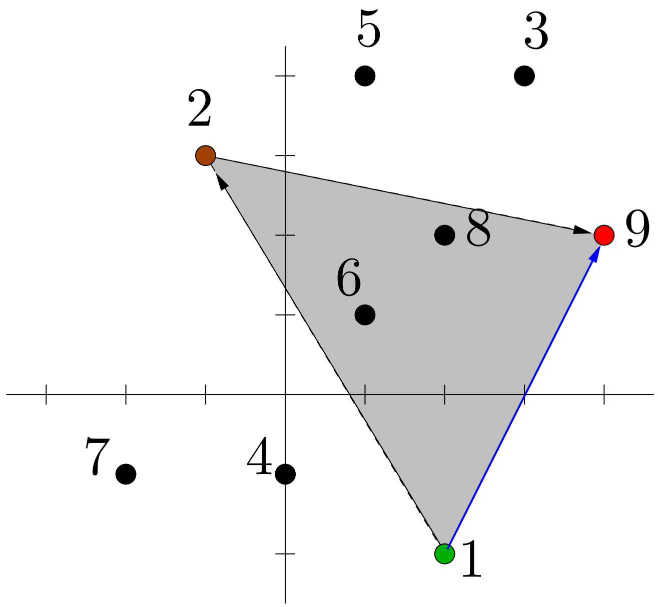
p'

q

	p	$p{+}1$						k	r
X	2	−1	3	0	1	1	−2	2	4
Y	−2	3	4	−1	4	1	−1	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Encontra o ponto extremo indicado por q.
Coloca esse ponto na posição $p{+}1$.

Particionamento



PARTICIONE$(X, Y, 1, 9)$

									p'
									q
	p	$p+1$						k	r
X	2	-1	3	0	1	1	-2	2	4
Y	-2	3	4	-1	4	1	-1	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Encontra o ponto extremo indicado por q.
Coloca esse ponto na posição $p+1$.

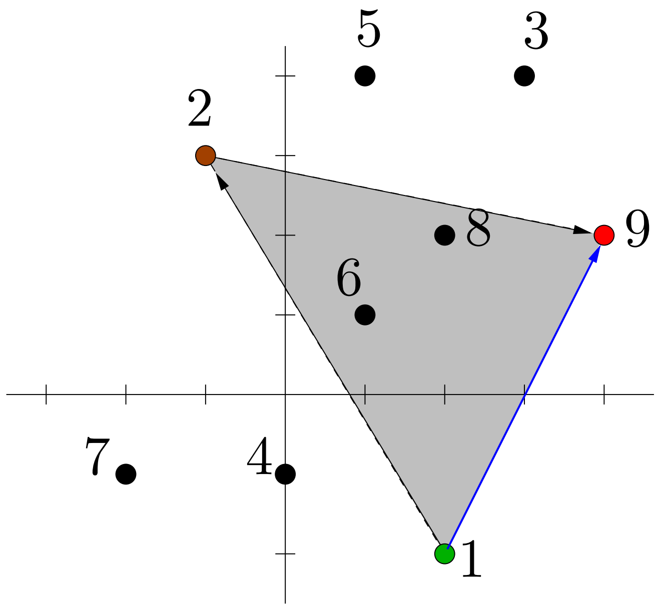
Invariante:

$X[q\,..\,r], Y[q\,..\,r]$: pontos vermelhos examinados

$X[p'\,..\,q-1], Y[p'\,..\,q-1]$: pontos verdes examinados

$X[k+1\,..\,p'-1], Y[k+1\,..\,p'-1]$: pontos interiores examinados

Particionamento



PARTICIONE$(X, Y, 1, 9)$

									p'
									q
	p	$p+1$						k	r
X	2	-1	3	0	1	1	-2	2	4
Y	-2	3	4	-1	4	1	-1	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

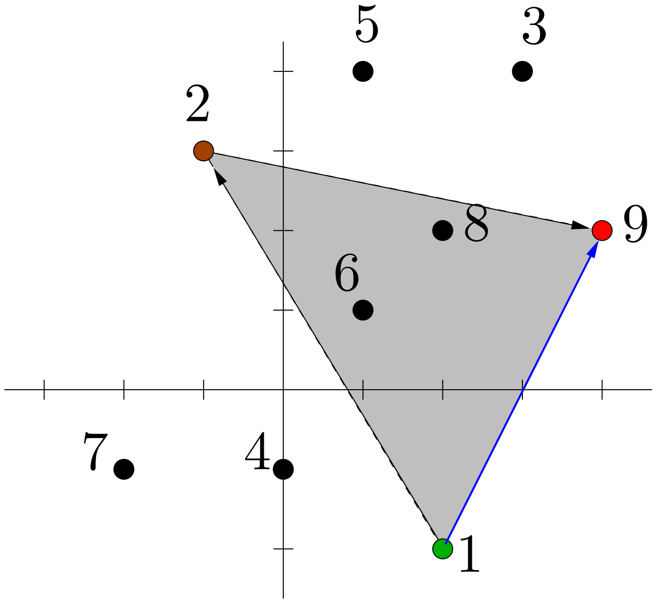
Invariante:

$X[q \mathrel{..} r], Y[q \mathrel{..} r]$: pontos vermelhos examinados

$X[p' \mathrel{..} q-1], Y[p' \mathrel{..} q-1]$: pontos verdes examinados

$X[k+1 \mathrel{..} p'-1], Y[k+1 \mathrel{..} p'-1]$: pontos interiores examinados

Particionamento



PARTICIONE$(X, Y, 1, 9)$

									p'
									q
	p	$p{+}1$						k	r
X	2	−1	3	0	1	1	−2	2	4
Y	−2	3	4	−1	4	1	−1	2	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Invariante:

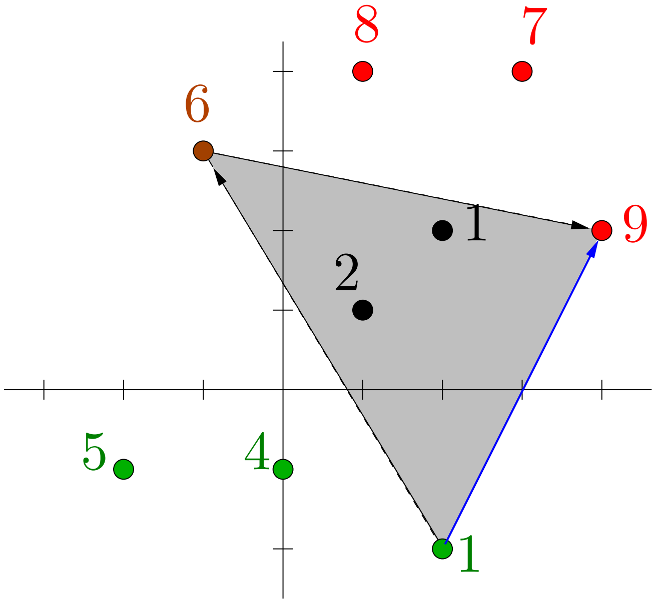
$X[q\,..\,r], Y[q\,..\,r]$: pontos vermelhos examinados

$X[p'\,..\,q{-}1], Y[p'\,..\,q{-}1]$: pontos verdes examinados

$X[k{+}1\,..\,p'{-}1], Y[k{+}1\,..\,p'{-}1]$: pontos interiores examinados

Para $k \leftarrow r{-}1$ até $p{+}1$
  coloque o k-ésimo ponto na parte apropriada.

Particionamento



Ao final...

	p	$p+1$						k	p' q r
X	2	−1	3	0	1	1	−2	2	4
Y	−2	3	4	−1	4	1	−1	2	2

	p		p'			q			r
X	2	1	2	0	−2	−1	3	1	4
Y	2	1	−2	−1	−1	3	4	4	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Invariante:

$X[q\,..\,r], Y[q\,..\,r]$: pontos vermelhos examinados

$X[p'\,..\,q-1], Y[p'\,..\,q-1]$: pontos verdes examinados

$X[k+1\,..\,p'-1], Y[k+1\,..\,p'-1]$: pontos interiores examinados

Particione

```
PARTICIONE $(X, Y, p, r)$
  $q \leftarrow$ PONTOEXTREMO$(X, Y, p, r)$
  $(X[p{+}1], Y[p{+}1]) \leftrightarrow (X[q], Y[q])$
  $p' \leftarrow r \quad q \leftarrow r$
  para $k \leftarrow r - 1$ decrescendo até $p + 2$ faça
      se ESQ$(X, Y, p, p{+}1, k)$          $\triangleright$ verde?
          então $p' \leftarrow p' - 1 \quad (X[p'], Y[p']) \leftrightarrow (X[k], Y[k])$
          senão se ESQ$(X, Y, p{+}1, r, k)$          $\triangleright$ vermelho?
                    então $p' \leftarrow p' - 1 \quad q \leftarrow q - 1$
                          $(X[q], Y[q]) \leftrightarrow (X[k], Y[k])$
                          $(X[k], Y[k]) \leftrightarrow (X[p'], Y[p'])$
  $p' \leftarrow p' - 1 \quad q \leftarrow q - 1$
  $(X[q], Y[q]) \leftrightarrow (X[p{+}1], Y[p{+}1])$
  se $p' \neq q$ então $(X[p'], Y[p']) \leftrightarrow (X[p{+}1], Y[p{+}1])$
  $p' \leftarrow p' - 1 \quad (X[p'], Y[p']) \leftrightarrow (X[p], Y[p])$
  devolva $(p', q)$
```

Particione

```
PARTICIONE $(X, Y, p, r)$
  $q \leftarrow$ PONTOEXTREMO$(X, Y, p, r)$
  $(X[p+1], Y[p+1]) \leftrightarrow (X[q], Y[q])$
  $p' \leftarrow r \quad q \leftarrow r$
  para $k \leftarrow r-1$ decrescendo até $p+2$ faça
      se ESQ$(X, Y, p, p+1, k)$        ▷ verde?
          então $p' \leftarrow p'-1 \quad (X[p'], Y[p']) \leftrightarrow (X[k], Y[k])$
          senão se ESQ$(X, Y, p+1, r, k)$        ▷ vermelho?
                      então $p' \leftarrow p'-1 \quad q \leftarrow q-1$
                            $(X[q], Y[q]) \leftrightarrow (X[k], Y[k])$
                            $(X[k], Y[k]) \leftrightarrow (X[p'], Y[p'])$
  $p' \leftarrow p'-1 \quad q \leftarrow q-1$
  $(X[q], Y[q]) \leftrightarrow (X[p+1], Y[p+1])$
  se $p' \neq q$ então $(X[p'], Y[p']) \leftrightarrow (X[p+1], Y[p+1])$
  $p' \leftarrow p'-1 \quad (X[p'], Y[p']) \leftrightarrow (X[p], Y[p])$
  devolva $(p', q)$
```

Consumo de tempo: $\Theta(n)$, onde $n = r - p + 1$.

Quickhull

```
QuickHull $(X, Y, n)$
se $n = 1$
    então $h \leftarrow 1 \quad H[1] \leftarrow 1$
    senão $k \leftarrow \min\{i \in [1\,..\,n] : Y[i] \leq Y[j], 1 \leq j \leq n\}$
          $(X[1], Y[1]) \leftrightarrow (X[k], Y[k])$
          $i \leftarrow 2$
          para $j \leftarrow 3$ até $n$ faça
              se Dir$(X, Y, 1, i, j)$ então $i \leftarrow j$
          $(X[n], Y[n]) \leftrightarrow (X[i], Y[i])$
          $(H, h) \leftarrow$ QuickHullRec$(X, Y, 1, n)$
devolva $(H, h)$
```

Quickhull

```
QUICKHULL $(X, Y, n)$
se $n = 1$
    então $h \leftarrow 1$    $H[1] \leftarrow 1$
    senão $k \leftarrow \min\{i \in [1\,..\,n] : Y[i] \leq Y[j], 1 \leq j \leq n\}$
        $(X[1], Y[1]) \leftrightarrow (X[k], Y[k])$
        $i \leftarrow 2$
        para $j \leftarrow 3$ até $n$ faça
            se DIR$(X, Y, 1, i, j)$ então $i \leftarrow j$
        $(X[n], Y[n]) \leftrightarrow (X[i], Y[i])$
        $(H, h) \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, 1, n)$
devolva $(H, h)$
```

Consumo de tempo: $\Theta(n) + T(n)$,
onde $n = r - p + 1$ e $T(n)$ é o tempo consumido por QUICKHULLREC$(X, Y, 1, n)$.

Miolo recursivo do Quickhull

```
QUICKHULLREC $(X, Y, p, r)$
se $p = r - 1$    $\triangleright$ há exatamente dois pontos na coleção
    então $h \leftarrow 2$    $H[1] \leftarrow r$    $H[2] \leftarrow p$
    senão $(p', q) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, Y, p, r)$
          $(H, h) \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, q, r)$
          $(H', h') \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, p', q)$
          $\triangleright$ $H \leftarrow H \cdot H'$ removendo uma cópia do $q$
          para $i \leftarrow 2$ até $h'$ faça
              $h \leftarrow h + 1$    $H[h] \leftarrow H'[i]$
devolva $(H, h)$
```

Miolo recursivo do Quickhull

```
QUICKHULLREC $(X, Y, p, r)$
  se $p = r - 1$    ▷ há exatamente dois pontos na coleção
      então $h \leftarrow 2$    $H[1] \leftarrow r$    $H[2] \leftarrow p$
      senão $(p', q) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, Y, p, r)$
            $(H, h) \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, q, r)$
            $(H', h') \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, p', q)$
            ▷ $H \leftarrow H \cdot H'$ removendo uma cópia do $q$
            para $i \leftarrow 2$ até $h'$ faça
                $h \leftarrow h + 1$    $H[h] \leftarrow H'[i]$
  devolva $(H, h)$
```

Consumo de tempo: $T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \Theta(n)$,
onde $n = r - p + 1$, $n_d = r - q + 1$ e $n_e = r - p' + 1$.

Miolo recursivo do Quickhull

```
QUICKHULLREC $(X, Y, p, r)$
se $p = r - 1$    $\triangleright$ há exatamente dois pontos na coleção
    então $h \leftarrow 2$    $H[1] \leftarrow r$    $H[2] \leftarrow p$
    senão $(p', q) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, Y, p, r)$
          $(H, h) \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, q, r)$
          $(H', h') \leftarrow$ QUICKHULLREC$(X, Y, p', q)$
          $\triangleright$ $H \leftarrow H \cdot H'$ removendo uma cópia do $q$
          para $i \leftarrow 2$ até $h'$ faça
              $h \leftarrow h + 1$    $H[h] \leftarrow H'[i]$
devolva $(H, h)$
```

Consumo de tempo: $T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \Theta(n)$,
onde $n = r - p + 1$, $n_d = r - q + 1$ e $n_e = r - p' + 1$.

Observe que $n_d + n_e \leq n$.
Com isso, podemos mostrar que $T(n) = \mathrm{O}(n^2)$.

Casos degenerados

Como tratar os casos degenerados nos quatro algoritmos vistos para fecho convexo?

Casos degenerados

Como tratar os casos degenerados nos quatro algoritmos vistos para fecho convexo?

- embrulho de presente
- Graham
- incremental
- quickhull