Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

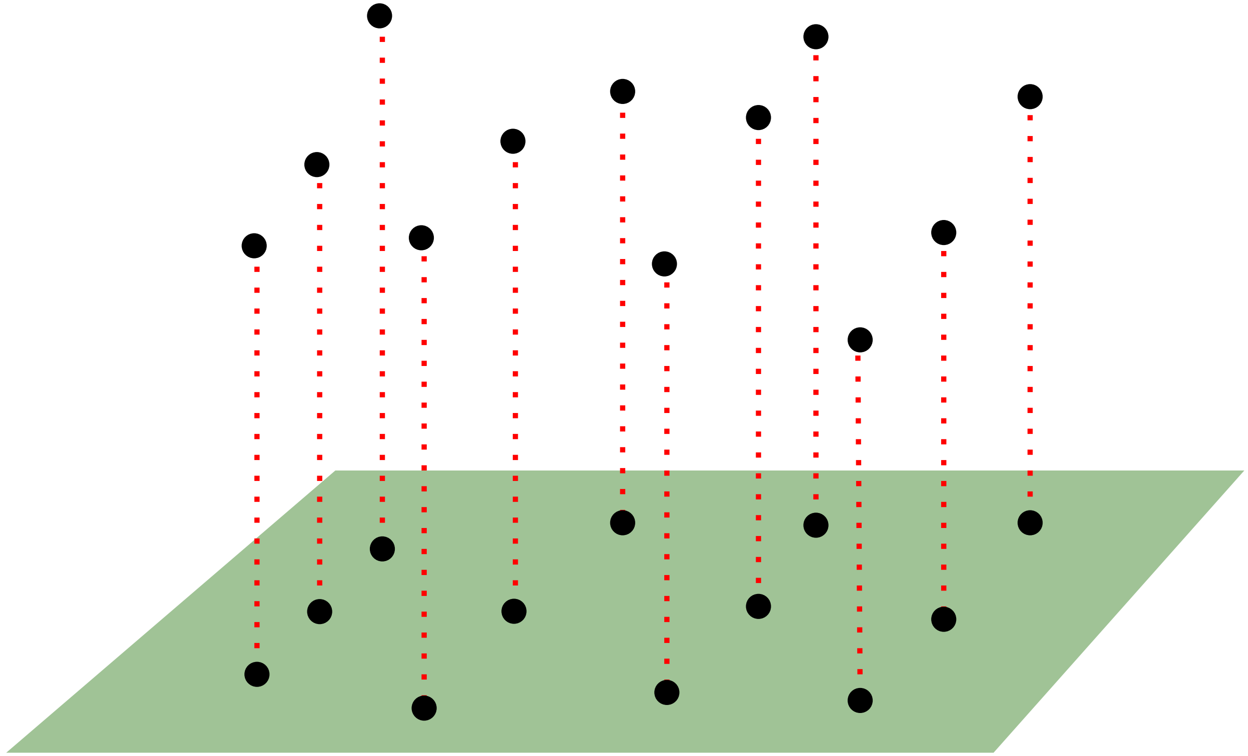
Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

http://www.ime.usp.br/~cris/

segundo semestre de 2014

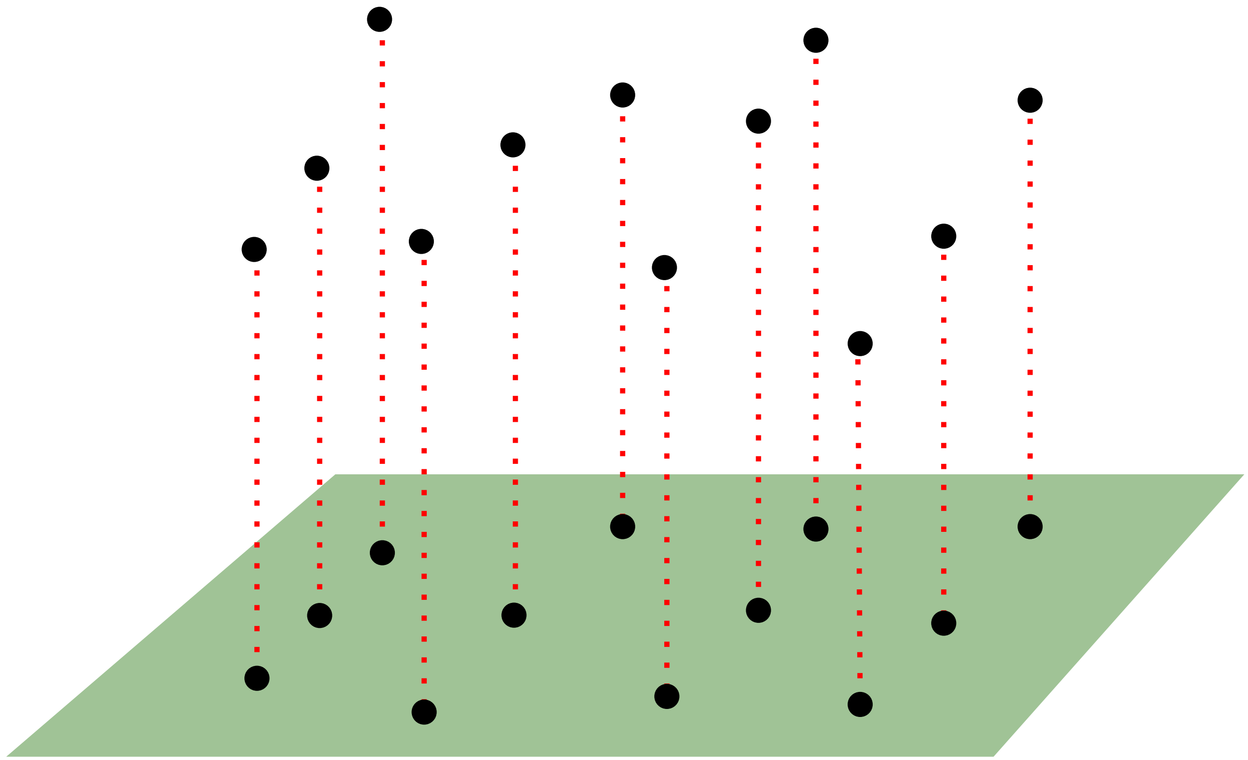
Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

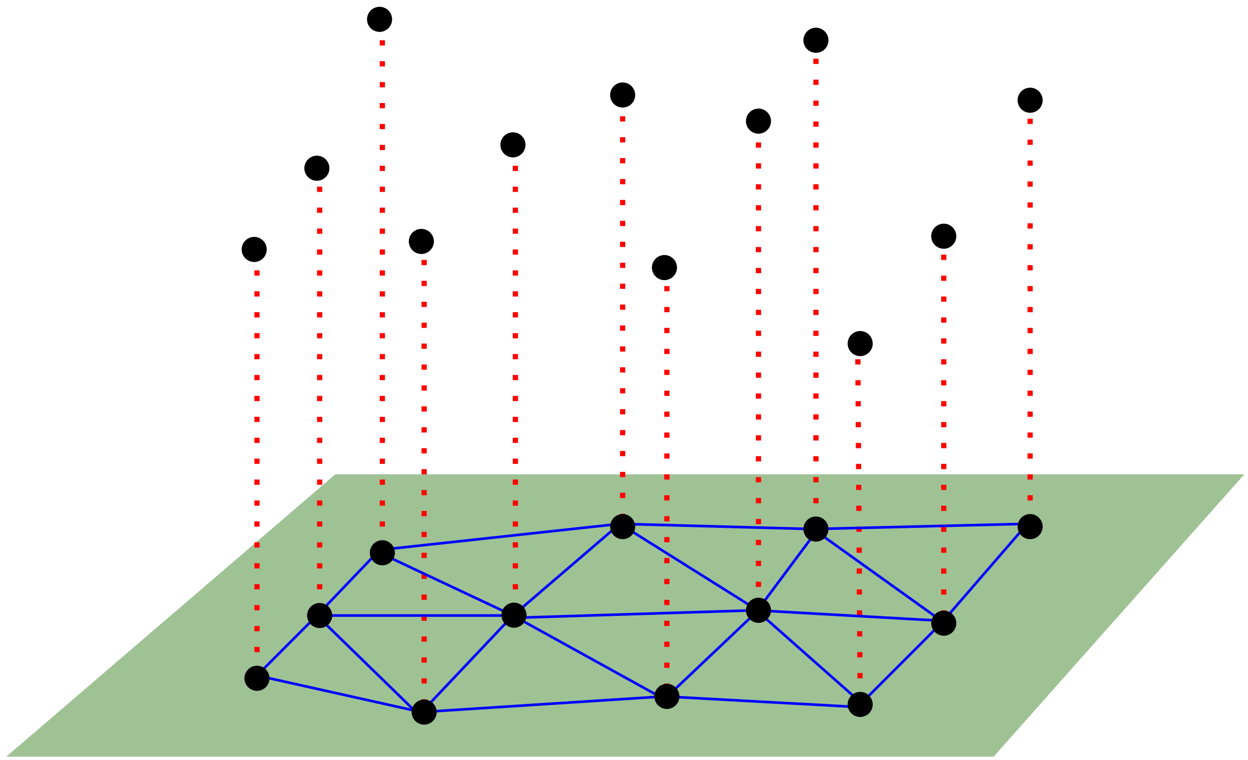


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



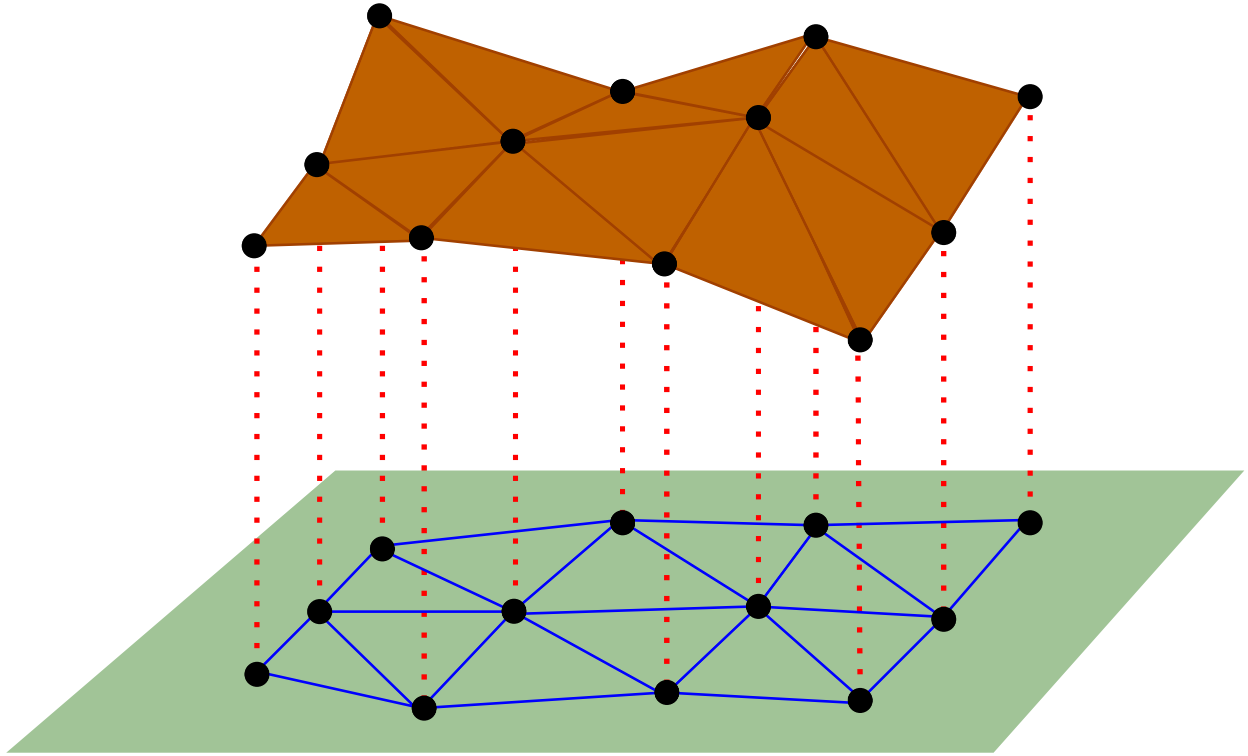
Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Triangularizamos a projeção no plano e...

Relevos

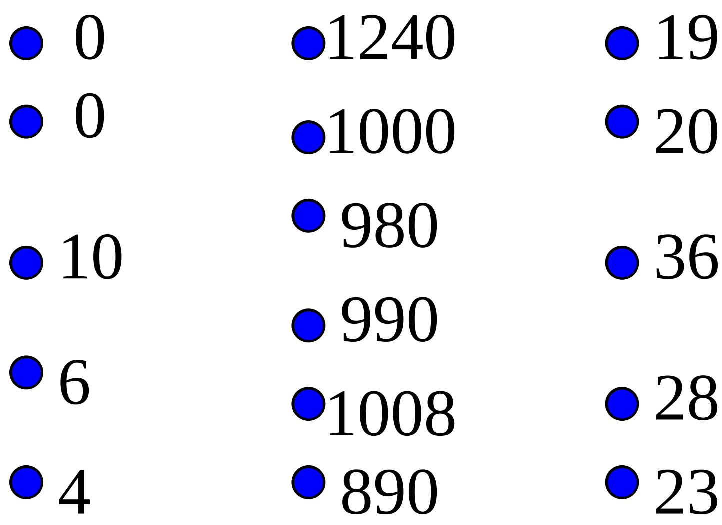
Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



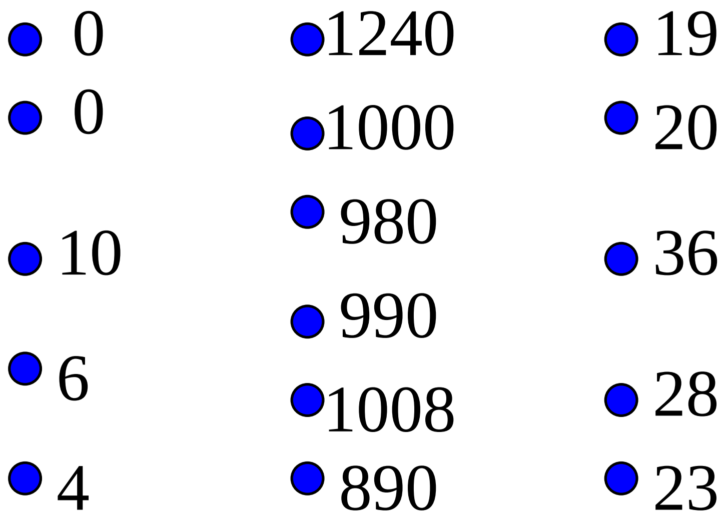
Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

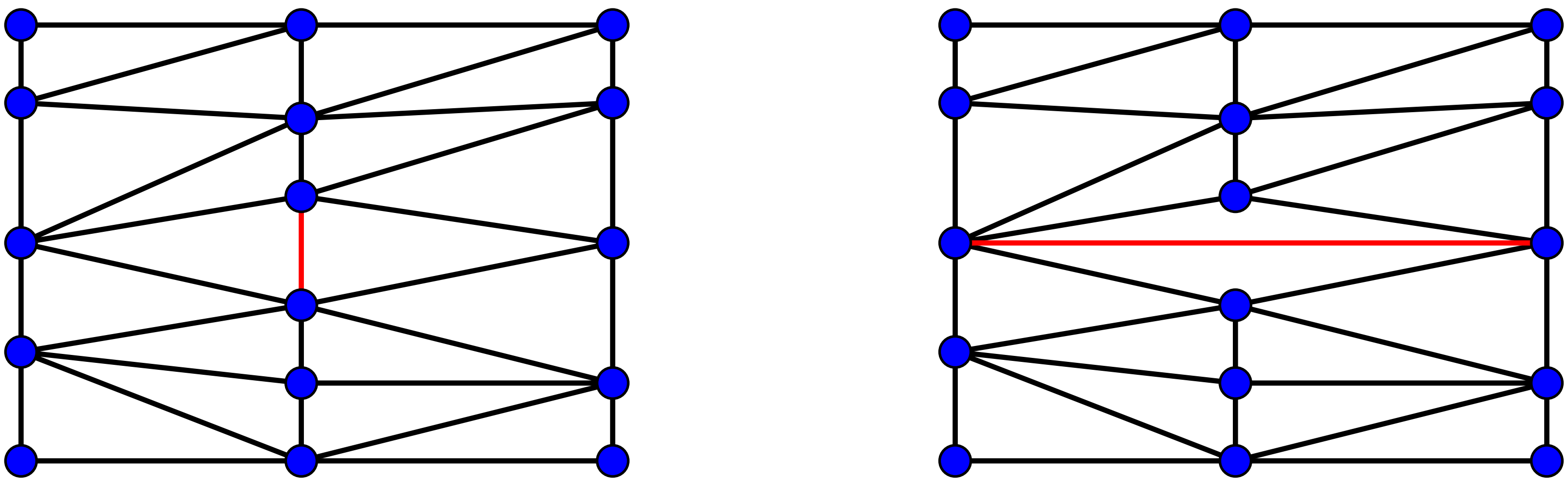
Como fazer?
Triangularizamos a projeção no plano e levantamos!

Qual triangulação é melhor?



Qual triangulação é melhor?





Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

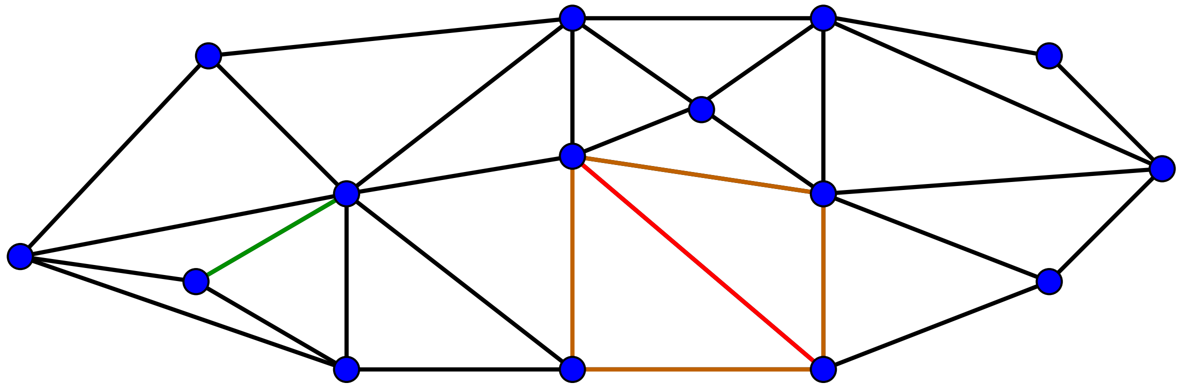
Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

T é ângulo-ótima
se $A(T) \geq A(T')$ para toda triangulação T' de P.

Triangulação legal

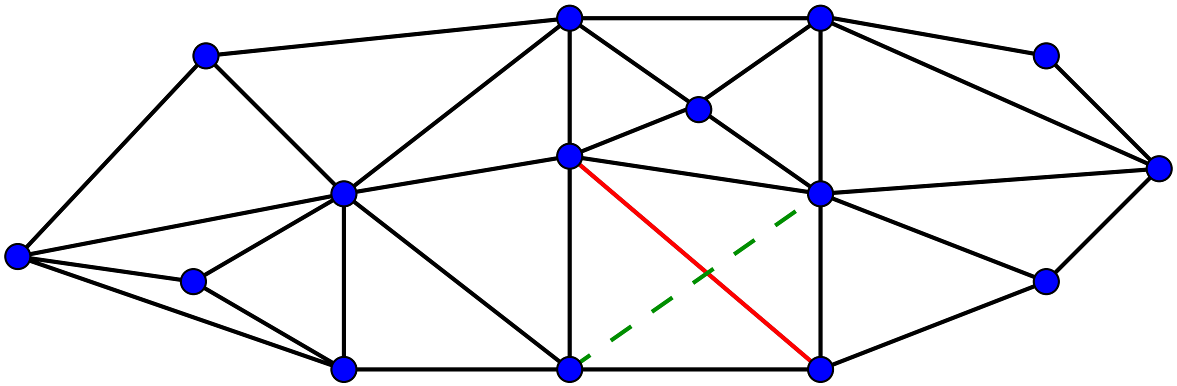
T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo
(a aresta verde não satisfaz esta condição)

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

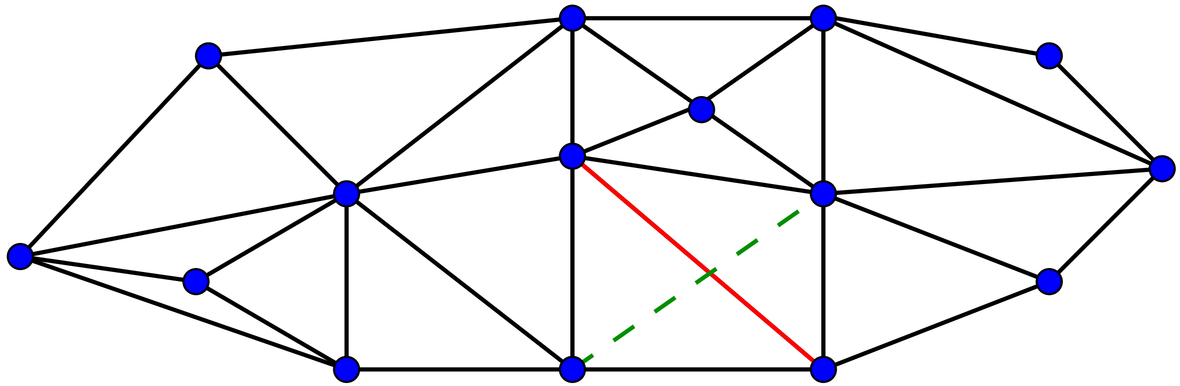
f: outra diagonal do quadrilátero de e

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

f: outra diagonal do quadrilátero de e

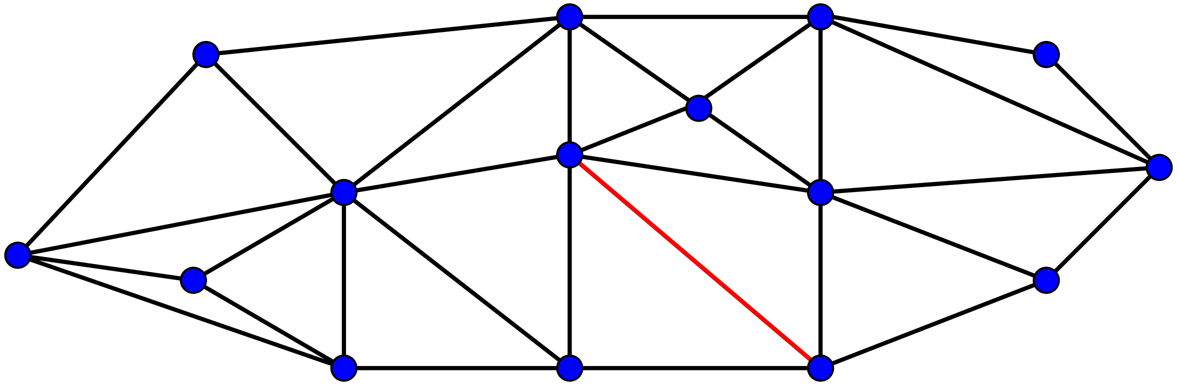
$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

T é legal se não tem arestas ilegais

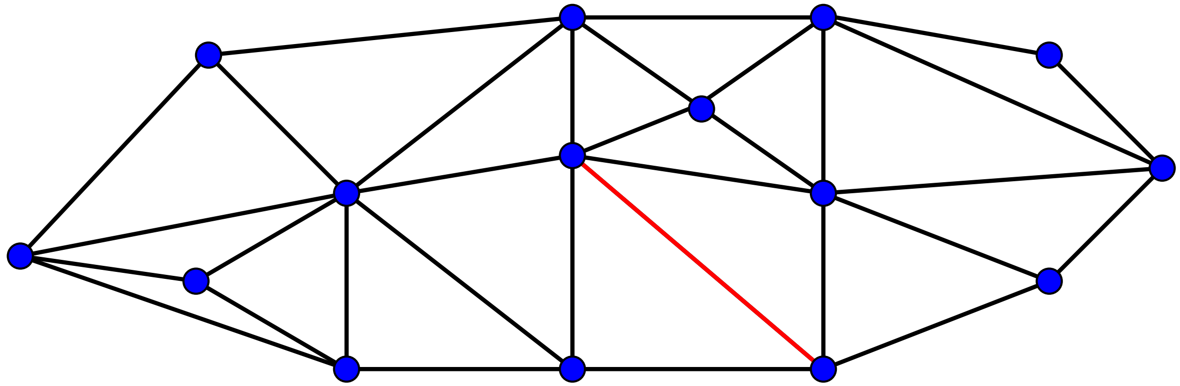
Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

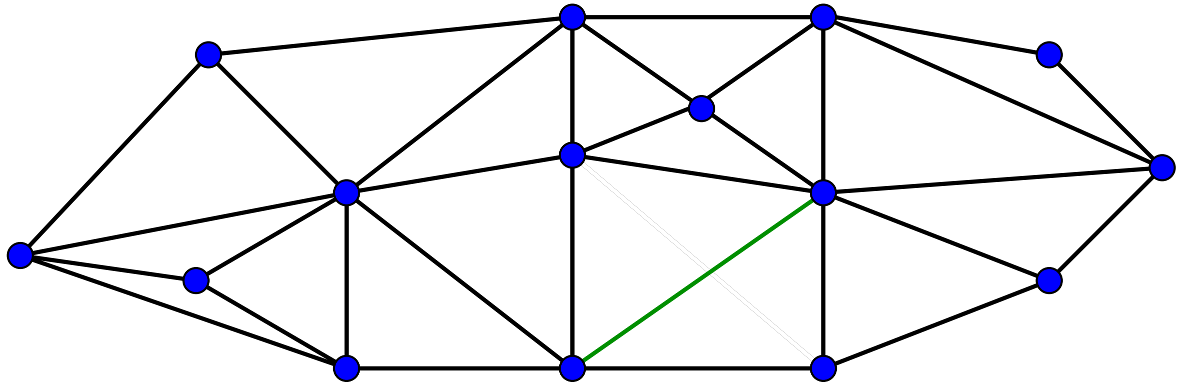


Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

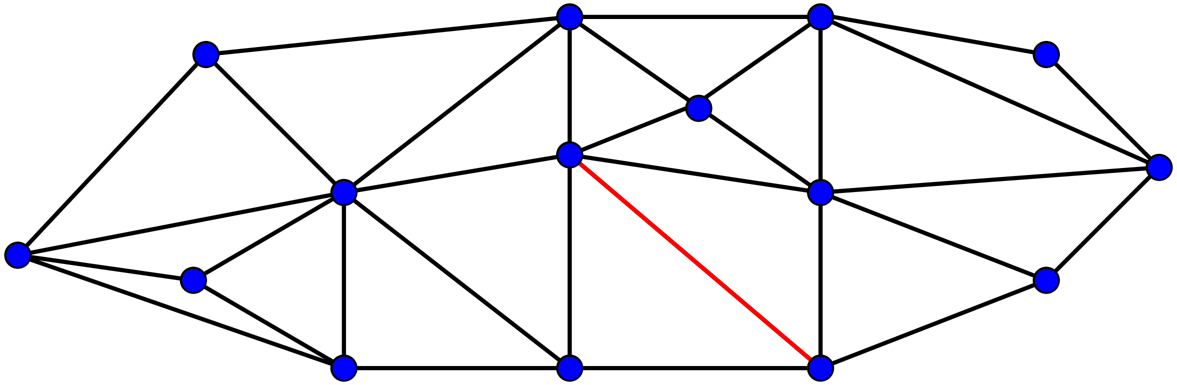


T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.

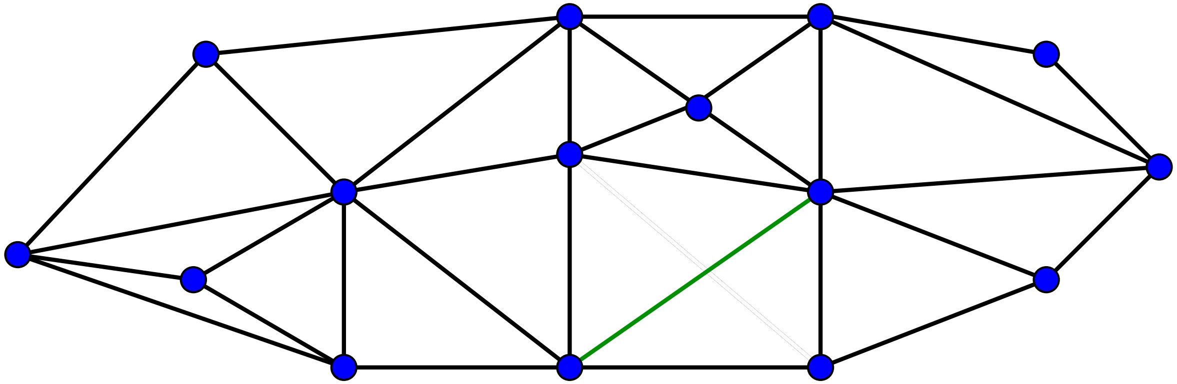


Triangulação legal

e: aresta ilegal de T



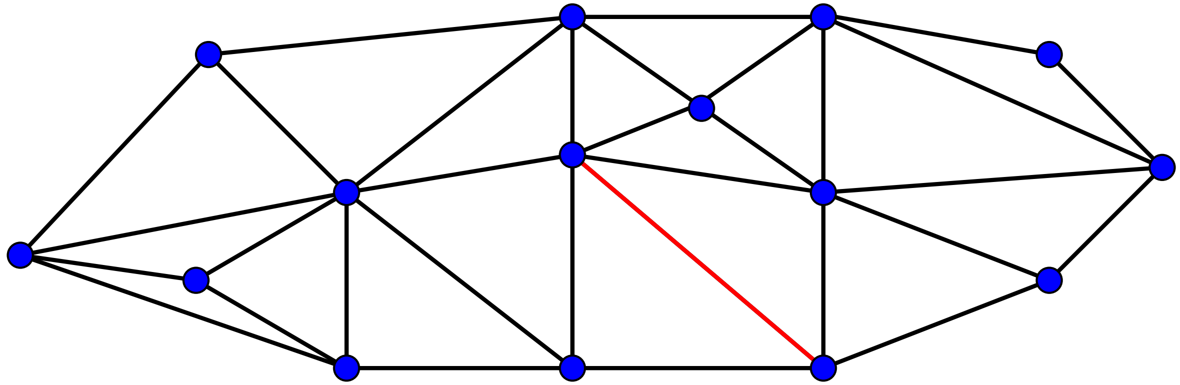
T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.



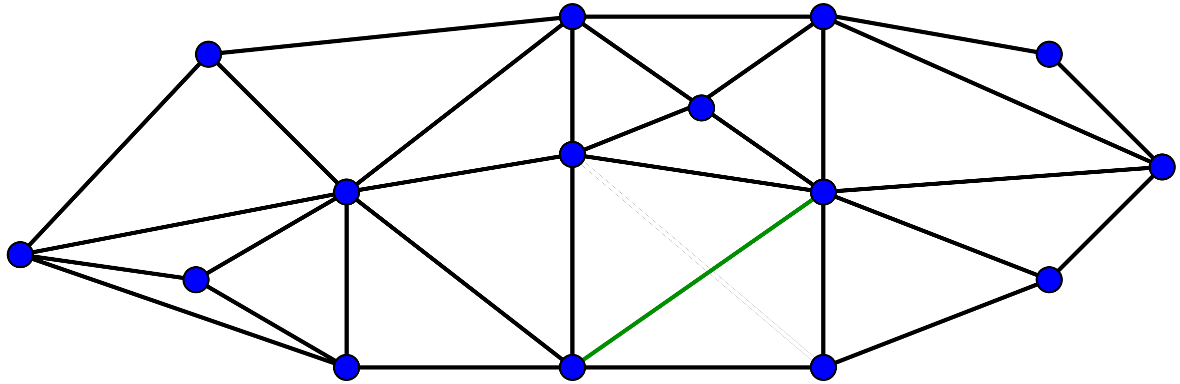
Vale que $A(T') > A(T)$.

Triangulação legal

e: aresta ilegal de T



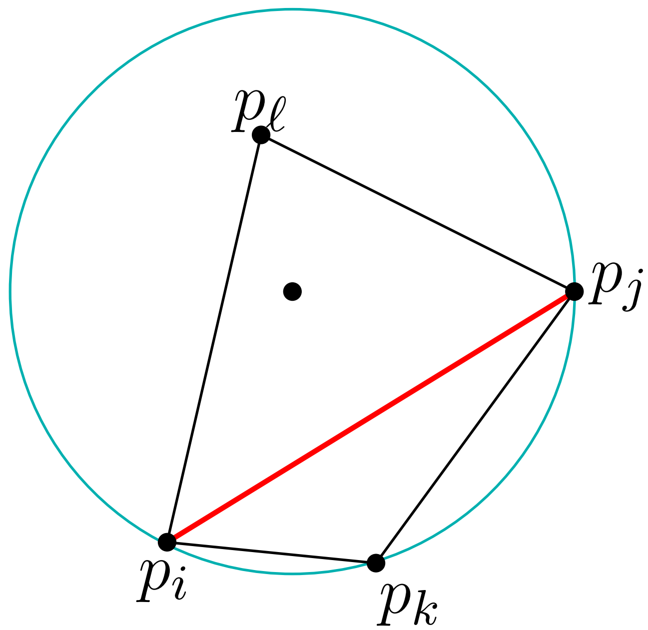
T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.



Vale que $A(T') > A(T)$. Então existe triangulação legal!

Aresta ilegal

Aresta interna $e = p_i p_j$ e
p_k e p_ℓ pontas dos triângulos que compartilham e.



e é ilegal sse
p_ℓ está no interior do círculo determinado por $p_i p_j p_k$.

Prova feita na aula.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Veja que, se P está em posição geral, então os vértices de $\mathrm{Vor}(P)$ têm grau 3 e $DG(P)$ já é uma triangulação de P: a sua única triangulação de Delaunay.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Veja que, se P está em posição geral, então os vértices de $\mathrm{Vor}(P)$ têm grau 3 e $DG(P)$ já é uma triangulação de P: a sua única triangulação de Delaunay.

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Um lado é fácil.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Um lado é fácil.

Toda triangulação de Delaunay não tem arestas ilegais, portanto é legal.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Um lado é fácil.

Toda triangulação de Delaunay não tem arestas ilegais, portanto é legal.

Vale que

(a) p_i, p_j, p_k estão na mesma face de $DG(P)$ sse existe um círculo que passa pelos três e não contém nenhum ponto de P em seu interior;

(b) $p_i p_j$ é uma aresta de $DG(P)$ sse existe um disco que contém p_i e p_j em sua fronteira e mais nenhum ponto de P.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

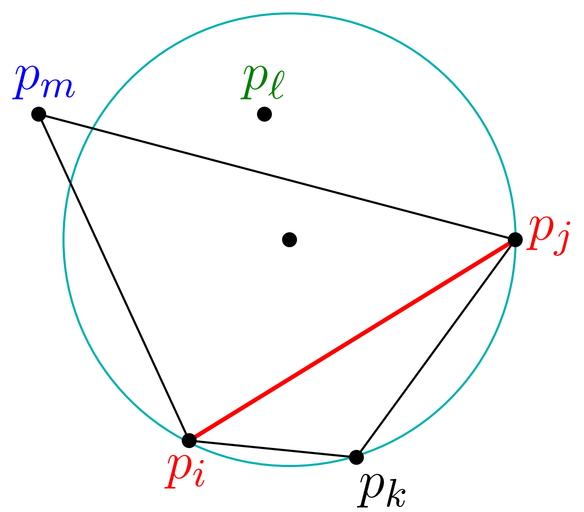
Prova. Seja T uma triangulação legal. Por contradição, suponha que T não é de Delaunay.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Seja T uma triangulação legal. Por contradição, suponha que T não é de Delaunay.

Por (a), existe $p_i p_j$ tal que existe p_ℓ dentro do círculo...

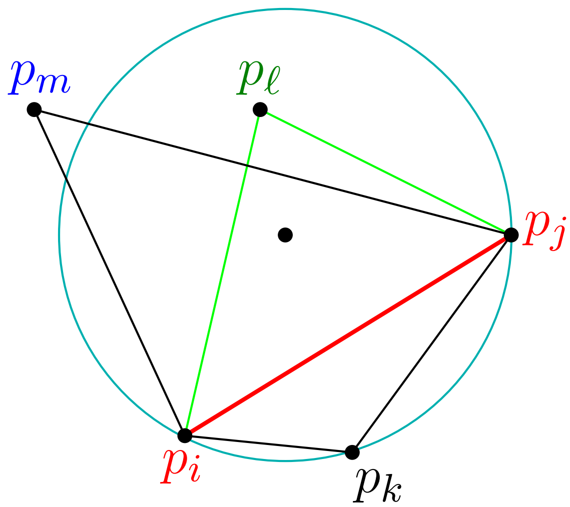


Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Seja T uma triangulação legal. Por contradição, suponha que T não é de Delaunay.

Por (a), existe $p_i p_j$ tal que...

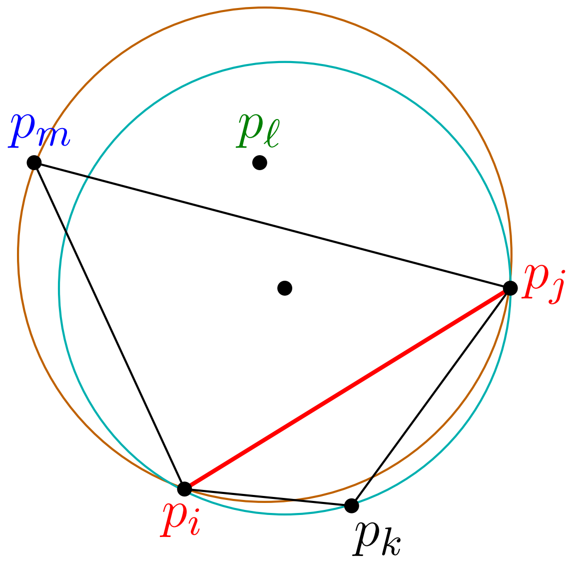


Escolha $p_i p_j$ de modo que $\angle p_i p_\ell p_j$ seja máximo.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

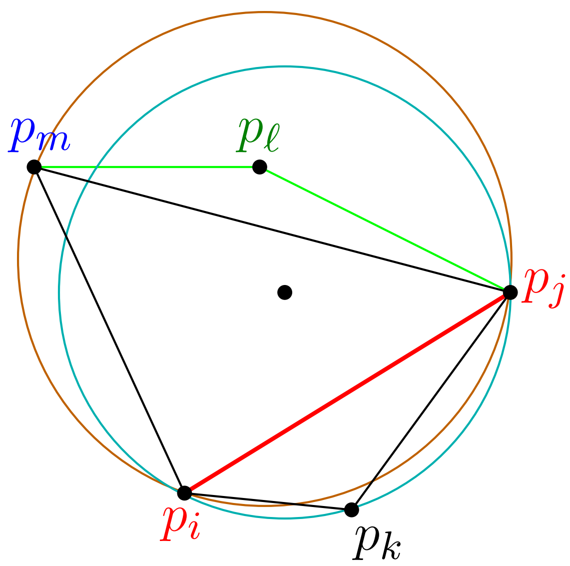
Prova. ...
Mas então p_ℓ está dentro do círculo de $p_i p_j p_m$...



Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. ...
Mas então p_ℓ está dentro do círculo de $p_i p_j p_m$...



e $\angle p_m p_\ell p_j > \angle p_i p_\ell p_j$, uma contradição.

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Em particular, se P está em posição geral,
$DG(P)$ é a única triangulação ângulo-ótima de P!

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

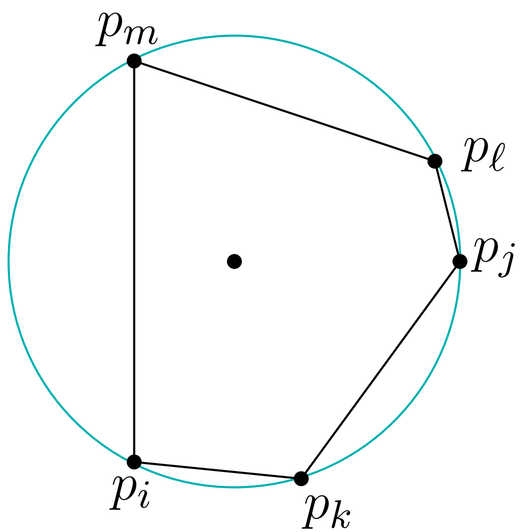
Em particular, se P está em posição geral,
$DG(P)$ é a única triangulação ângulo-ótima de P!

Caso P não esteja em posição geral,
suas triangulações de Delaunay têm seus vetores de ângulos parecidos, e com a primeira coordenada igual.

Ou seja,
triangulações de Delaunay maximizam o ângulo mínimo!

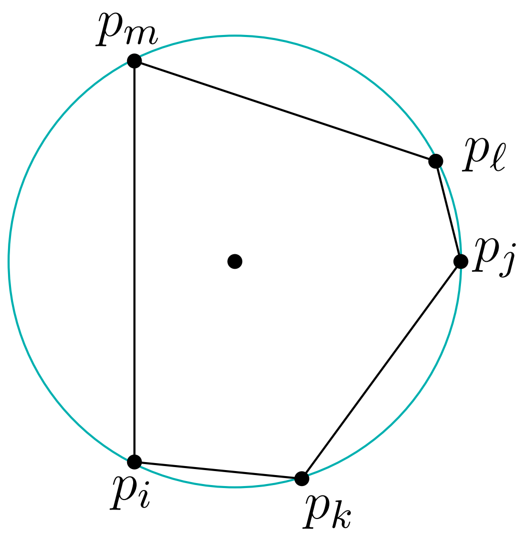
Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.



Ângulo mínimo igual

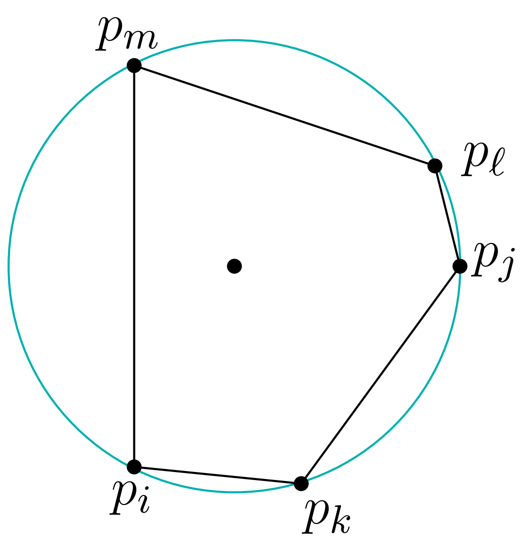
Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.



Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.

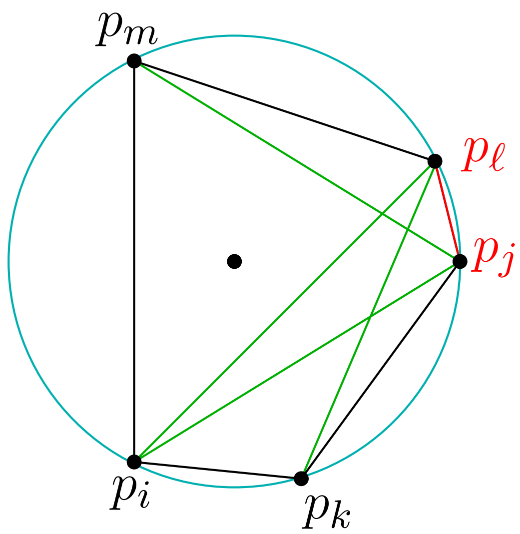


Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.

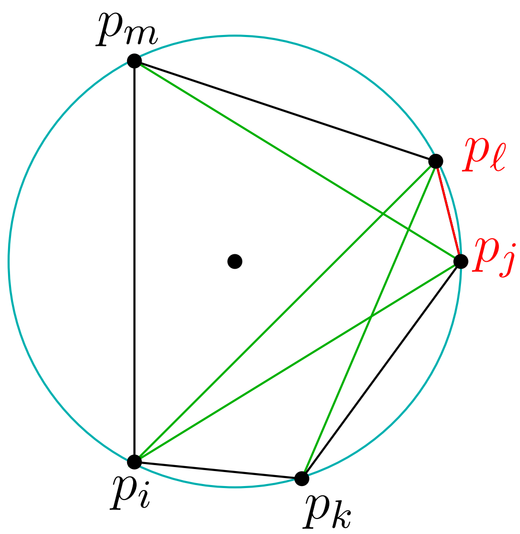


Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.



Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

Triangulações de Delaunay têm o mesmo ângulo mínimo!

Muitos ângulos iguais

Cada face com ℓ vértices contribui com $\ell - 2$ triângulos, e $3(\ell - 2)$ ângulos.

Muitos ângulos iguais

Cada face com ℓ vértices contribui com $\ell - 2$ triângulos, e $3(\ell - 2)$ ângulos.

Cada lado do polígono contribui com o mesmo ângulo. Então ℓ destes $3(\ell - 2)$ coincidem e

$$3(\ell - 2) - \ell \;=\; 2\ell - 6$$

podem diferir.

Muitos ângulos iguais

Cada face com ℓ vértices contribui com $\ell - 2$ triângulos, e $3(\ell - 2)$ ângulos.

Cada lado do polígono contribui com o mesmo ângulo. Então ℓ destes $3(\ell - 2)$ coincidem e

$$3(\ell - 2) - \ell \ = \ 2\ell - 6$$

podem diferir.

Somando tudo,

$$\sum (2\ell - 6) = 4m - 6f$$

onde m é o número de arestas e f o número de faces internas de $DG(P)$.

Muitos ângulos iguais

Se $DG(P)$ tem m arestas e f faces internas, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2k + 2x$ ângulos distintos, onde k é o número de pontos na borda do fecho convexo e x é o número de arestas faltando para $DG(P)$ ser uma triangulação de P.

Muitos ângulos iguais

Se $DG(P)$ tem m arestas e f faces internas, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2k + 2x$ ângulos distintos, onde k é o número de pontos na borda do fecho convexo e x é o número de arestas faltando para $DG(P)$ ser uma triangulação de P.

Lembre-se que $m = 3n - 3 - k - x$ e $f = 2n - 2 - k - x$.

Muitos ângulos iguais

Se $DG(P)$ tem m arestas e f faces internas, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2k + 2x$ ângulos distintos, onde k é o número de pontos na borda do fecho convexo e x é o número de arestas faltando para $DG(P)$ ser uma triangulação de P.

Lembre-se que $m = 3n - 3 - k - x$ e $f = 2n - 2 - k - x$.

Fazendo a conta,

$$4m - 6f \;=\; 4(3n - 3 - k - x) - 6(2n - 2 - k - x) \;=\; 2k + 2x.$$

Algoritmo incremental

Considere uma permutação aleatória dos pontos de P.

O algoritmo processa os pontos um a um, e mantém uma triangulação de Delaunay dos pontos já processados.

Algoritmo incremental

Considere uma permutação aleatória dos pontos de P.

O algoritmo processa os pontos um a um, e mantém uma triangulação de Delaunay dos pontos já processados.

Ao processar um ponto, encontra em qual triângulo da triangulação corrente este ponto está, subdivide este triângulo (se ele estiver em dois triângulos, subdivide os dois), obtendo uma nova triangulação.

Algoritmo incremental

Considere uma permutação aleatória dos pontos de P.

O algoritmo processa os pontos um a um, e mantém uma triangulação de Delaunay dos pontos já processados.

Ao processar um ponto, encontra em qual triângulo da triangulação corrente este ponto está, subdivide este triângulo (se ele estiver em dois triângulos, subdivide os dois), obtendo uma nova triangulação.

Verifica arestas que podem ter se tornado ilegais, trocando-as se for o caso.

Mais detalhes na aula.

Algoritmo incremental

Utiliza uma ED para auxiliar na determinação do triângulo que contém o ponto.

Algoritmo incremental

Utiliza uma ED para auxiliar na determinação do triângulo que contém o ponto.

Trata-se de um DAG com um nó para cada triângulo de alguma das triângulações.

As folhas do DAG são os triângulos da triangulação corrente, enquanto que os nós internos são triângulos que foram destruídos.

Algoritmo incremental

Utiliza uma ED para auxiliar na determinação do triângulo que contém o ponto.

Trata-se de um DAG com um nó para cada triângulo de alguma das triângulações.

As folhas do DAG são os triângulos da triangulação corrente, enquanto que os nós internos são triângulos que foram destruídos.

O tamanho esperado desse DAG é $\mathrm{O}(n)$.

Algoritmo incremental

Utiliza uma ED para auxiliar na determinação do triângulo que contém o ponto.

Trata-se de um DAG com um nó para cada triângulo de alguma das triângulações.

As folhas do DAG são os triângulos da triangulação corrente, enquanto que os nós internos são triângulos que foram destruídos.

O tamanho esperado desse DAG é $\mathrm{O}(n)$.

Consumo esperado de tempo: $\mathrm{O}(n \lg n)$

Consumo esperado de espaço: $\mathrm{O}(n)$