Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

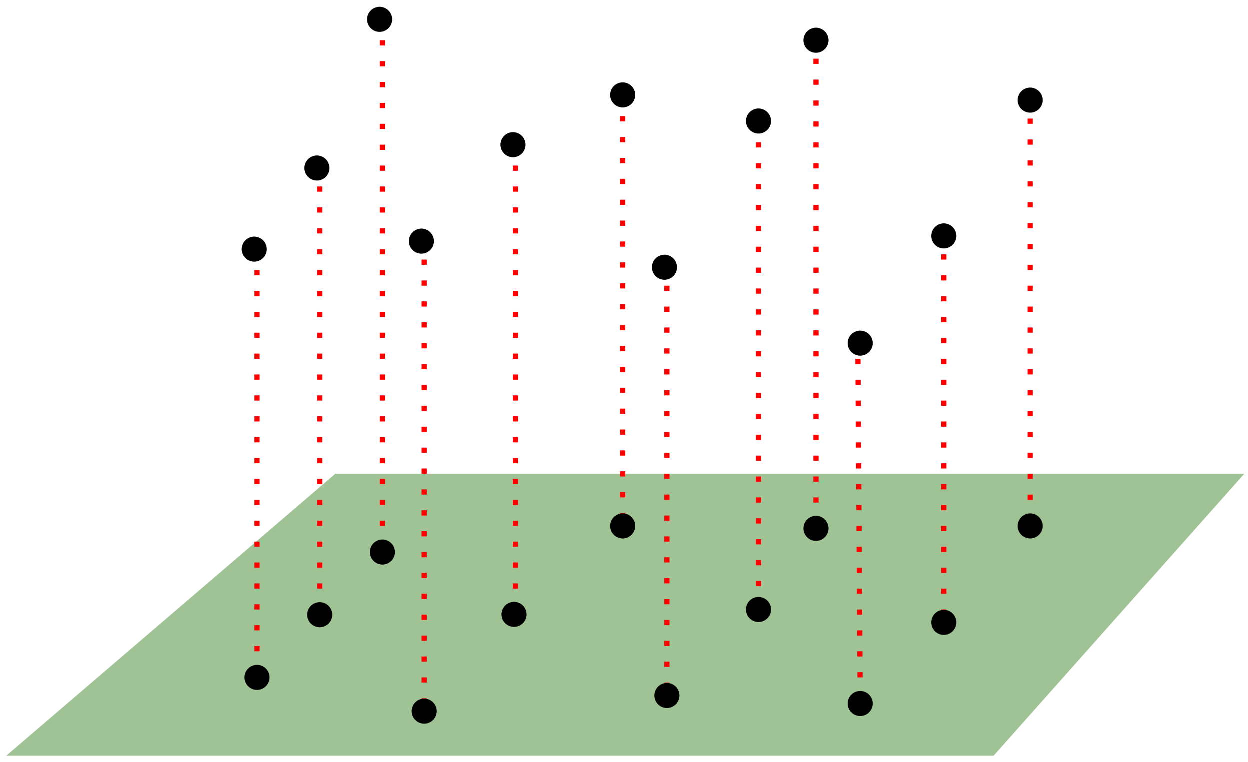
Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

http://www.ime.usp.br/~cris/

segundo semestre de 2014

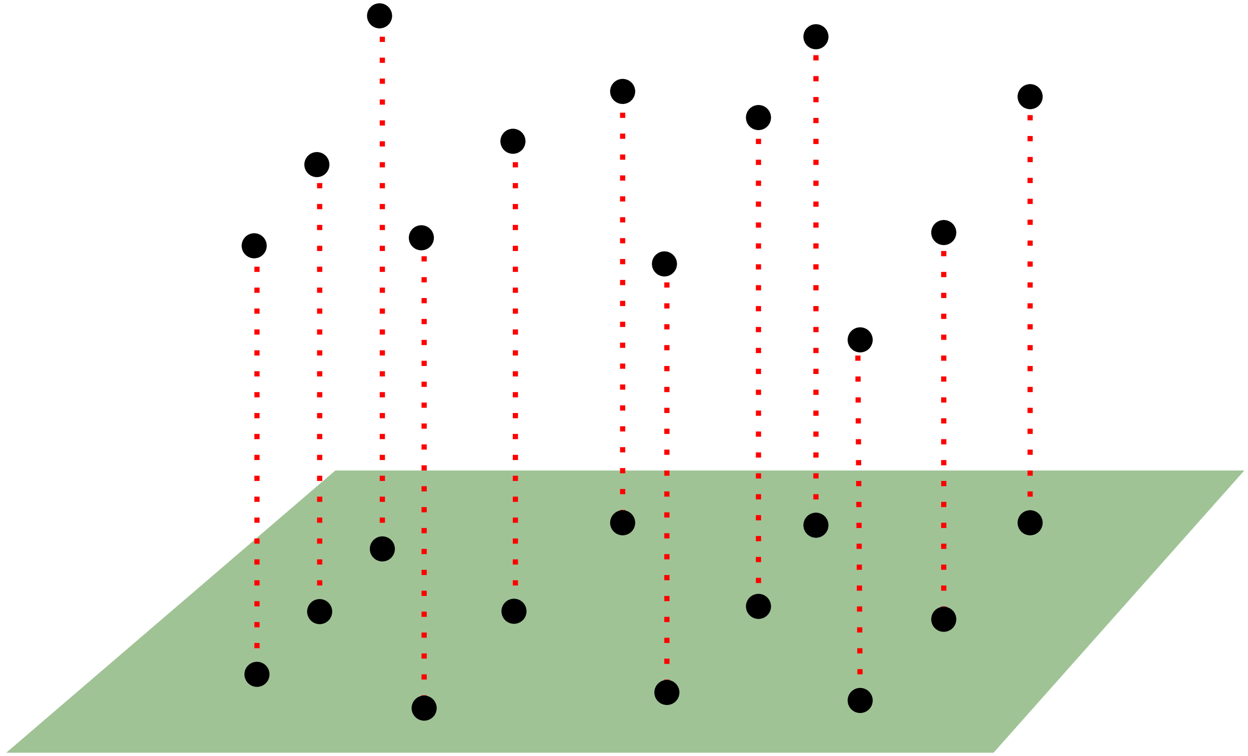
Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

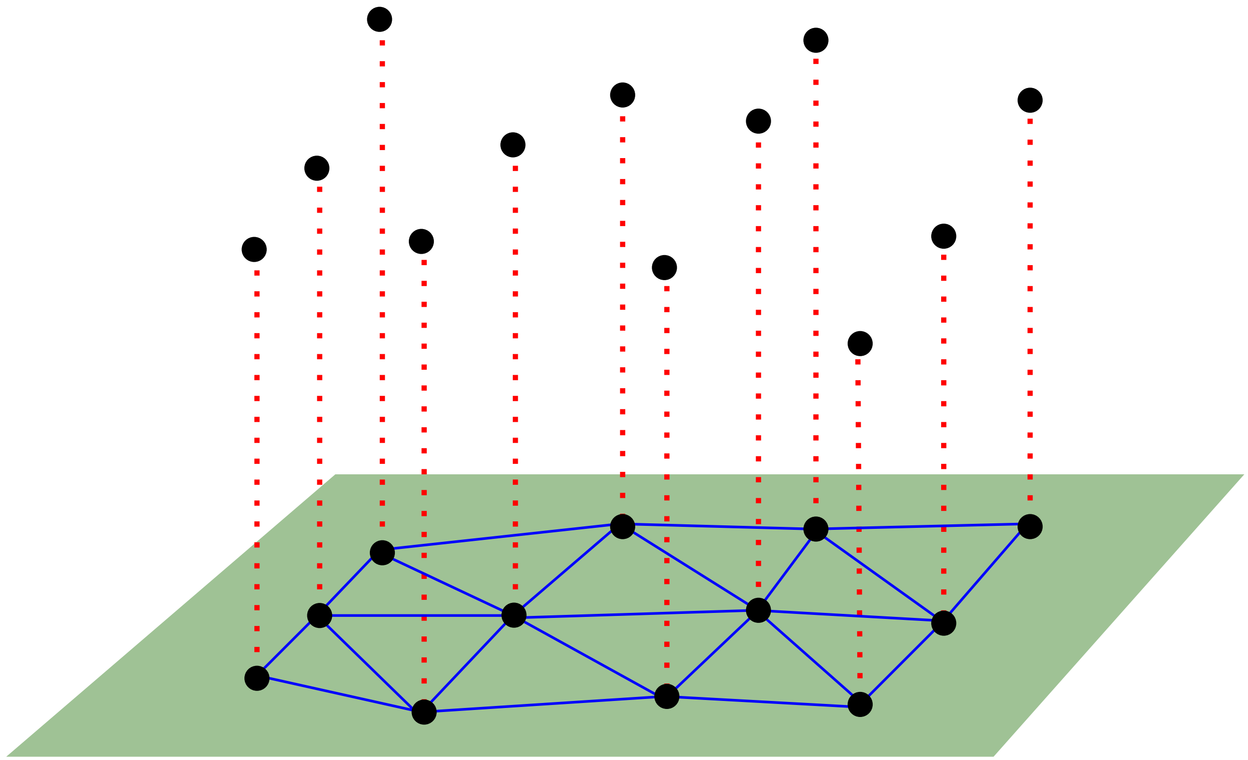


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



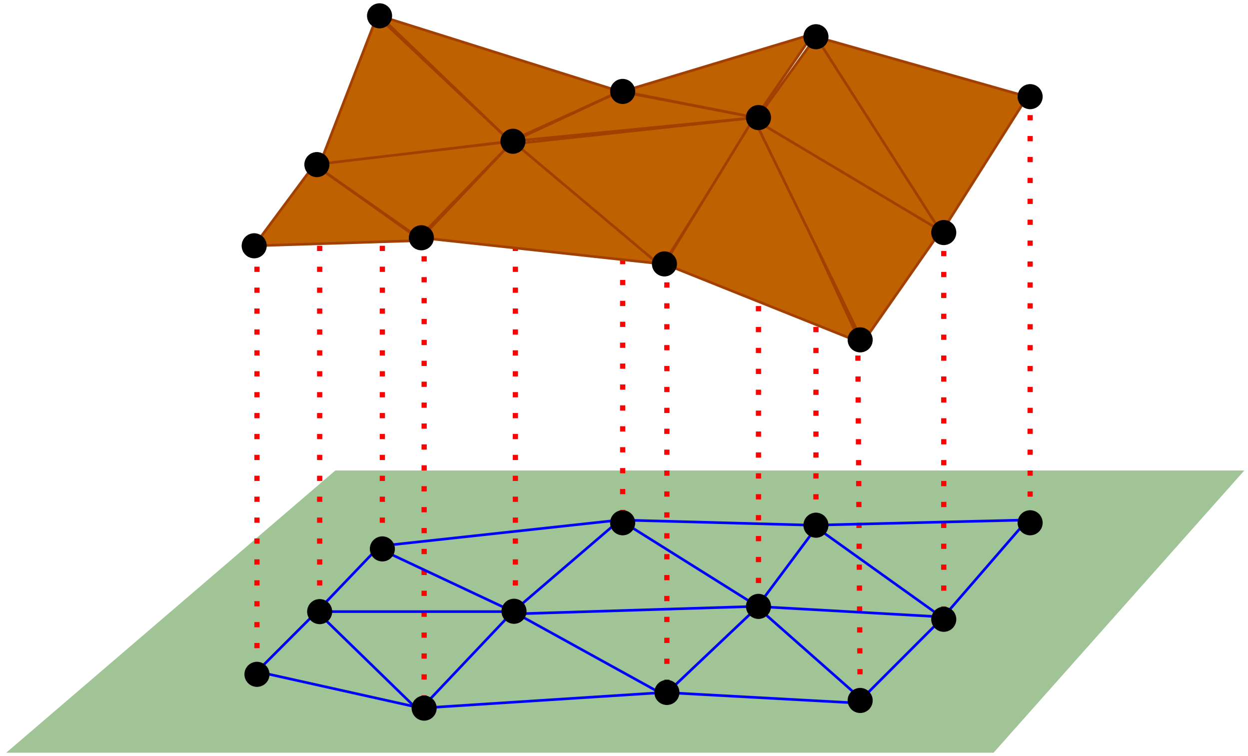
Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Triangularizamos a projeção no plano e...

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

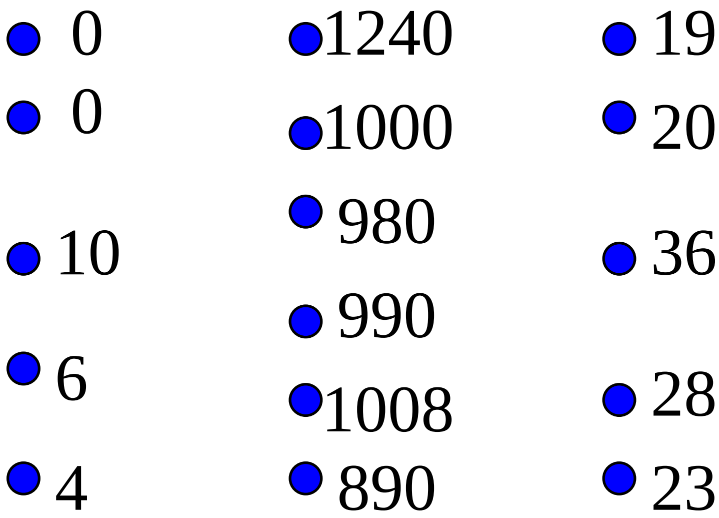


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

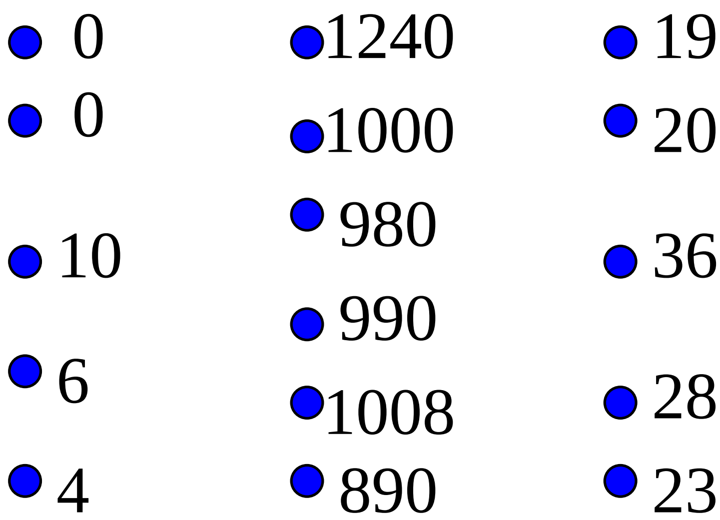
Como fazer?

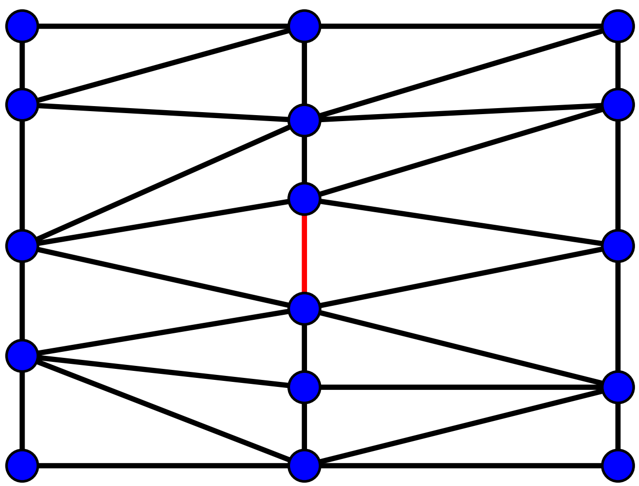
Triangularizamos a projeção no plano e levantamos!

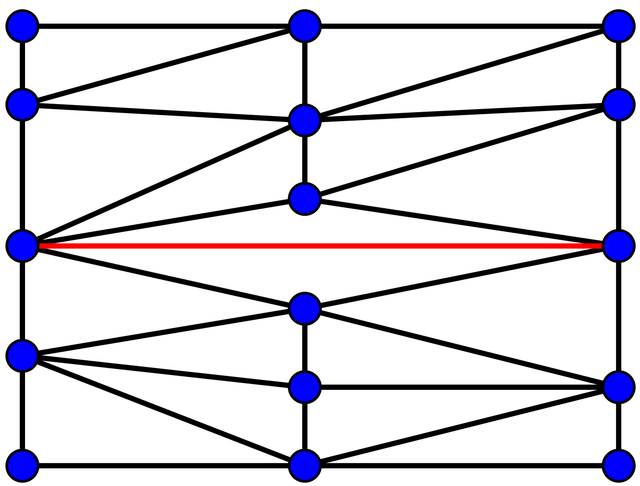
Qual triangulação é melhor?



Qual triangulação é melhor?







Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T
onde os α_i são os ângulos internos
dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

T é ângulo-ótima
se $A(T) \geq A(T')$ para toda triangulação T' de P.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano,
não todos colineares.

Seja k o número de vértices na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano,
não todos colineares.

Seja k o número de vértices na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem $2n - 2 - k$ triangulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano,
não todos colineares.

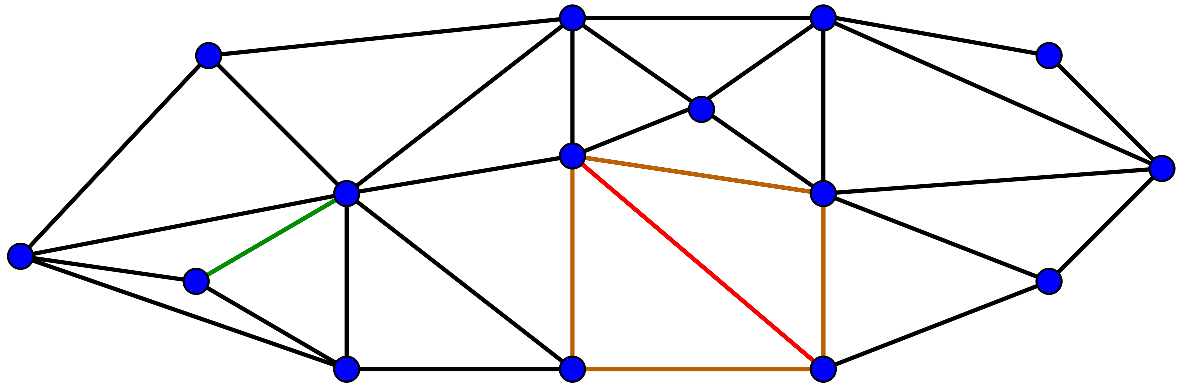
Seja k o número de vértices na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem $2n - 2 - k$ triangulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Prova feita em aula.

Triangulação legal: correção

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.

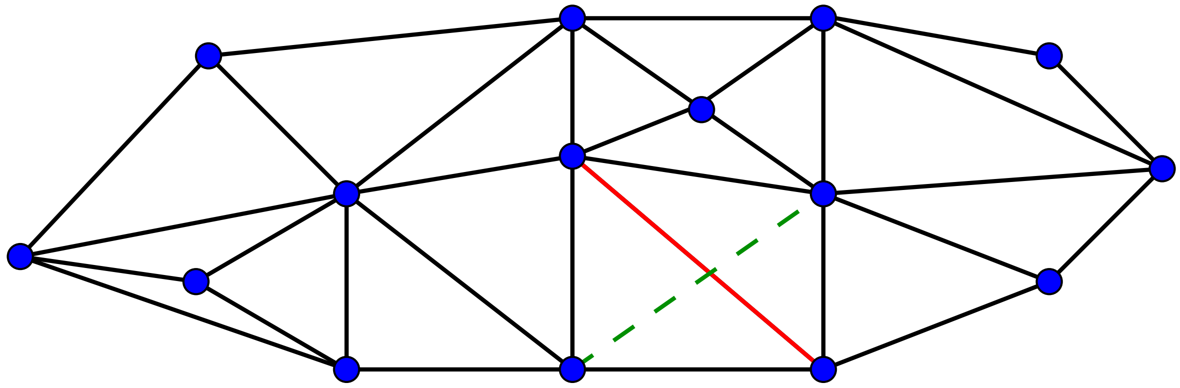


e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

(a aresta verde não satisfaz esta condição)

Triangulação legal: correção

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

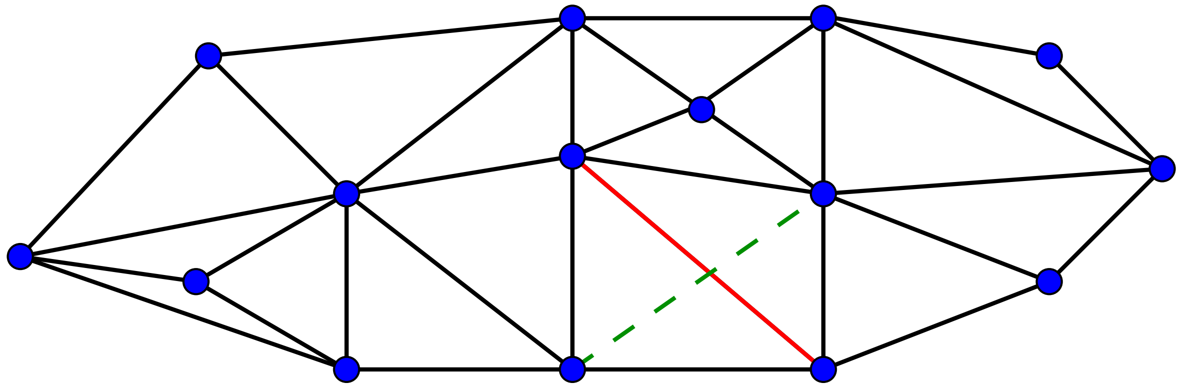
f: outra diagonal do quadrilátero de e

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

Triangulação legal: correção

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T que a compartilham formam um quadrilátero convexo

f: outra diagonal do quadrilátero de e

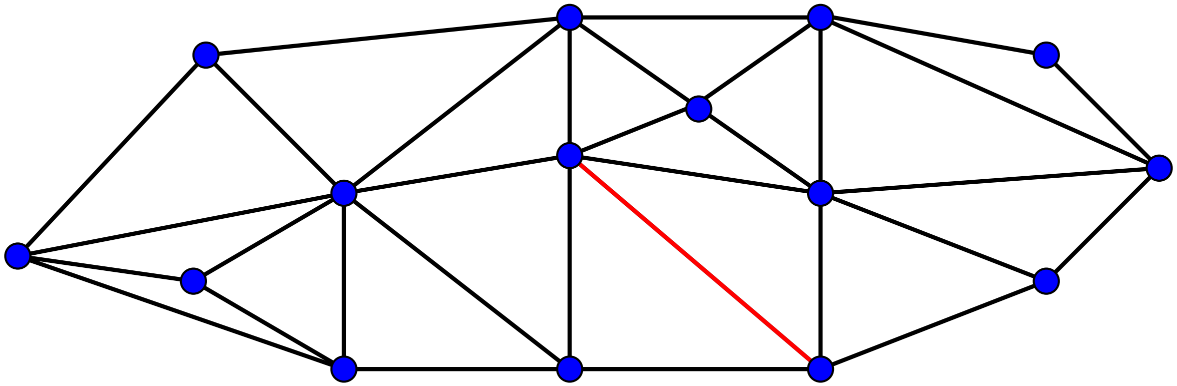
$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

T é legal se não tem arestas ilegais

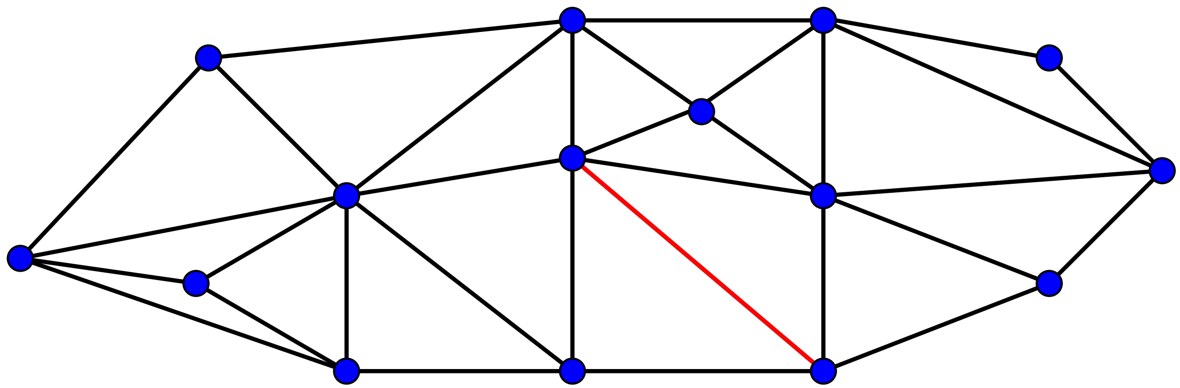
Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

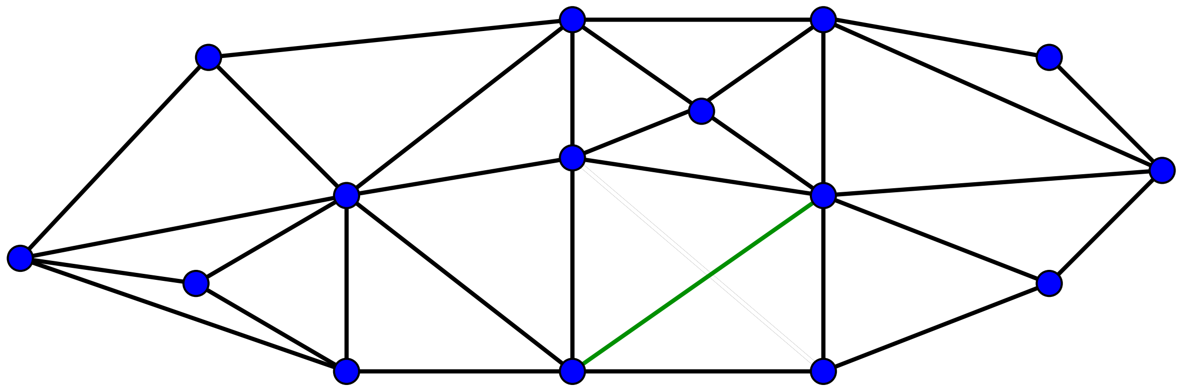


Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

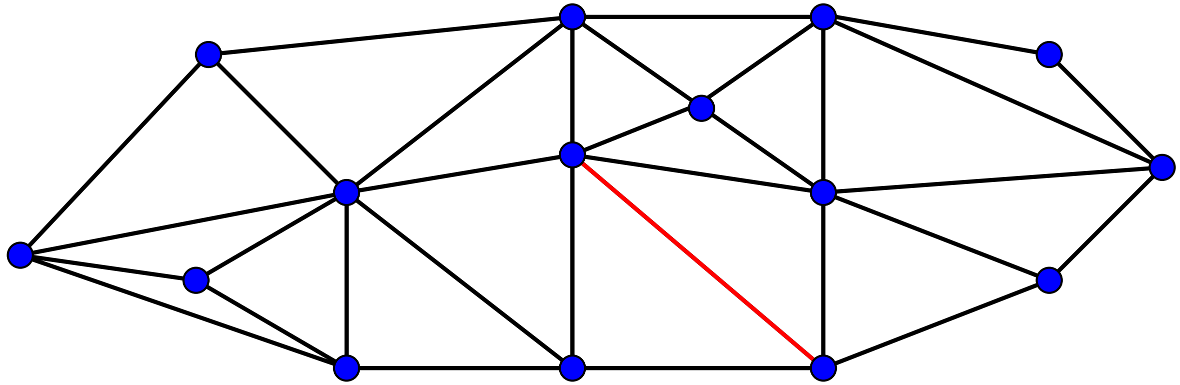


T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.

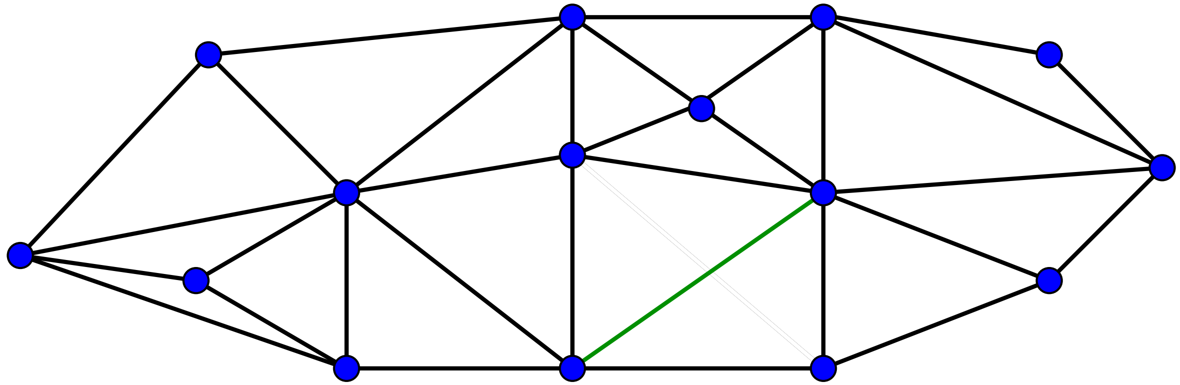


Triangulação legal

e: aresta ilegal de T



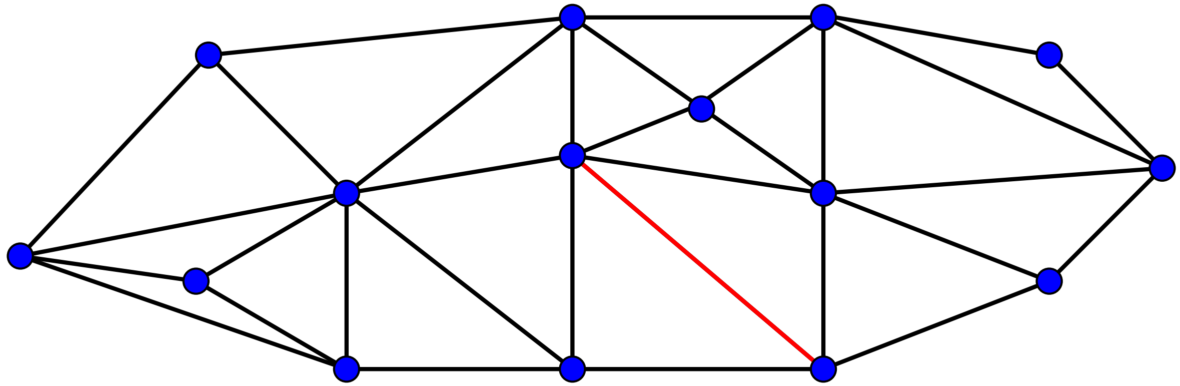
T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.



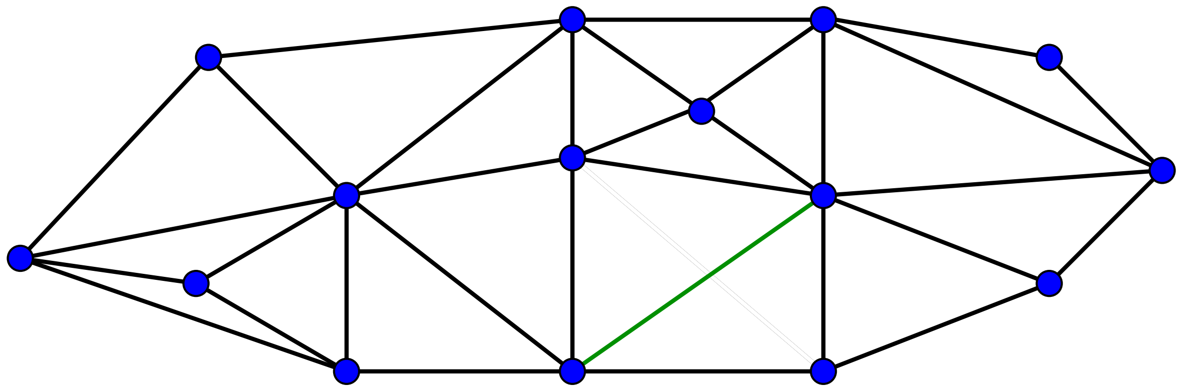
Vale que $A(T') > A(T)$.

Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

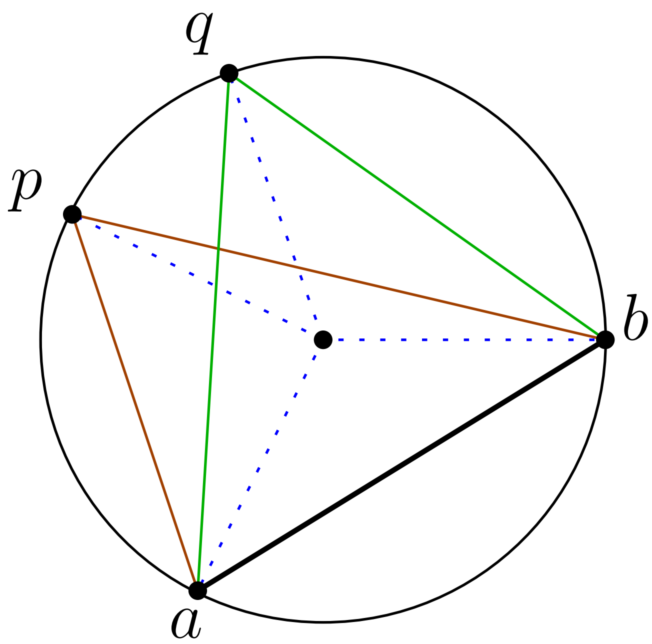


T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.



Vale que $A(T') > A(T)$. Então existe triangulação legal!

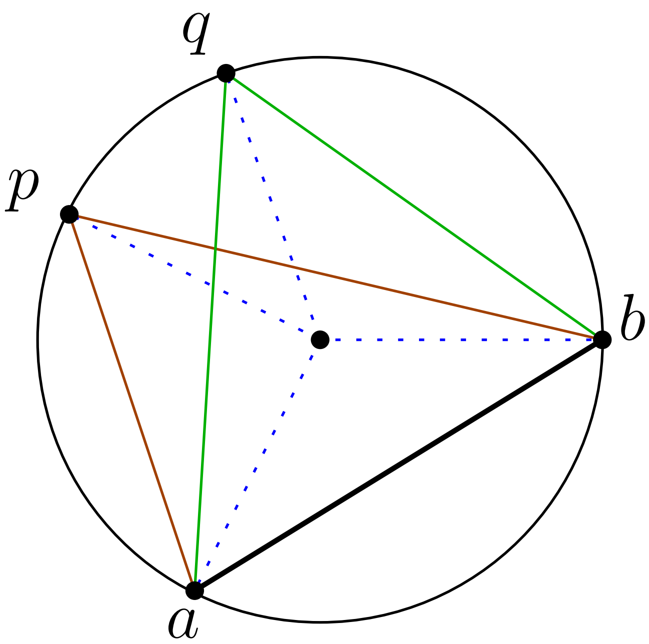
Um pouco de geometria

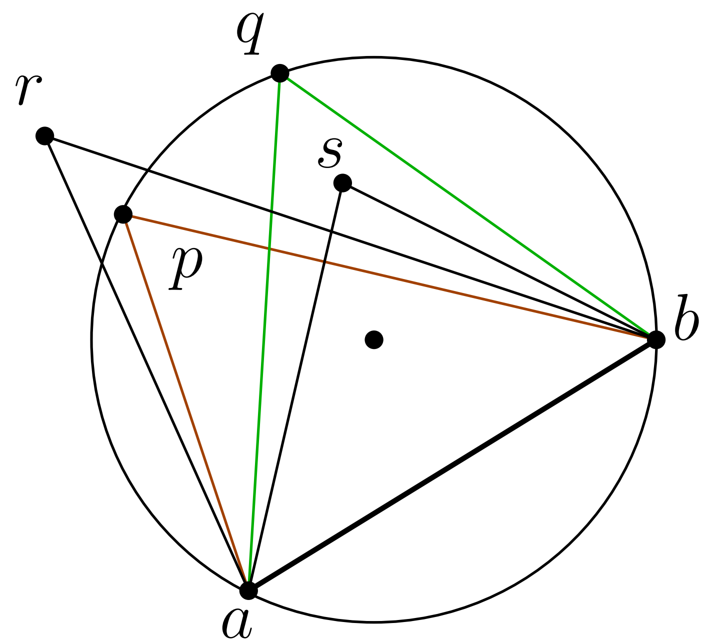


$$\angle apb \ = \ \angle aqb$$

Prova feita na aula.

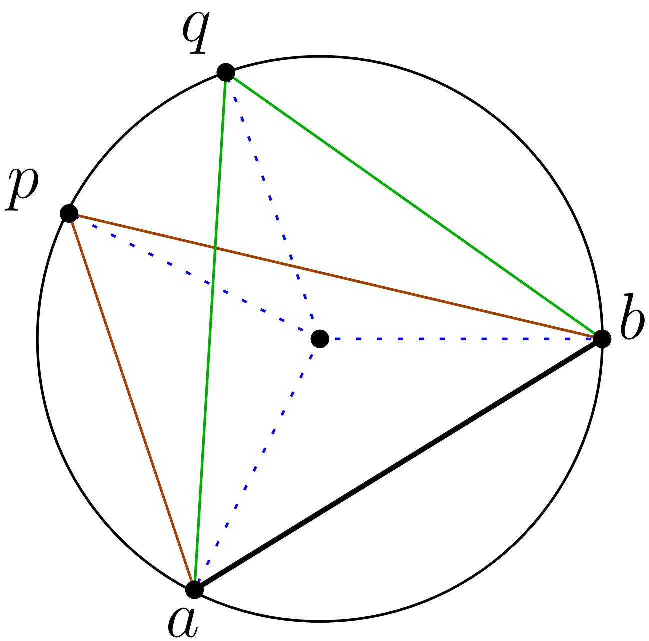
Um pouco de geometria

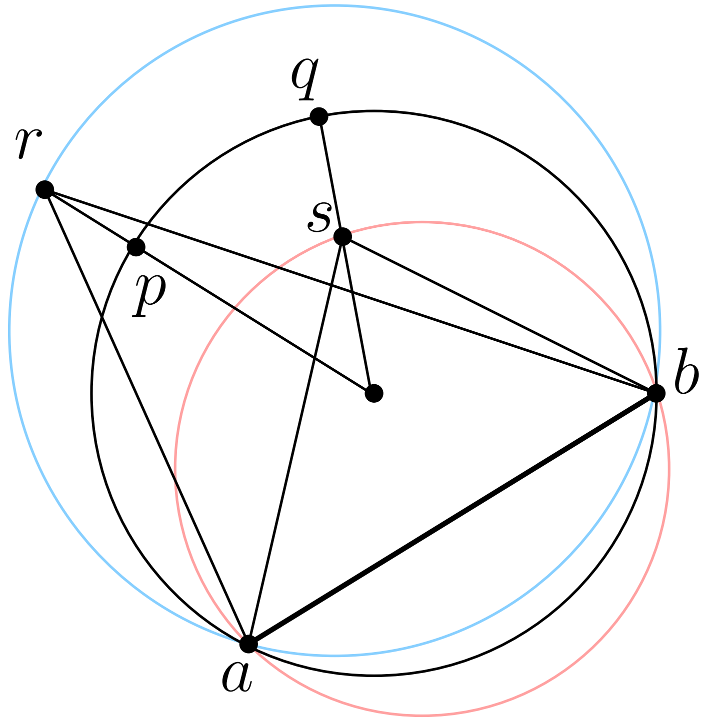




$$\angle arb \ < \ \angle apb \ = \ \angle aqb \ < \ \angle asb$$

Um pouco de geometria

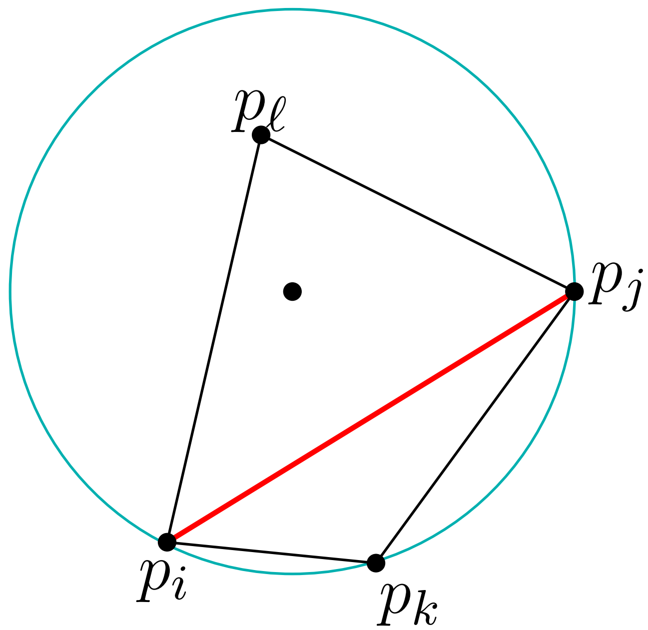




$$\angle arb \; < \; \angle apb \; = \; \angle aqb \; < \; \angle asb$$

Aresta ilegal

Aresta interna $e = p_i p_j$ e
p_k e p_ℓ pontas dos triângulos que compartilham e.



e é ilegal sse

p_ℓ está no interior do círculo determinado por $p_i p_j p_k$.

Prova feita na aula.