

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

`http://www.ime.usp.br/~cris/`

segundo semestre de 2014

Representação de mapas retilineares

Como acoplar o algoritmo de triangulação de polígonos monótonos ao algoritmo de Lee e Preparata?

Representação de mapas retilineares

Como acoplar o algoritmo de triangulação de polígonos monótonos ao algoritmo de Lee e Preparata?

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta aparece duas vezes nesta ED: uma vez em cada direção, uma cópia apontando para a outra (*twins* ou *half-edges*).

Representação de mapas retilineares

Como acoplar o algoritmo de triangulação de polígonos monótonos ao algoritmo de Lee e Preparata?

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta aparece duas vezes nesta ED: uma vez em cada direção, uma cópia apontando para a outra (*twins* ou *half-edges*).

Cada meia-aresta está em uma **face** do mapa, e aponta para a próxima meia-aresta e a anterior na face.

Representação de mapas retilineares

Como acoplar o algoritmo de triangulação de polígonos monótonos ao algoritmo de Lee e Preparata?

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta aparece duas vezes nesta ED: uma vez em cada direção, uma cópia apontando para a outra (*twins* ou *half-edges*).

Cada meia-aresta está em uma **face** do mapa, e aponta para a próxima meia-aresta e a anterior na face.

Pode se manter registro para cada face ou vértice do mapa. Cada face/vértice tem apontador para uma das (meia-)arestas incidentes a ele.

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta $e = uv$ tem duas entrada na ED: (u, v) e (v, u) .

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta $e = uv$ tem duas entradas na ED: (u, v) e (v, u) .

Para cada meia-aresta (u, v) :

$\text{twin}(u, v) = (v, u)$

$\text{prox}(u, v)$: próxima meia-aresta na face

$\text{prev}(u, v)$: meia-aresta anterior na face

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta $e = uv$ tem duas entradas na ED: (u, v) e (v, u) .

Para cada meia-aresta (u, v) :

$$\text{twin}(u, v) = (v, u)$$

$\text{prox}(u, v)$: próxima meia-aresta na face

$\text{prev}(u, v)$: meia-aresta anterior na face

Para cada face f , apontador para uma meia-aresta da face.

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta $e = uv$ tem duas entrada na ED: (u, v) e (v, u) .

Para cada meia-aresta (u, v) :

$\text{twin}(u, v) = (v, u)$

$\text{prox}(u, v)$: próxima meia-aresta na face

$\text{prev}(u, v)$: meia-aresta anterior na face

Para cada face f , apontador para uma meia-aresta da face.

Revisite a primeira fase do algoritmo de Lee e Preparata (partição em monótonos) e a adapte para devolver essa representação da partição obtida em vez do conjunto de diagonais apenas.

Doubly-connected edge list – DCEL

Cada aresta $e = uv$ tem duas entrada na ED: (u, v) e (v, u) .

Para cada meia-aresta (u, v) :

$$\text{twin}(u, v) = (v, u)$$

$\text{prox}(u, v)$: próxima meia-aresta na face

$\text{prev}(u, v)$: meia-aresta anterior na face

Para cada face f , apontador para uma meia-aresta da face.

Revisite a primeira fase do algoritmo de Lee e Preparata (partição em monótonos) e a adapte para devolver essa representação da partição obtida em vez do conjunto de diagonais apenas.

Omita a face externa da representação, já que ela não é usada na segunda fase.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

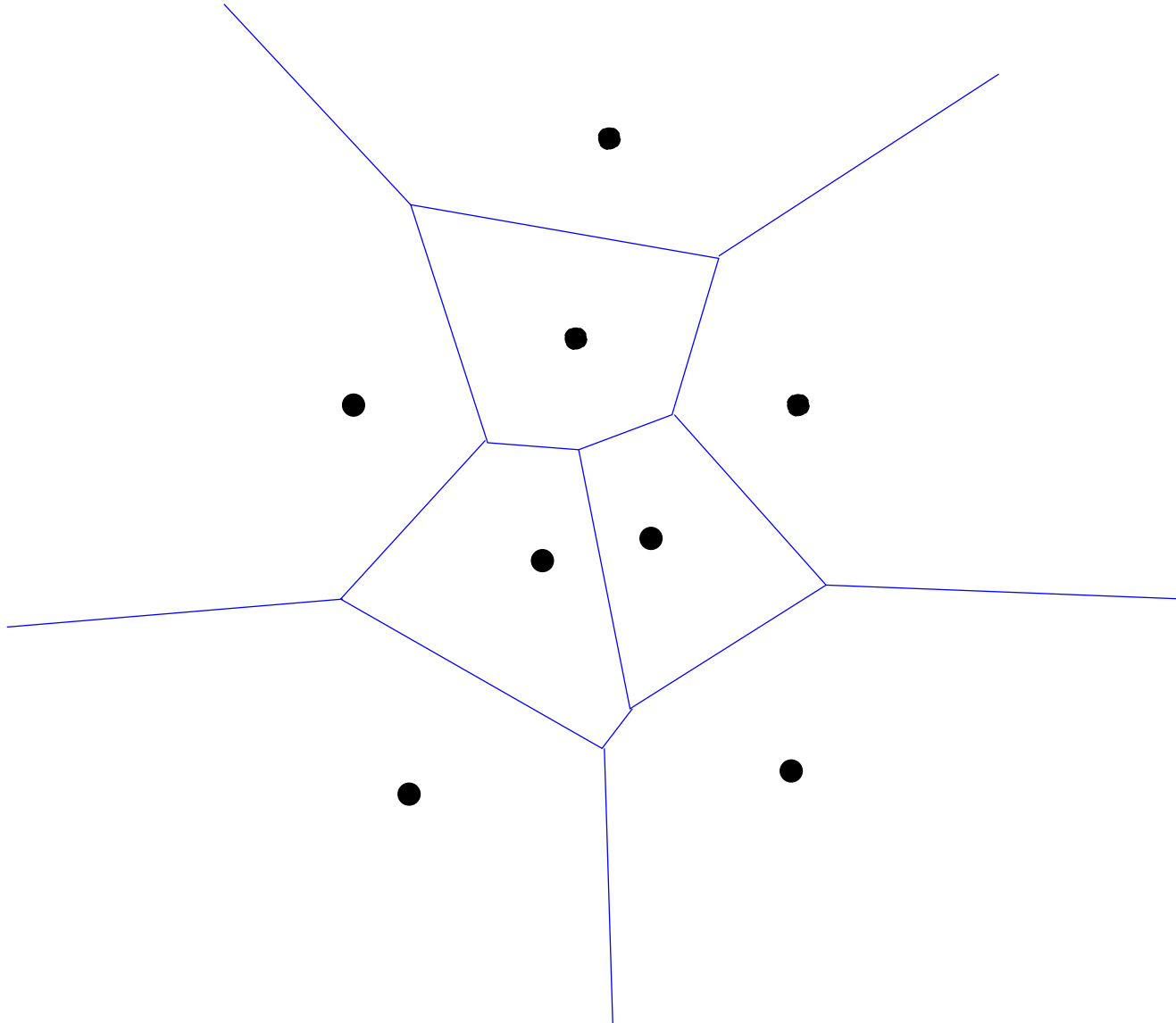
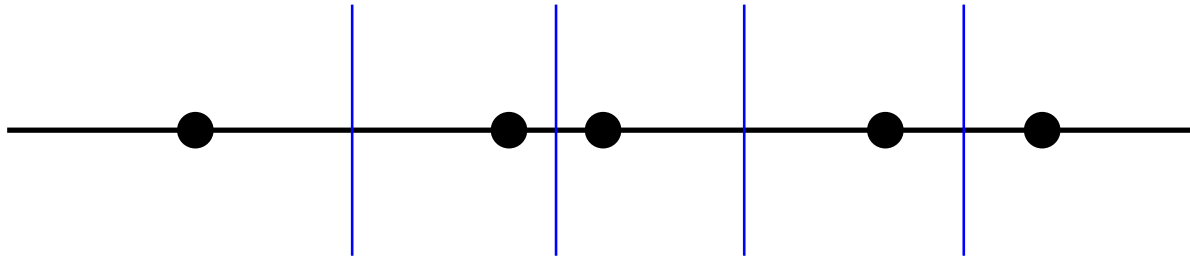


Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:

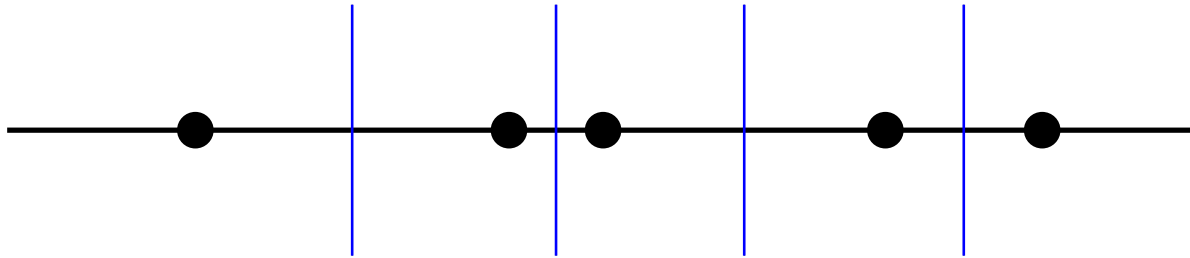


O diagrama são várias linhas paralelas.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a **região da cidade que fica mais próxima de cada agência.**

Versão unidimensional:



O diagrama são várias linhas paralelas.

Versão bidimensional:

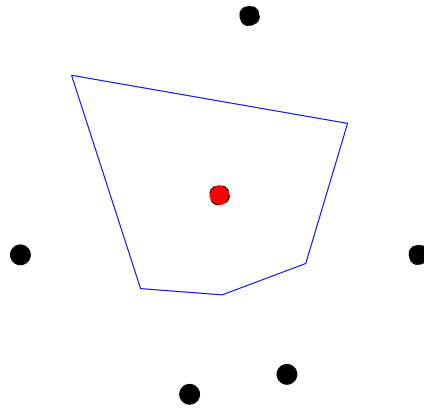
Pode ser construída em tempo $O(n \lg n)$, onde n é o número de pontos dados.

- **Divisão e conquista:** Shamos e Honye (complexo)
- **Linha de varredura:** Fortune (elegante e simples)

Notação

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

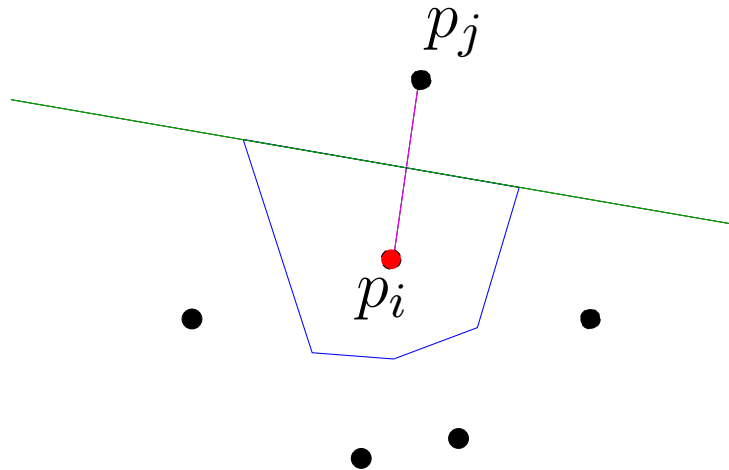
$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$



Notação

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$



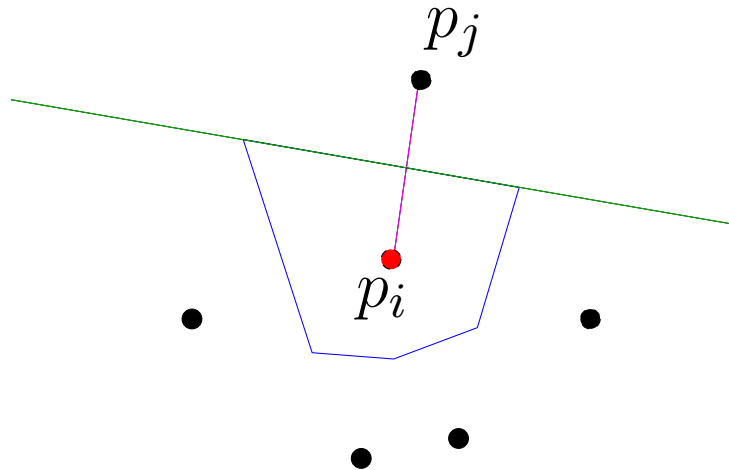
$h(p, q)$: semiplano determinado pela reta bissetora entre p e q que contém o ponto p .

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$$

Notação

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$



$h(p, q)$: semiplano determinado pela reta bissetora entre p e q que contém o ponto p .

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$$

Logo $\mathcal{V}(p_i)$ é convexo (interseção de $n - 1$ semiplanos), com no máximo $n - 1$ arestas e vértices.

Diagrama de Voronoi

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

Célula de p_i :

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$

Diagrama de Voronoi

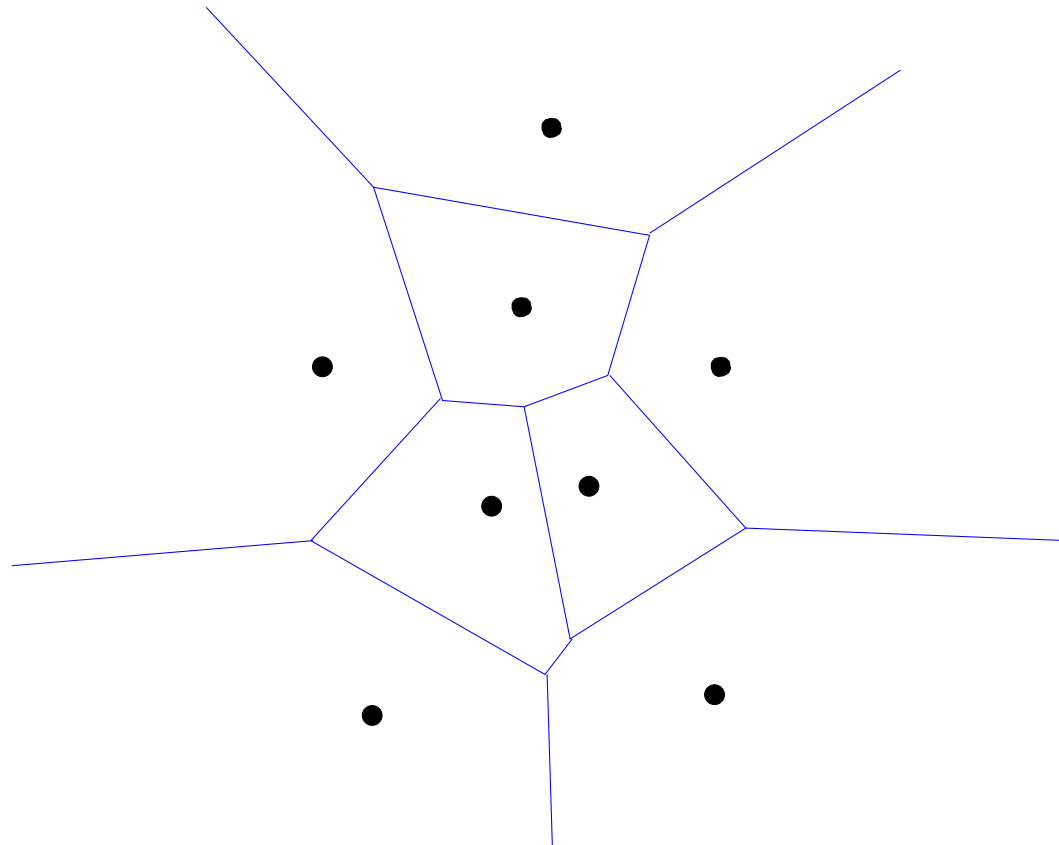
$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

Célula de p_i :

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$

Diagrama de Voronoi de P : $\text{Vor}(P)$

subdivisão do plano nas células $\mathcal{V}(p_1), \dots, \mathcal{V}(p_n)$.



Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n ?

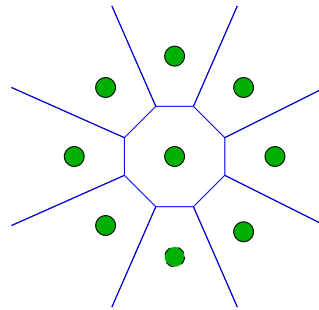
Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n ?

Cada célula tem $O(n)$ arestas.

Algumas podem ter $\Theta(n)$ arestas.



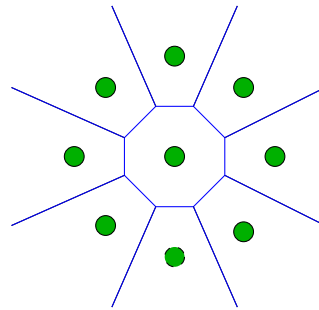
Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n ?

Cada célula tem $O(n)$ arestas.

Algumas podem ter $\Theta(n)$ arestas.



Teorema:

Para $n \geq 3$, o número de **vértices** no diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos no plano é **no máximo** $2n - 5$, e o número de **arestas** é **no máximo** $3n - 6$.

Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

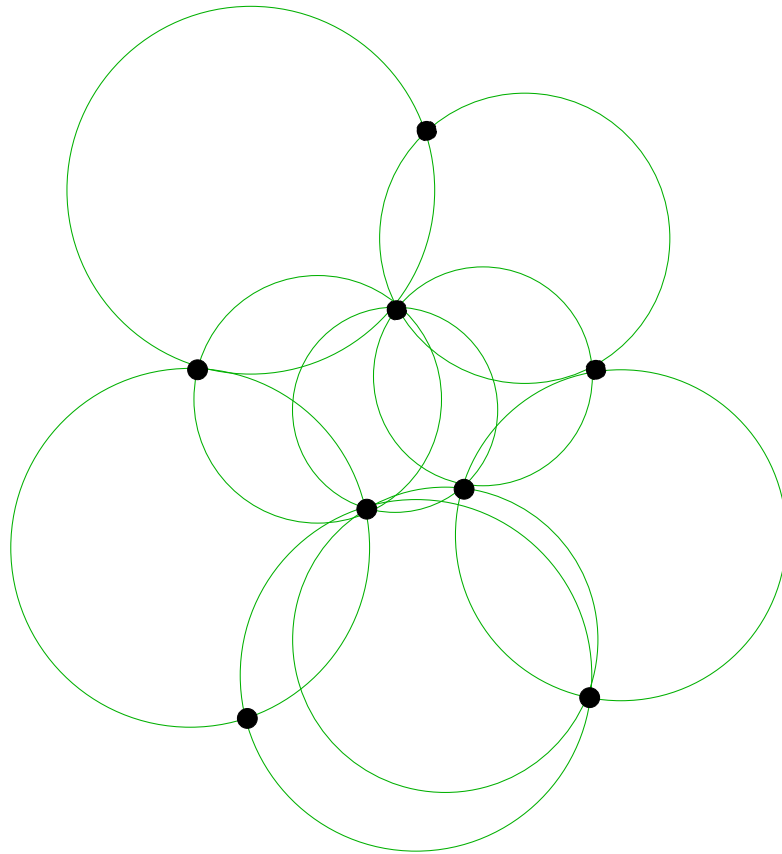
$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Teorema:

(i) Ponto q é vértice de $\text{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).

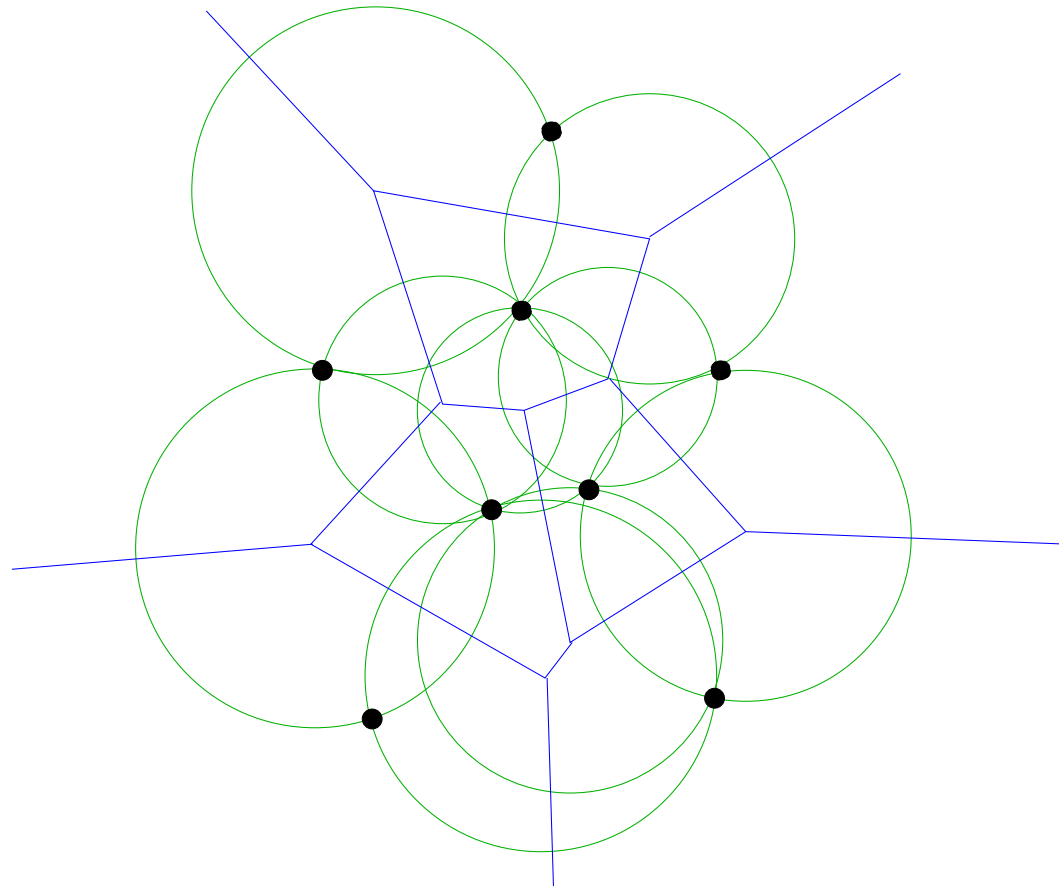


Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Teorema:

(i) Ponto q é vértice de $\text{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).

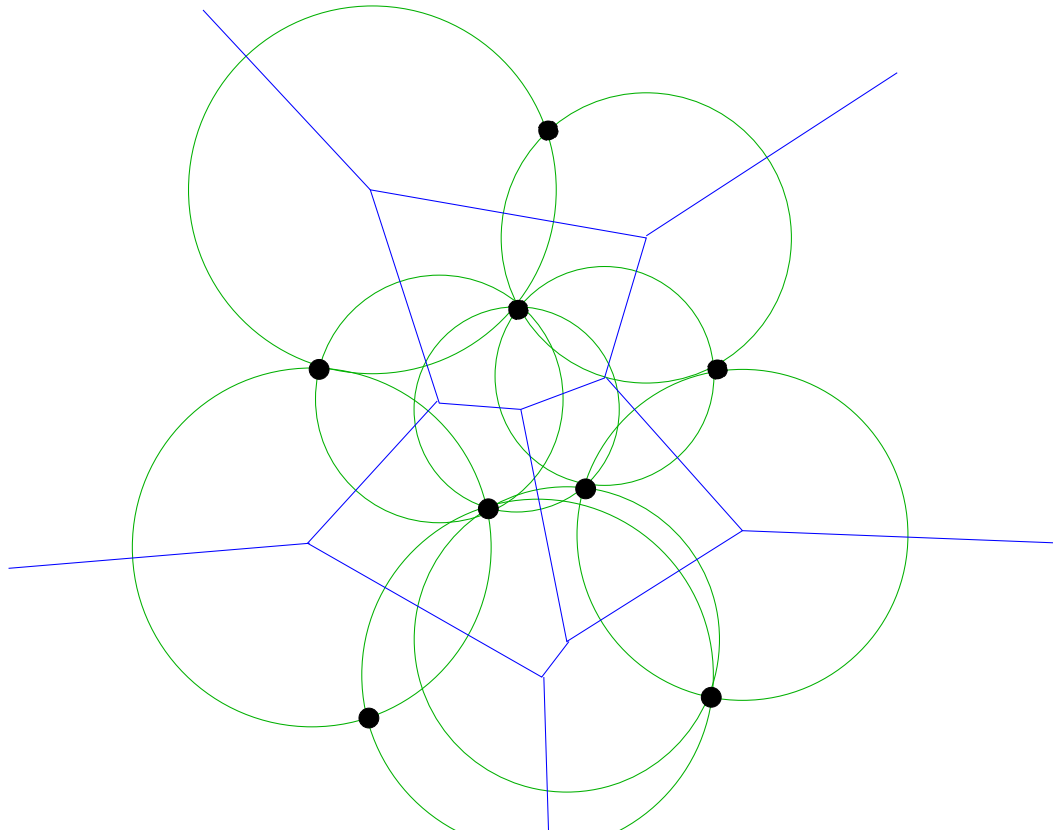


Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

Teorema:

(i) Ponto q é vértice de $\text{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).

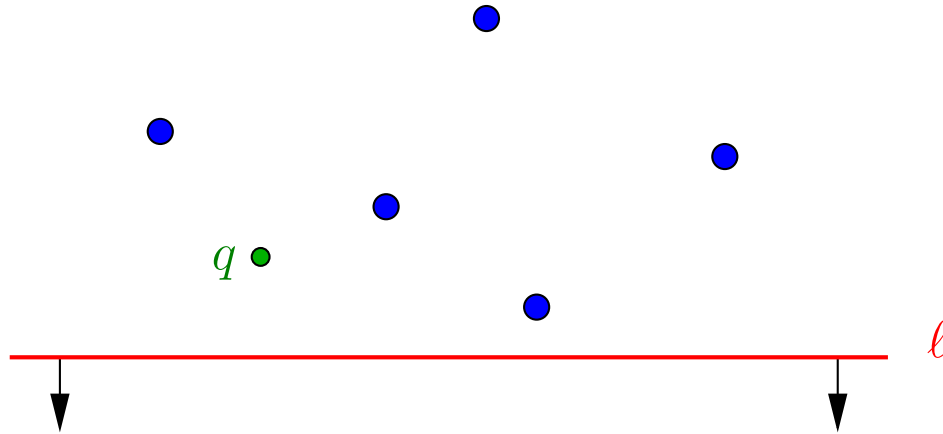
(ii) A reta bissetora entre os pontos p_i e p_j define uma aresta de $\text{Vor}(P)$ sse existe um ponto q nela tq $C_P(q)$ contém p_i e p_j e apenas estes (em sua fronteira).



Algoritmo de Fortune

ℓ^+ : semiplano acima da linha de varredura ℓ

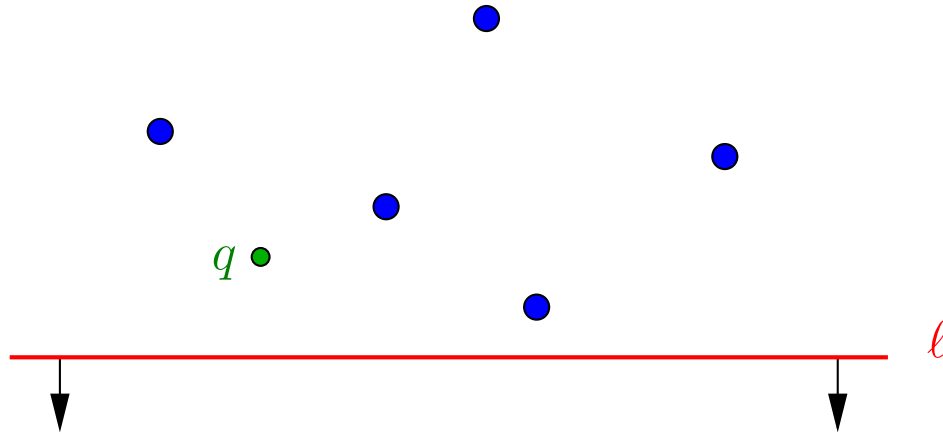
Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?



Algoritmo de Fortune

ℓ^+ : semiplano acima da linha de varredura ℓ

Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?

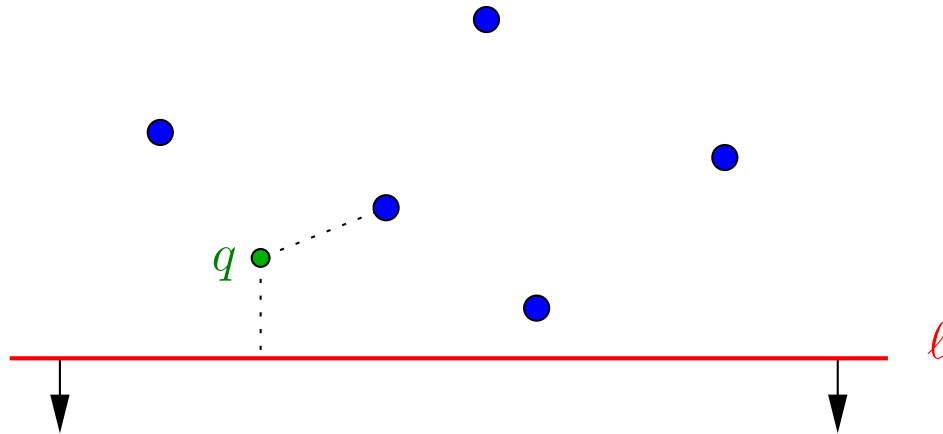


A distância de q a qualquer ponto abaixo de ℓ
é pelo menos a distância de q a ℓ .

Algoritmo de Fortune

ℓ^+ : semiplano acima da linha de varredura ℓ

Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?

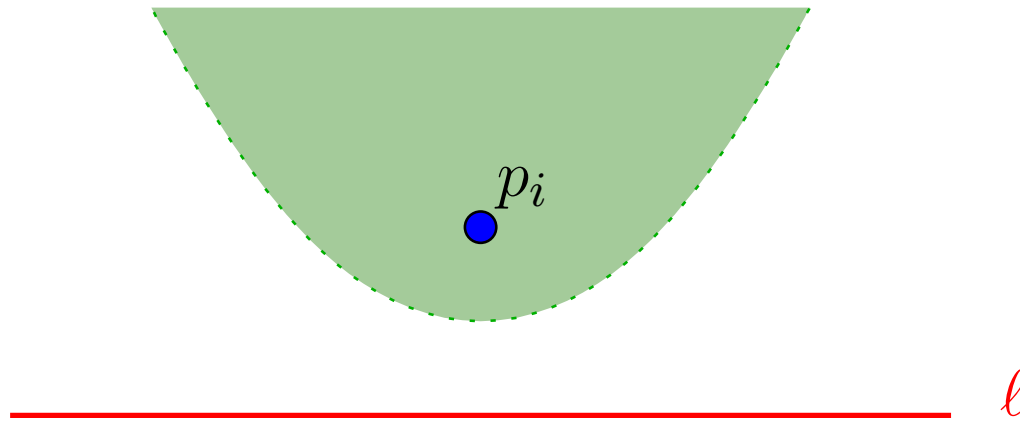


A distância de q a qualquer ponto abaixo de ℓ
é pelo menos a distância de q a ℓ .

Se q está mais próximo de um p_i acima de ℓ do que de ℓ ,
então q está em $\mathcal{V}(p_i)$.

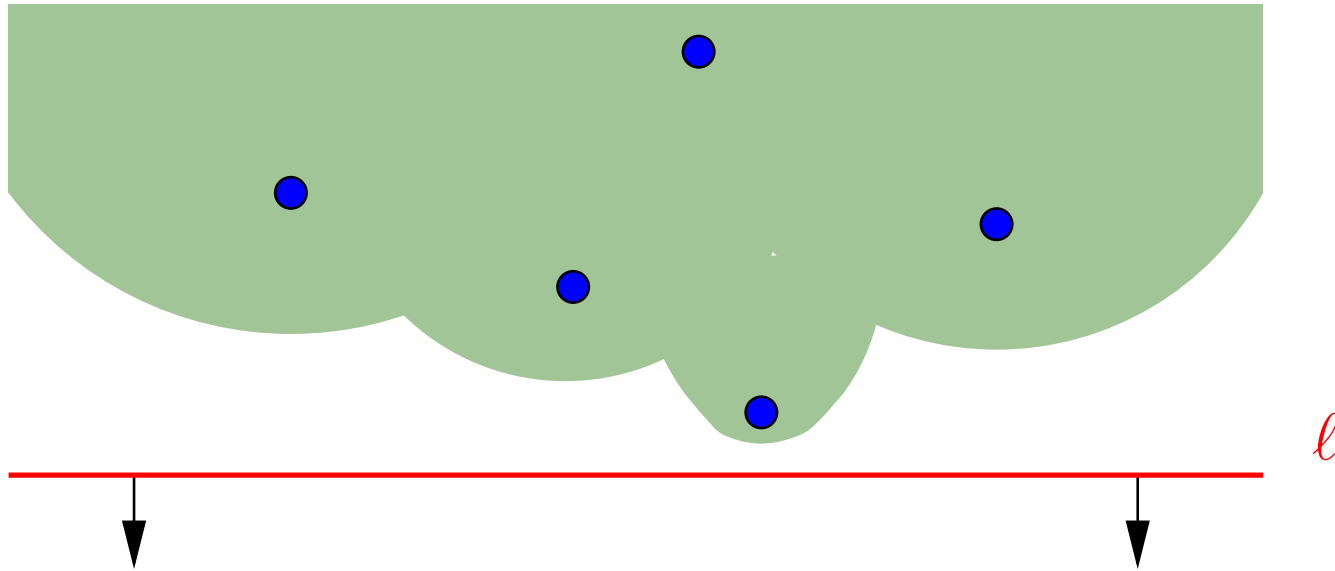
Algoritmo de Fortune

O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Algoritmo de Fortune

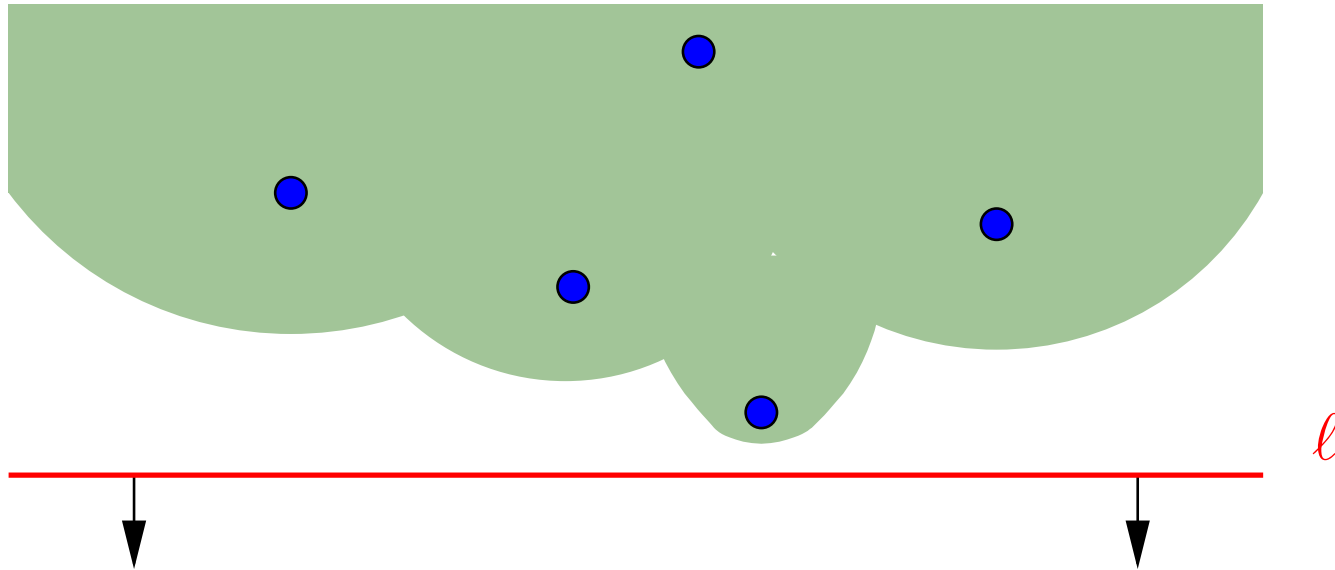
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\text{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por um **conjunto de parábolas**,

Algoritmo de Fortune

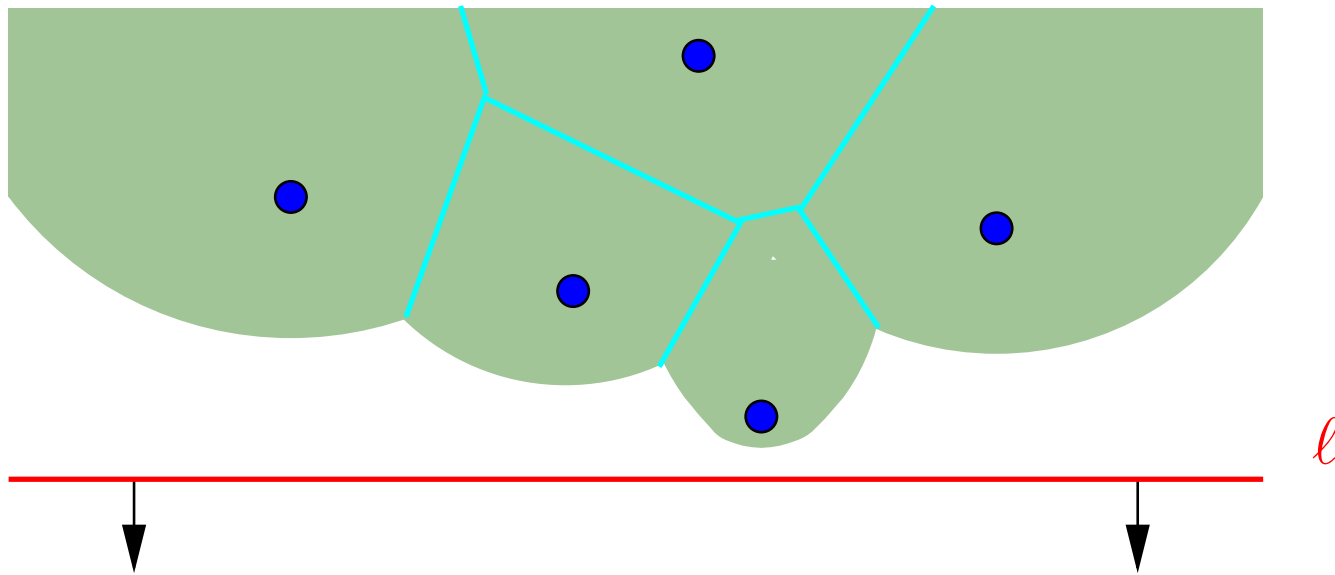
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\text{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por um **conjunto de parábolas**, ou **arcos parabolóides**, que definem a chamada **linha da praia**.

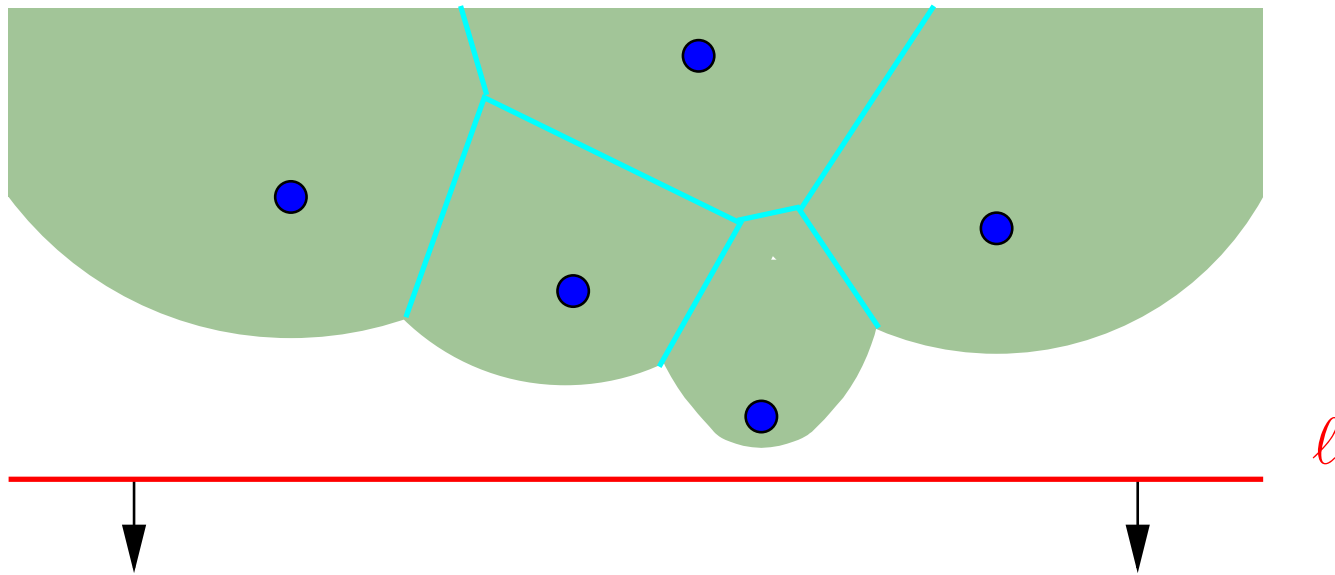
Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de $\text{Vor}(P)$.



Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de $\text{Vor}(P)$.



Esses pontos de encontro desenham $\text{Vor}(P)$.
Vejam a animação do algoritmo.

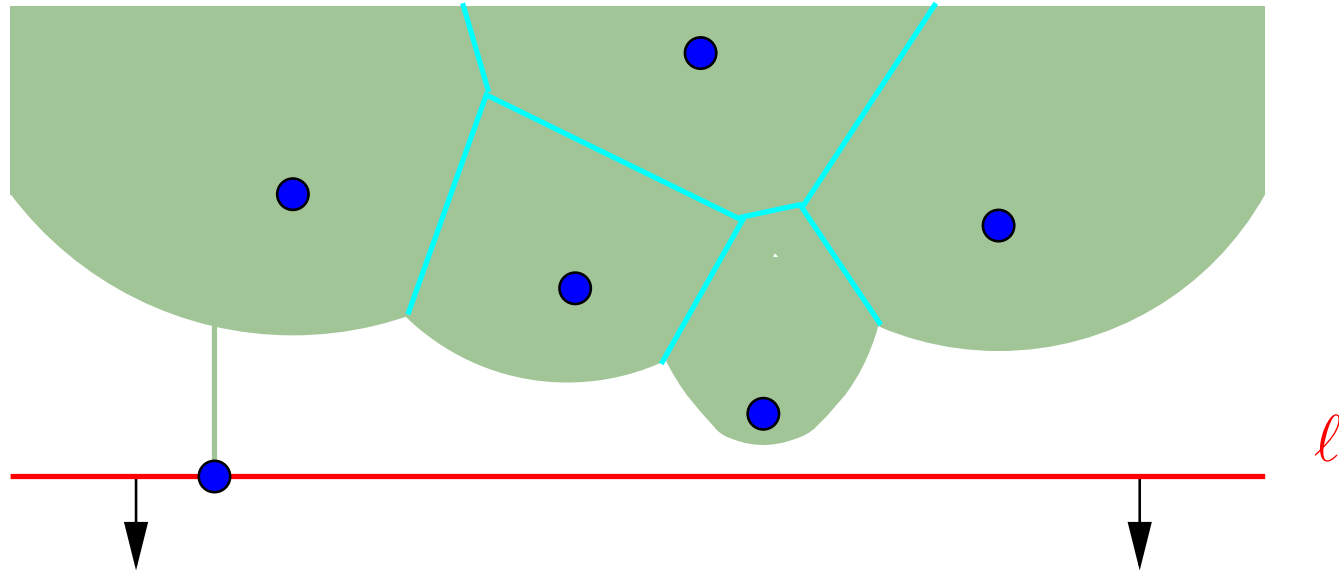
Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

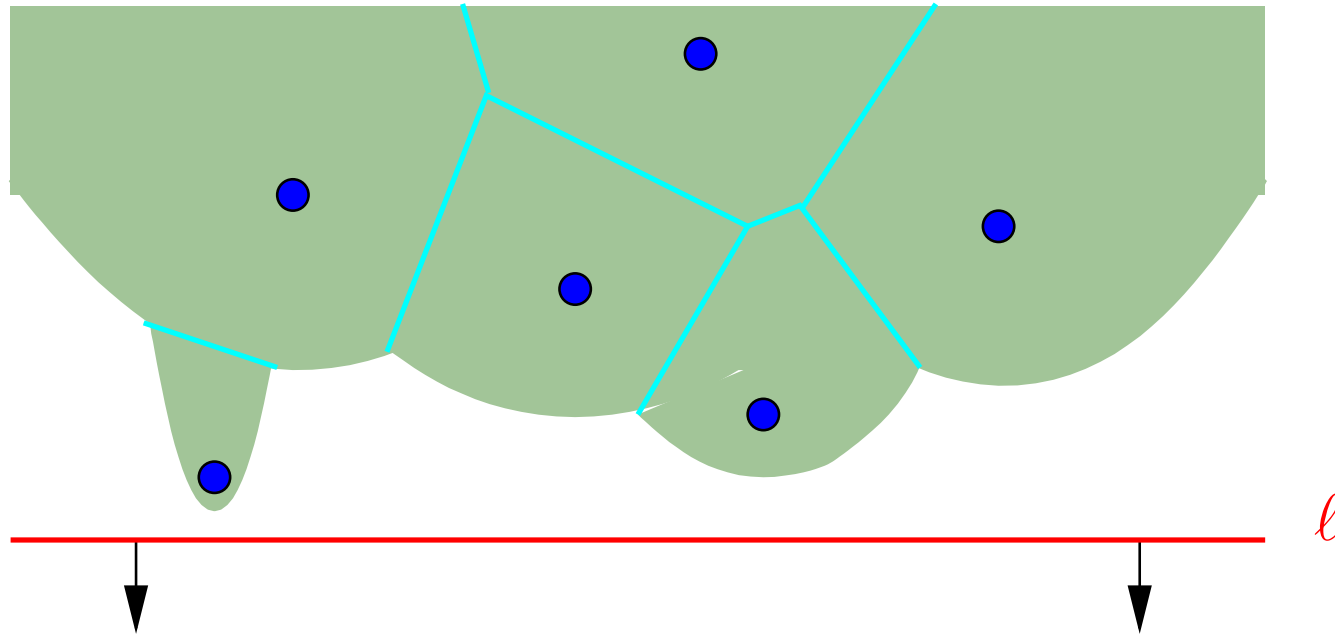
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .



Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

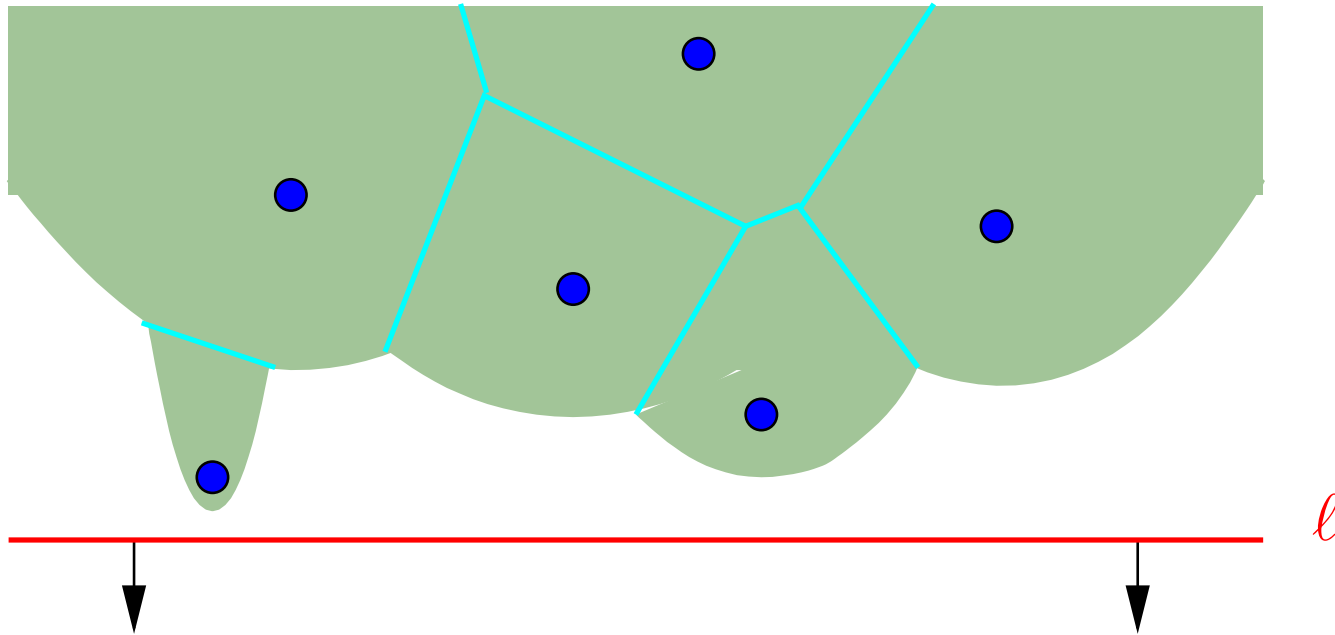
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .



Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .

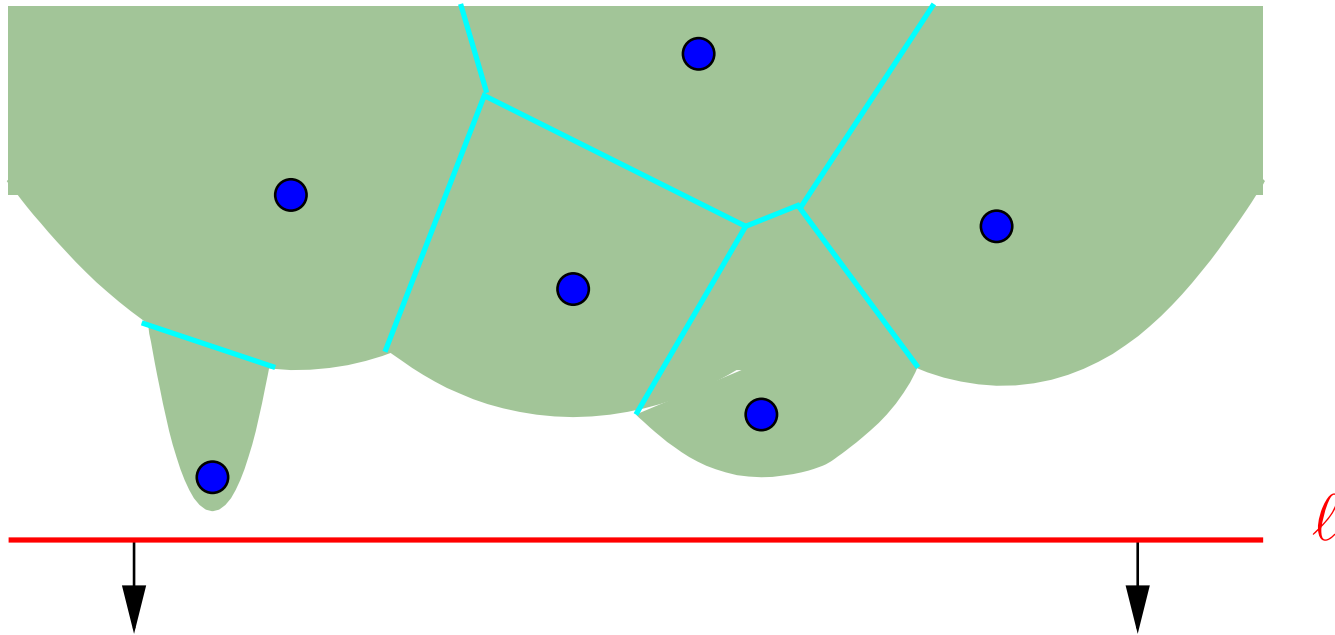


Note que o mesmo arco aparece mais de uma vez na linha.

Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .



Pontos de P são **pontos eventos**.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram!
Veja a animação.

Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

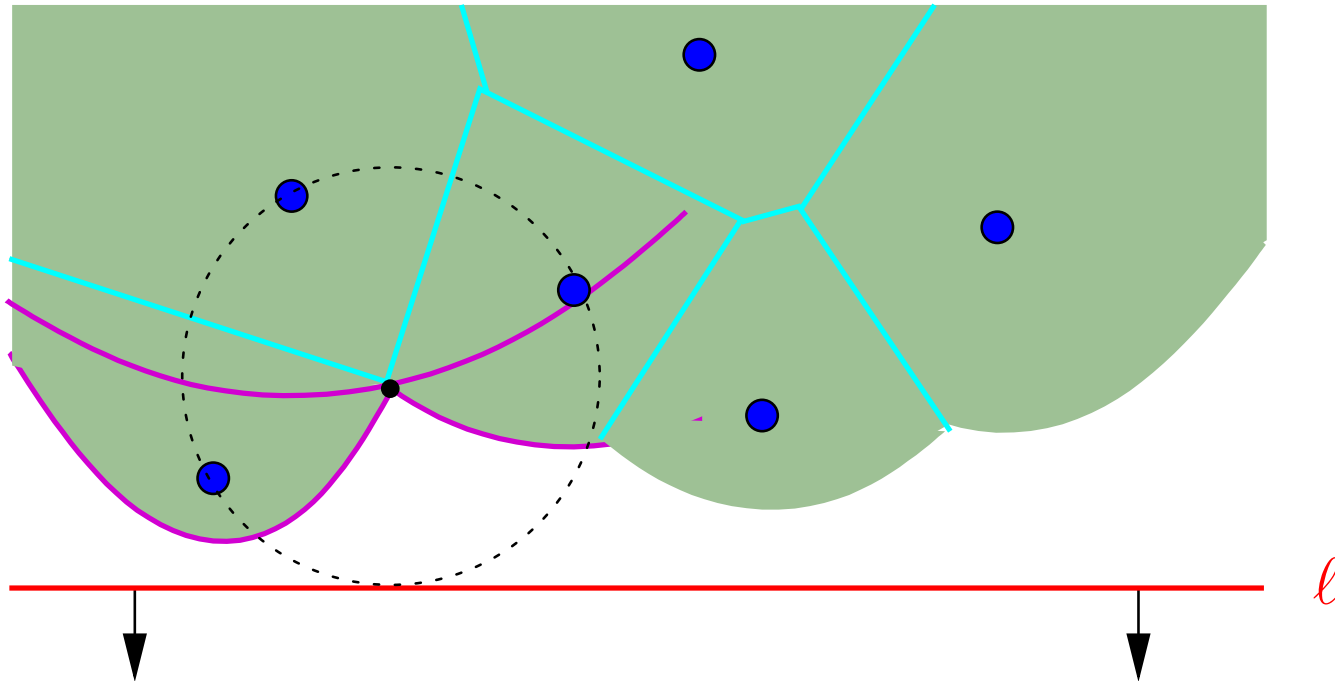
Quando isso ocorre?

Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

Quando isso ocorre?

Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.

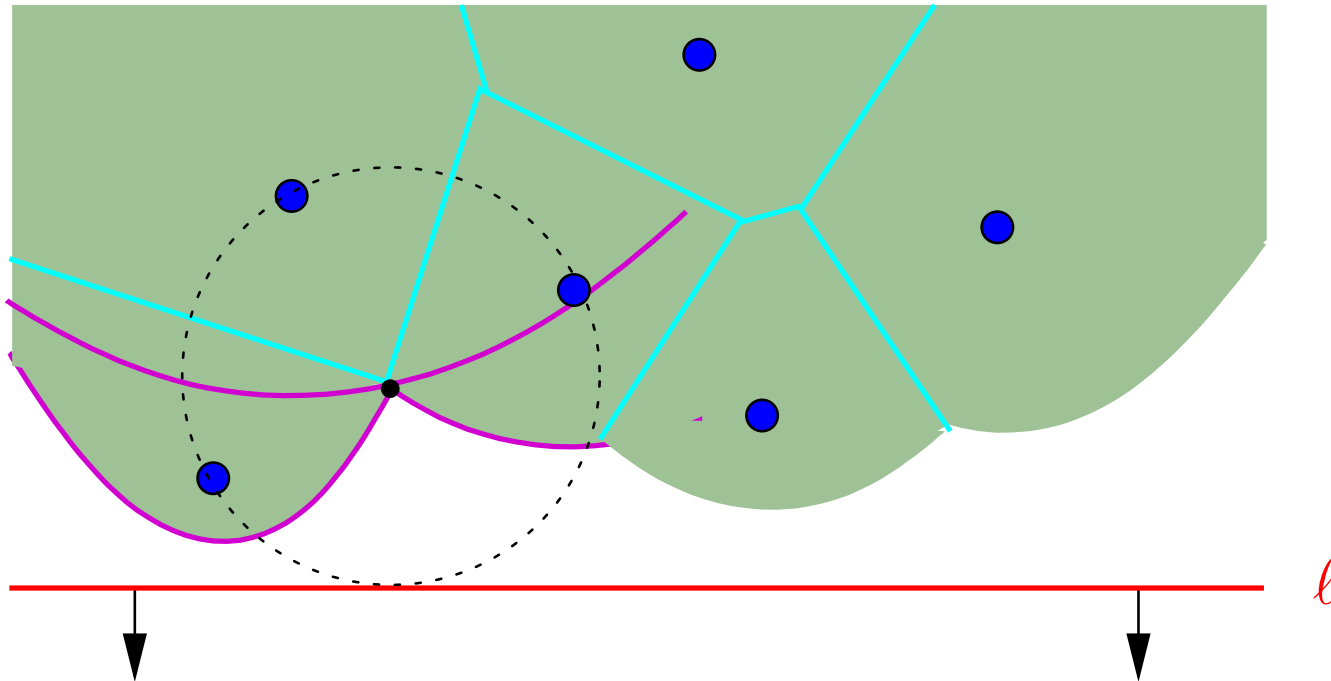


Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

Quando isso ocorre?

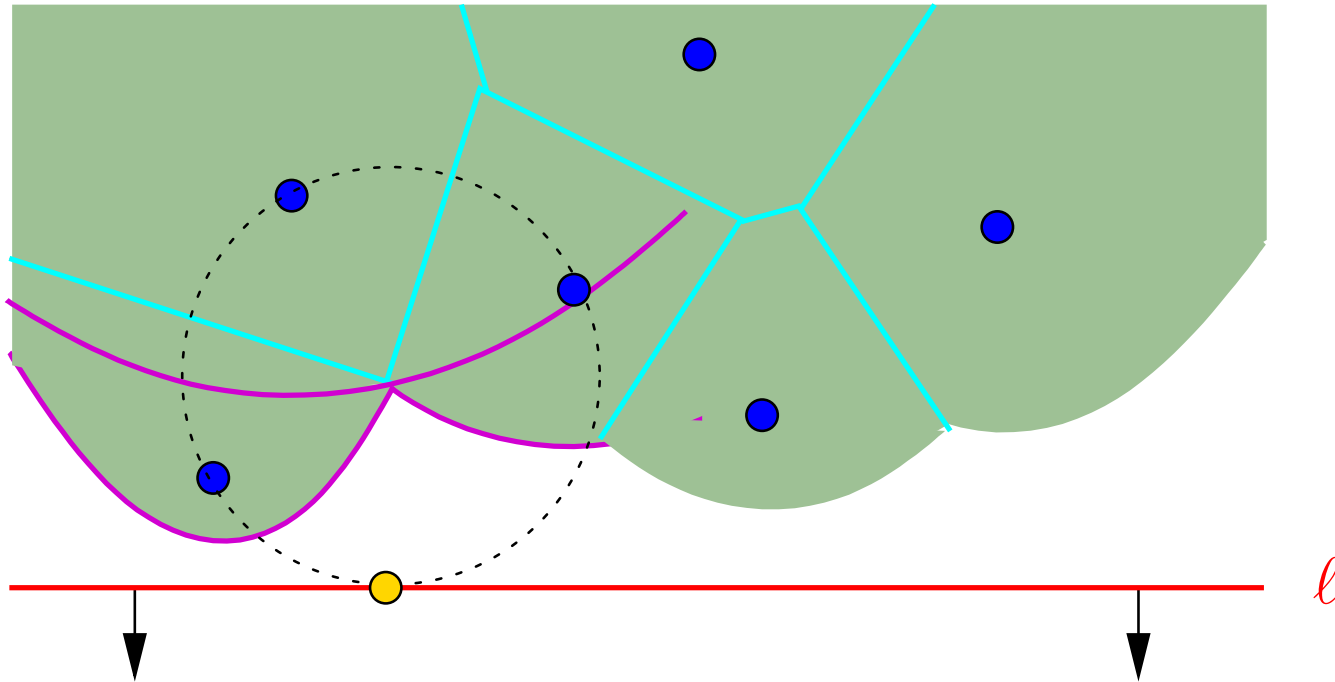
Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.



Esse ponto está equidistante de três pontos de P e é um vértice de $\text{Vor}(P)$.

Segundo tipo de ponto evento

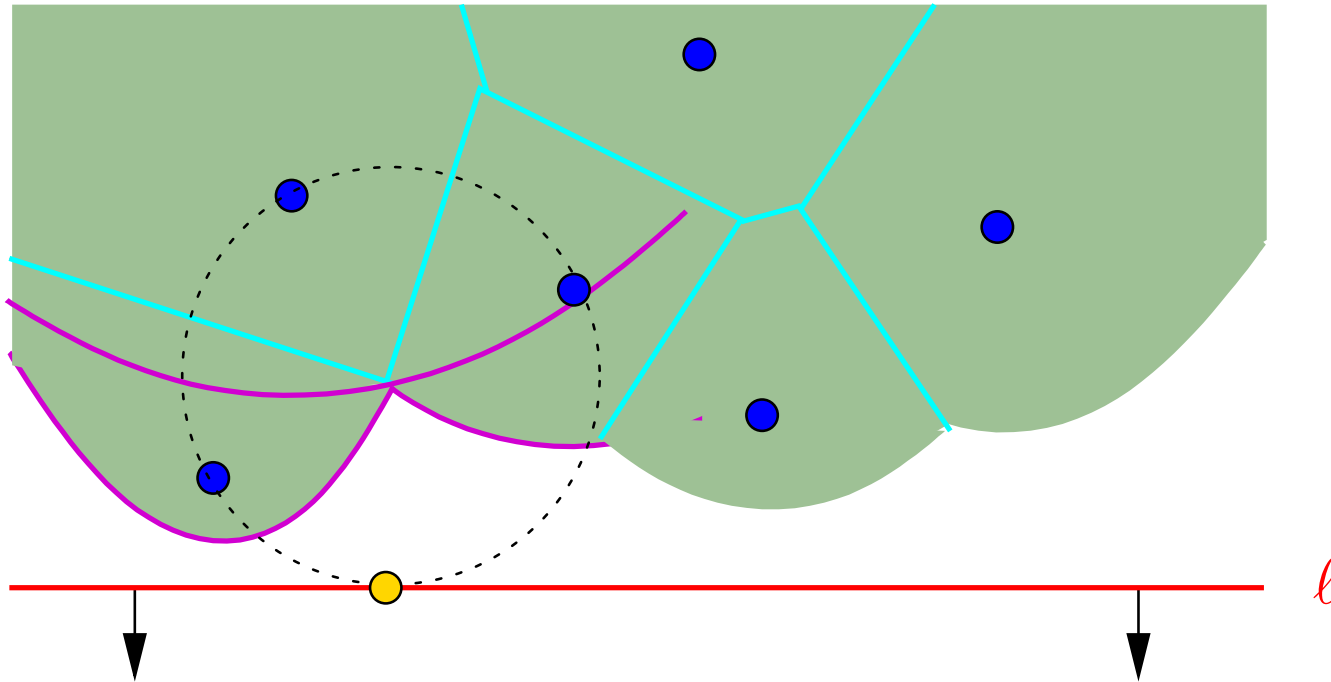
Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de **evento-círculo**.

Segundo tipo de ponto evento

Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de **evento-círculo**.

Lema. O único jeito de um arco desaparecer da linha de praia é por meio de um evento-círculo.