Análise de Algoritmos

Estes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Sai:

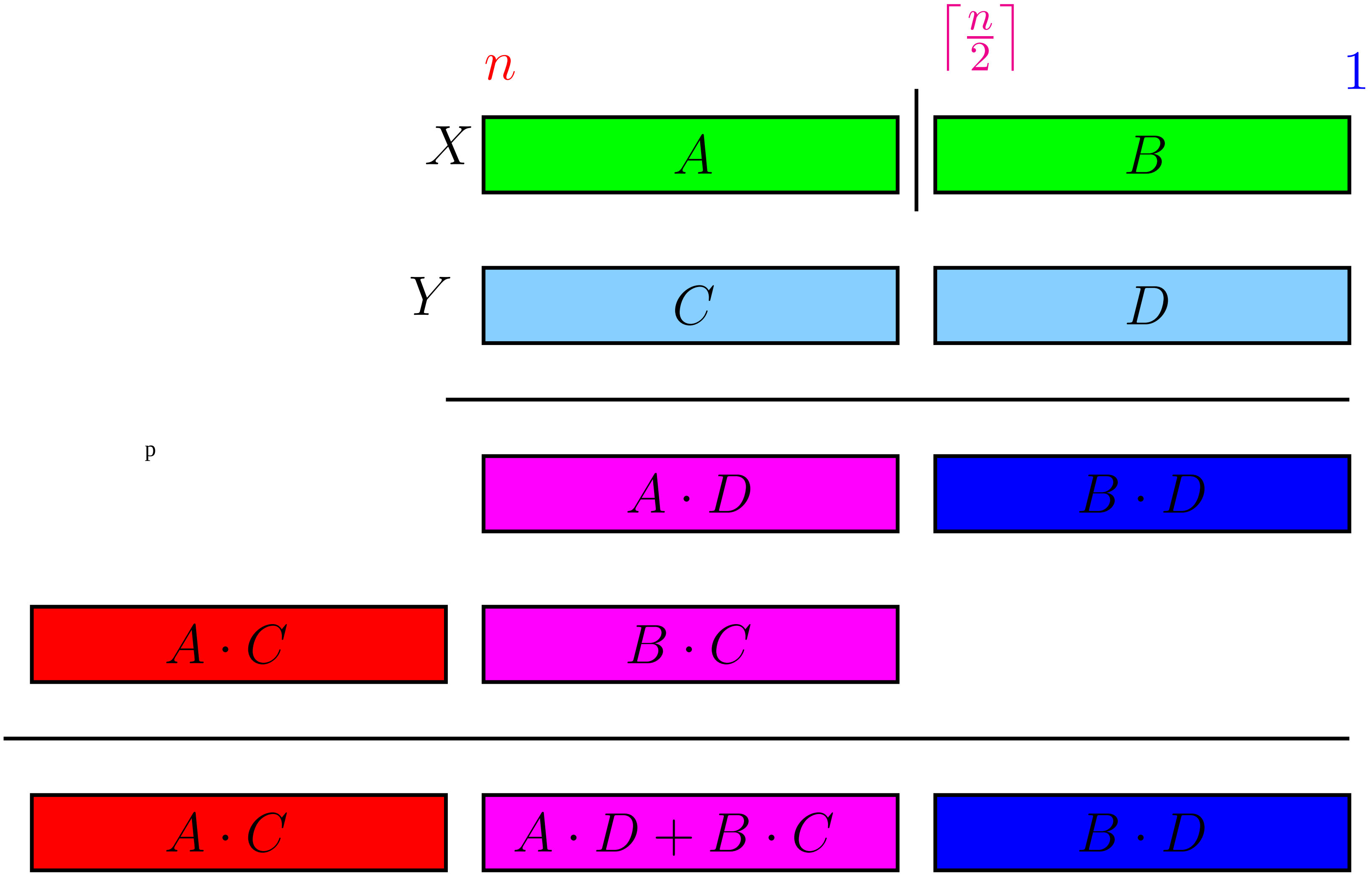
23												$X \cdot Y$										1
5	8	4	4	0	8	7	2	8	6	7	0	2	7	1	4	1	0	2	9	5	1	2

Algoritmo do ensino fundamental

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & & & \times & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
\cline{9-17}
 & & & & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & & & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \\
 & & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & \\
 & & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & \\
 & & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & \\
 & & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & \\
 & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & \\
\hline
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast
\end{array}
$$

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

Divisão e conquista



n $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 1

X A B

Y C D

p

$A \cdot D$ $B \cdot D$

$A \cdot C$ $B \cdot C$

$A \cdot C$ $A \cdot D + B \cdot C$ $B \cdot D$

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^n + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

Exemplo

	4			1		4			1
X	3	1	4	1	Y	5	9	3	6

Exemplo

	4			1
X	3	1	4	1

	4			1
Y	5	9	3	6

A	3	1

B	4	1

C	5	9

D	3	6

Exemplo

$$\begin{array}{cccccccccc} & 4 & & & 1 & & 4 & & & 1 \\ X & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{1} & \qquad Y & \boxed{5} & \boxed{9} & \boxed{3} & \boxed{6} \end{array}$$

$$A\ \boxed{3}\boxed{1} \qquad B\ \boxed{4}\boxed{1} \qquad C\ \boxed{5}\boxed{9} \qquad D\ \boxed{3}\boxed{6}$$

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$A \cdot C = 1829$ $\qquad (A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$

$B \cdot D = 1476$

$$\begin{array}{lcccccccc} A \cdot C & 1 & 8 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A \cdot D + B \cdot C) & & & 3 & 5 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ B \cdot D & & & & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline X \cdot Y = & 1 & 8 & 6 & 4 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{array}$$

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

```
MULT $(X, Y, n)$
    se $n = 1$ devolva $X \cdot Y$
    $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
    $A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$        $B \leftarrow X[1\,..\,q]$
    $C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$        $D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
    $E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
    $F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
    $G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
    $H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
    $R \leftarrow E \times 10^{n} + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
    devolva $R$
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \quad \Theta(1)$
2	$= \quad \Theta(1)$
3	$= \quad \Theta(n)$
4	$= \quad \Theta(n)$
5	$= \quad T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$= \quad T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$= \quad T(\lceil n/2 \rceil)$
8	$= \quad T(\lceil n/2 \rceil)$
9	$= \quad \Theta(n)$
10	$= \quad \Theta(n)$

total $= \quad T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 4T'(n/2) + n$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada . . .
Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{lccc} X & & a & b \\ Y & & c & d \\ \hline & & ad & bd \\ & ac & bc & \\ \hline X \cdot Y & ac & ad+bc & bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{cccc} X & & a & b \\ Y & & c & d \\ \hline & & ad & bd \\ & ac & bc & \\ \hline X \cdot Y & ac & ad+bc & bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

$$\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$g = (a+b)(c+d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$$

$$\boxed{X \cdot Y \ \text{(por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f}$$

Exemplo

$$X = 2133 \qquad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \qquad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 4 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 4 & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 1 & Y = & 3 & X \cdot Y = & 3 \end{array}$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 4 & bd = & 3 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 3 & Y = & 5 & X \cdot Y = & 15 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & 483 \\ ac = & 4 & bd = & 3 & (a+b)(c+d) = & 15 \end{array}$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = 483 \quad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \quad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = 396$$

$$ac = 3 \quad bd = 6 \qquad (a+b)(c+d) = 18$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & 1890 \\ ac = & 15 & bd = & 20 & (a+b)(c+d) = & 72 \end{array}$$

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\
ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & 1890
\end{array}
$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & 4931496 \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & 1890 \end{array}$$

Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

```
KARATSUBA $(X, Y, n)$
  se $n \leq 3$ devolva $X \cdot Y$
  $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
  $A \leftarrow X[q+1\,.\,.\,n]$        $B \leftarrow X[1\,.\,.\,q]$
  $C \leftarrow Y[q+1\,.\,.\,n]$        $D \leftarrow Y[1\,.\,.\,q]$
  $E \leftarrow$ KARATSUBA$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
  $F \leftarrow$ KARATSUBA$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
  $G \leftarrow$ KARATSUBA$(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
  $H \leftarrow G - F - E$
  $R \leftarrow E \times 10^{n} + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
  devolva $R$
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \quad \Theta(1)$
2	$= \quad \Theta(1)$
3	$= \quad \Theta(n)$
4	$= \quad \Theta(n)$
5	$= \quad T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$= \quad T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$= \quad T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$= \quad \Theta(n)$
9	$= \quad \Theta(n)$
10	$= \quad \Theta(n)$
total	$= \quad T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1,2,3 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 3T'(n/2) + n$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ ($1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância	$\Theta(n\,10^n)$
Ensino fundamental	$\Theta(n^2)$
Karatsuba e Ofman'60	$\mathrm{O}(n^{1.585})$
Toom e Cook'63	$\mathrm{O}(n^{1.465})$
(divisão e conquista; generaliza o acima)	
Schönhage e Strassen'71	$\mathrm{O}(n \lg n \lg \lg n)$
(FFT em aneis de tamanho específico)	
Fürer'07	$\mathrm{O}(n \lg n\, 2^{\mathrm{O}(\log^* n)})$

Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.005662	0.005815
8	0.010141	0.010600
16	0.020406	0.023643
32	0.051744	0.060335
64	0.155788	0.165563
128	0.532198	0.470810
256	1.941748	1.369863
512	7.352941	4.032258

Tempos em 10^3 segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

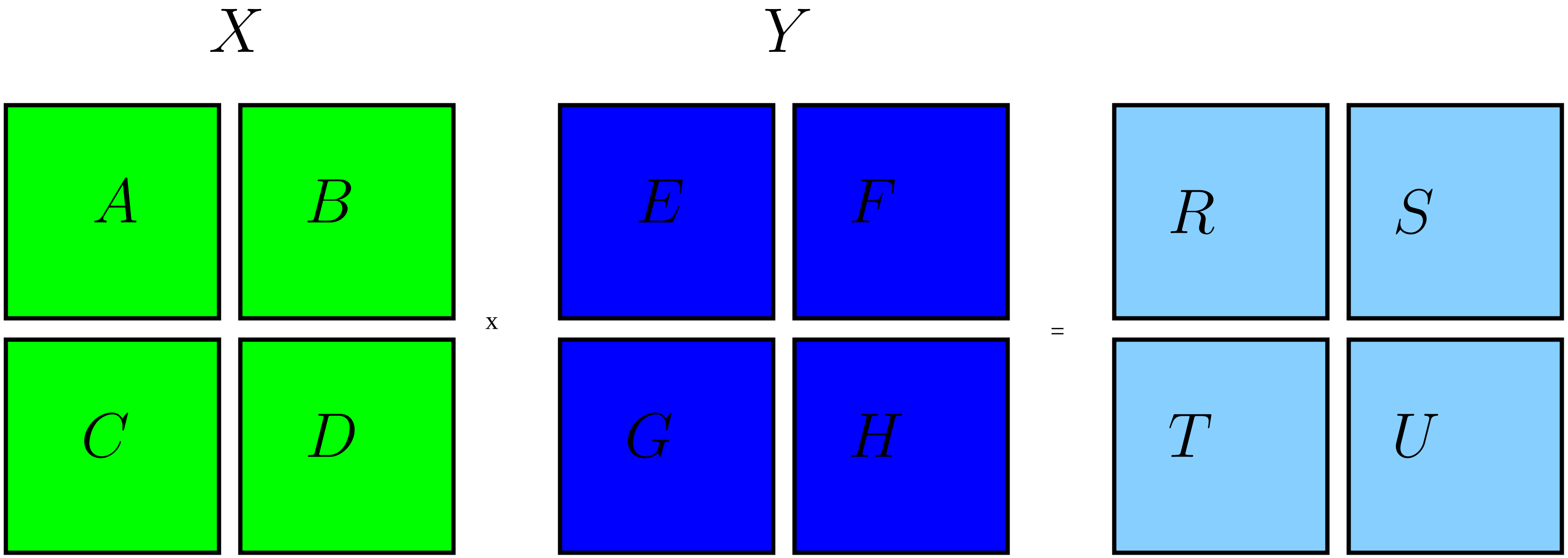
O algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \qquad (1)$$

Solução custa R$ 8,04

Divisão e conquista



$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

(2)

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

```
MULTI-M $(X, Y, n)$
1   se $n = 1$ devolva $X \cdot Y$
2   $(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
3   $(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
4   $R \leftarrow$ MULTI-M$(A, E, n/2) +$ MULTI-M$(B, G, n/2)$
5   $S \leftarrow$ MULTI-M$(A, F, n/2) +$ MULTI-M$(B, H, n/2)$
6   $T \leftarrow$ MULTI-M$(C, E, n/2) +$ MULTI-M$(D, G, n/2)$
7   $U \leftarrow$ MULTI-M$(C, F, n/2) +$ MULTI-M$(D, H, n/2)$
8   $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$
9   devolva $P$
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(n^2)$
3	$=$	$\Theta(n^2)$
4	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
5	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
6	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
7	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
8	$=$	$\Theta(n^2)$
9	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 8T'(n/2) + n^2$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	3348889

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é $\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cf
\end{aligned} \tag{4}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg \\
s &= p_1 + p_2 = af + bh \\
t &= p_3 + p_4 = ce + dg \\
u &= p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh
\end{aligned}$$

Algoritmo de Strassen

```
STRASSEN $(X, Y, n)$
    se $n = 1$ devolva $X \cdot Y$
    $(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
    $(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
    $P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
    $P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
    $P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
    $P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
    $P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
    $P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
    $P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
    $R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
    $S \leftarrow P_1 + P_2$
    $T \leftarrow P_3 + P_4$
    $U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
    devolva $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$
```

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	$= \Theta(1)$
2-3	$= \Theta(n^2)$
4-10	$= 7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$= \Theta(n^2)$
15	$= \Theta(n^2)$
total	$= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ .\ . \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 7T'(n/2) + n^2$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ $(2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81)$.

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen (1969)	$\mathrm{O}(n^{2.81})$
⋮	⋮
Coppersmith e Winograd (1987)	$\mathrm{O}(n^{2.3755})$
Stothers (2010)	$\mathrm{O}(n^{2.3736})$
Williams (2011)	$\mathrm{O}(n^{2.3727})$