

Análise de Algoritmos

**Parte destes slides são adaptações de slides
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.**

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes à universidades,
médicos a programas de residência.

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes à universidades,
médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes à universidades,
médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes à universidades, médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Adicione homem/mulher fictício para representar a possibilidade de ficar solteiro.

Assim $|H| = |M|$.

Casamentos estáveis

Atribuição de estudantes à universidades, médicos a programas de residência.

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Adicione homem/mulher fictício para representar a possibilidade de ficar solteiro.

Assim $|H| = |M|$.

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens

M - conjunto de mulheres

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens **M** - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre *M*.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Um emparelhamento é **instável** se
existem **homens** h e h' e **mulheres** m e m' tq
 m é emparelhada com h , m' com h' , mas $m' \succ_h m$ e $h \succ_{m'} h'$.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Um emparelhamento é **instável** se
existem **homens** h e h' e **mulheres** m e m' tq
 m é emparelhada com h , m' com h' , mas $m' \succ_h m$ e $h \succ_{m'} h'$.

Neste caso, h e m' preferiam se casar um com o outro.

Casamentos estáveis

H - conjunto de homens M - conjunto de mulheres

Cada **homem** tem ordem estrita de preferência sobre M .

Emparelhamento de H em M :
alocação de homens a mulheres.

Um emparelhamento é **instável** se existem **homens** h e h' e **mulheres** m e m' tq m é emparelhada com h , m' com h' , mas $m' \succ_h m$ e $h \succ_{m'} h'$.

Neste caso, h e m' preferiam se casar um com o outro.

O par (h, m') é um **par bloqueador**,
e emparelhamento é **estável** se não tem par bloqueador.

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

O emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$ é instável, pois (h_1, m_2) é um par bloqueador.

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

O emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$ é instável, pois (h_1, m_2) é um par bloqueador.

Já o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$ é estável.

Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para $n = 3$:

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

O emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$ é instável, pois (h_1, m_2) é um par bloqueador.

Já o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$ é estável.

Dadas as listas de preferências de todos, existe emparelhamento estável?

Como encontrar um, se existe?

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Nova rodada:

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina:

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Nova rodada:

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Eventualmente recusa proposta recebida em rodada anterior.

Algoritmo com proposta masculina

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Algoritmo com proposta masculina

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Repete esse processo,
sempre progredindo nas listas dos homens.

Algoritmo com proposta masculina

Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista.

Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Para esse, posterga a sua resposta.

Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista.

Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto pela do homem mais alto em sua lista.

Repete esse processo,
sempre progredindo nas listas dos homens.

O processo então termina (não mais que n^2 rodadas).

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

h_2 propõe para m_3 , e o algoritmo termina.

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

h_2 propõe para m_3 , e o algoritmo termina.

Emparelhamento produzido: $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$

Algoritmo no exemplo

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

h_1 propõe para m_2

h_2 propõe para m_1

h_3 propõe para m_1

m_1 rejeita a proposta de h_2 .

h_2 propõe para m_3 , e o algoritmo termina.

Emparelhamento produzido: $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$

Note que tal emparelhamento é estável!

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$.

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$.

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Diferente do obtido pela proposta masculina!

Estabilidade do emparelhamento

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Prova feita na aula.

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$.

\succ_{h_1}	\succ_{h_2}	\succ_{h_3}	\succ_{m_1}	\succ_{m_2}	\succ_{m_3}
m_2	m_1	m_1	h_1	h_3	h_1
m_1	m_3	m_2	h_3	h_1	h_3
m_3	m_2	m_3	h_2	h_2	h_2

Diferente do obtido pela proposta masculina!

Há alguma diferença significativa entre estes emparelhamentos?

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com **proposta masculina** (**feminina**) produz um escalonamento **ótimo-masculino** (**ótimo-feminino**).

Emparelhamentos ótimos

Teorema: O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável.

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com **proposta masculina** (**feminina**) produz um escalonamento **ótimo-masculino** (**ótimo-feminino**).

Prova feita na aula.

Prova de estratégia

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) produz um escalonamento ótimo-masculino (ótimo-feminino).

Prova de estratégia

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) produz um escalonamento ótimo-masculino (ótimo-feminino).

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (**feminina**) é um mecanismo à prova de estratégia para os **homens** (**mulheres**).

Prova de estratégia

Emparelhamento ν é **ótimo-masculino** se não há emparelhamento estável μ tq $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ ou $\mu(h) = \nu(h)$ para todo h em H e $\mu(j) \succ_j \nu(j)$ para algum j em H .

Definição de emparelhamento **ótimo-feminino** é análoga.

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (feminina) produz um escalonamento ótimo-masculino (ótimo-feminino).

Teorema: O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina (**feminina**) é um mecanismo à prova de estratégia para os **homens** (**mulheres**).

Prova feita na aula.