Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

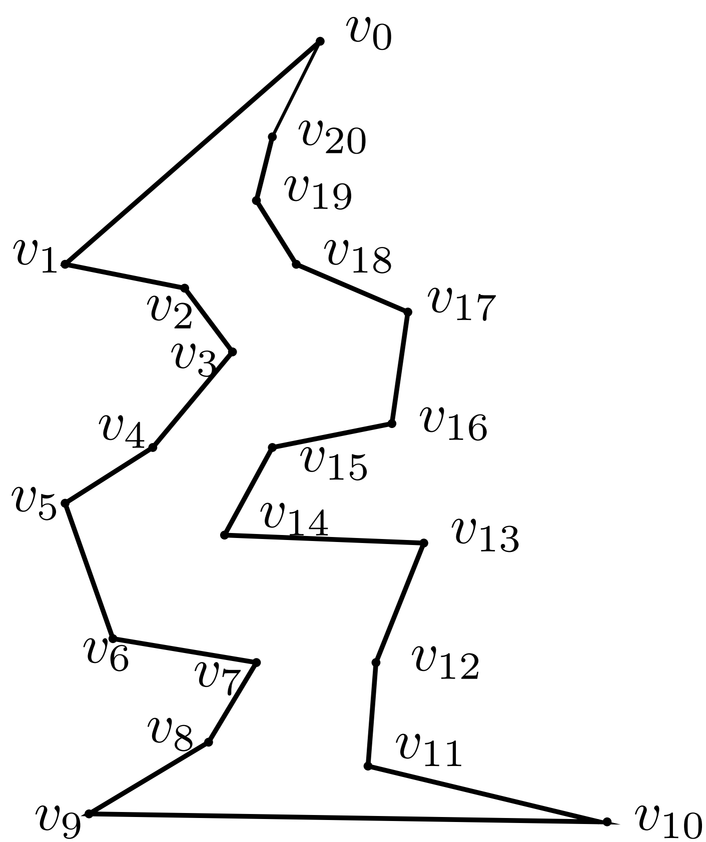
`http://www.ime.usp.br/~cris/`

segundo semestre de 2011

Polígonos monótonos

Um polígono P é monótono em relação a uma reta L se $P \cap L'$ é conexo para toda reta L' perpendicular a L.

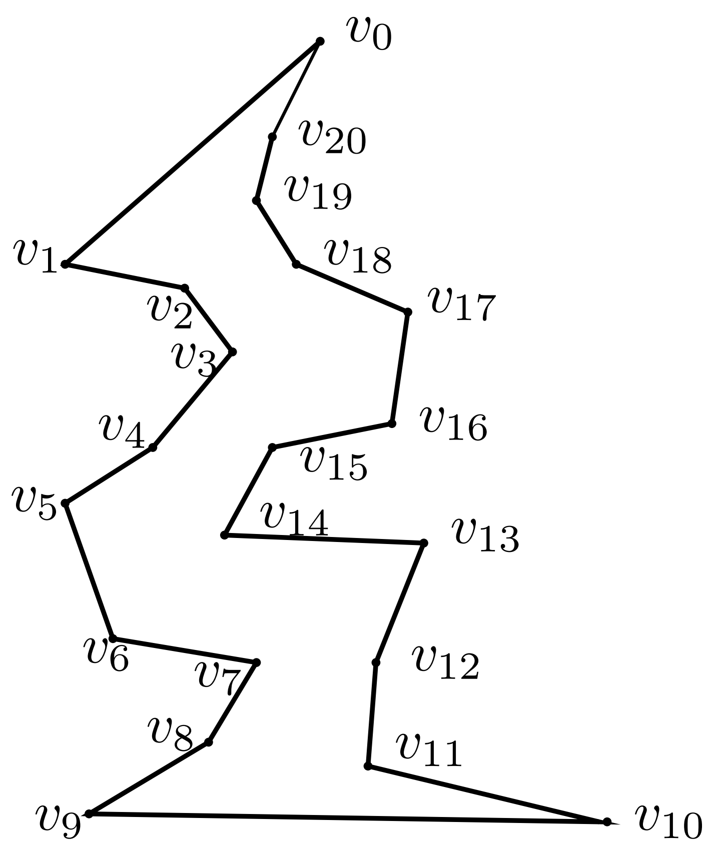
Se L é o eixo y, dizemos que P é y-monótono.



Polígonos monótonos

Um polígono P é monótono em relação a uma reta L se $P \cap L'$ é conexo para toda reta L' perpendicular a L.

Se L é o eixo y, dizemos que P é y-monótono.



Sabemos triangular P em tempo linear.

Triangulação em $\mathrm{O}(n \lg n)$

P: polígono arbitrário com n vértices

Idéia do algoritmo:

Triangulação em $\mathrm{O}(n \lg n)$

P: polígono arbitrário com n vértices

Idéia do algoritmo:

- particionar P em polígonos monótonos
- triangular cada um deles em tempo linear

Triangulação em $\mathrm{O}(n \lg n)$

P: polígono arbitrário com n vértices

Idéia do algoritmo:

- particionar P em polígonos monótonos
- triangular cada um deles em tempo linear

Partição tem que consumir tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$!

Triangulação em $\mathrm{O}(n \lg n)$

P: polígono arbitrário com n vértices

Idéia do algoritmo:

- particionar P em polígonos monótonos
- triangular cada um deles em tempo linear

Partição tem que consumir tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$!

Como fazemos isso?

Triangulação em $\mathrm{O}(n \lg n)$

P: polígono arbitrário com n vértices

Idéia do algoritmo:

- particionar P em polígonos monótonos
- triangular cada um deles em tempo linear

Partição tem que consumir tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$!

Como fazemos isso?

Usando uma trapezoidação especial de P.

Trapezoidação

Trapézio: quadrilátero com duas arestas paralelas

Trapezoidação

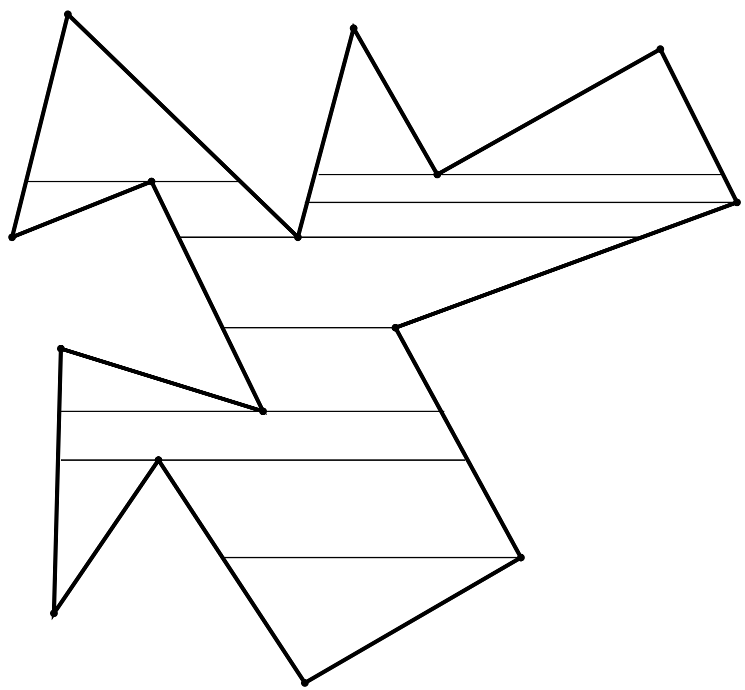
Trapézio: quadrilátero com duas arestas paralelas

Trapezoidação horizontal de um polígono P:
resultado de traçar segmentos horizontais maximais contidos em P, passando por cada vértice de P.

Trapezoidação

Trapézio: quadrilátero com duas arestas paralelas

Trapezoidação horizontal de um polígono P:
resultado de traçar segmentos horizontais maximais contidos em P, passando por cada vértice de P.



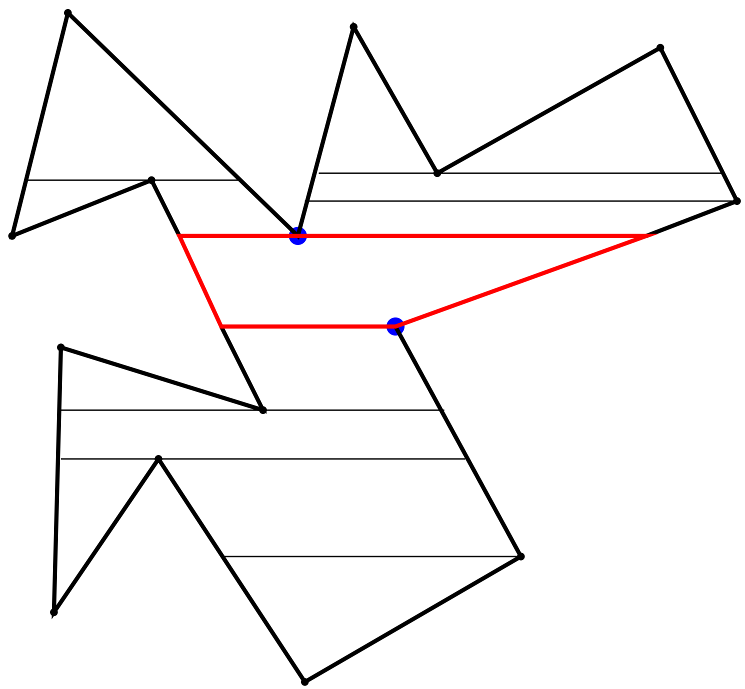
Trapezoidação

Hipótese simplificadora:
não há dois vértices com a mesma Y-coordenada.

Trapezoidação

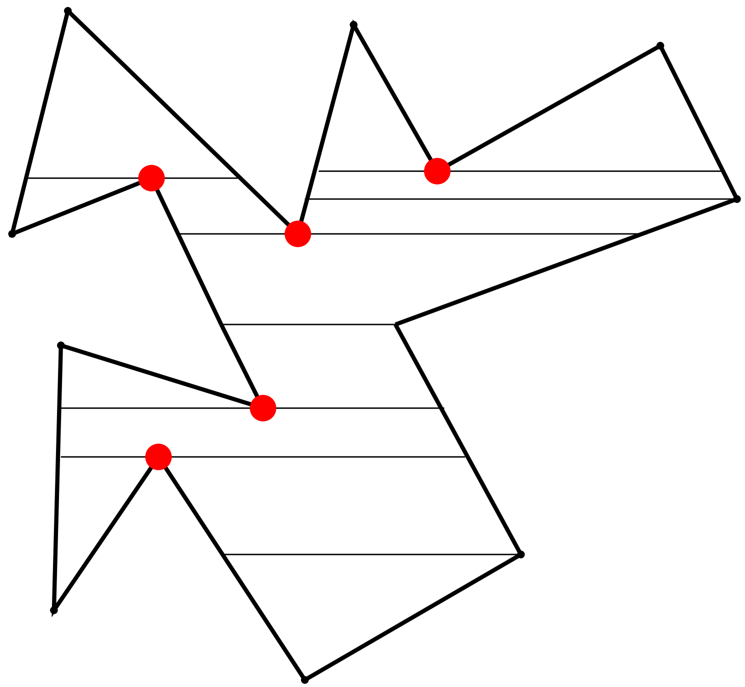
Hipótese simplificadora:
não há dois vértices com a mesma Y-coordenada.

Afirmação: todo trapézio tem exatamente dois vértices de P em sua fronteira (vértices de suporte), um na aresta superior, outro na inferior.



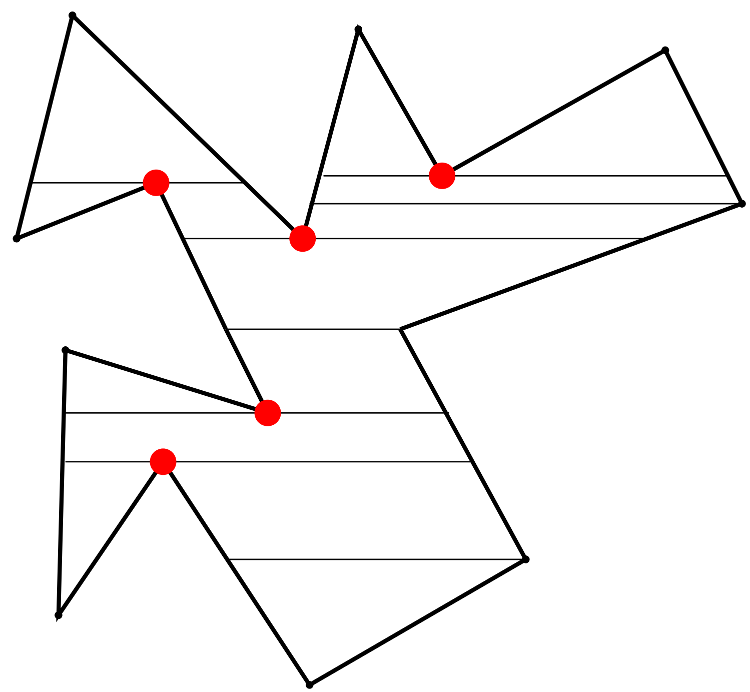
Pontas interiores

Ponta interior de P: vértice v reflexo cujos vizinhos em δP estão ambos acima ou ambos abaixo de v.



Pontas interiores

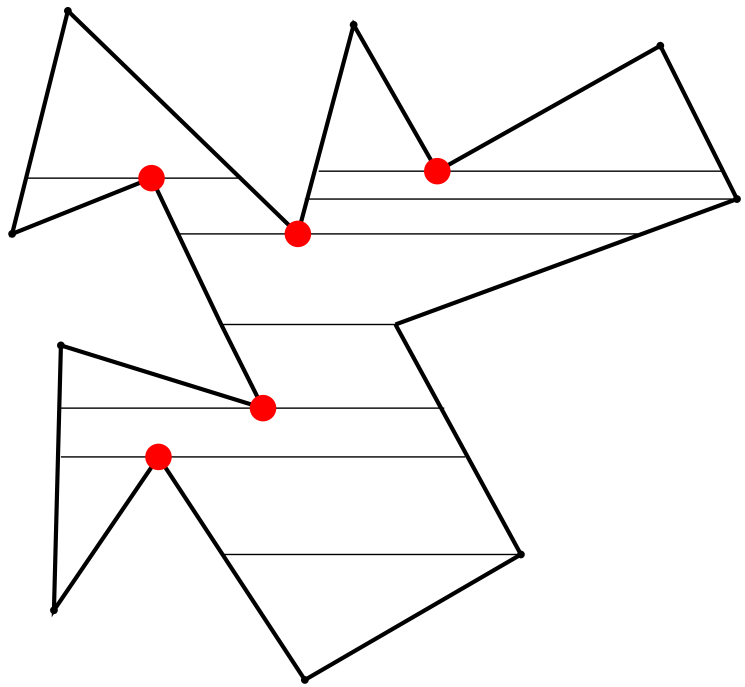
Ponta interior de P: vértice v reflexo cujos vizinhos em δP estão ambos acima ou ambos abaixo de v.



Lema: Se P não tem pontas interiores, P é y-monótono.

Pontas interiores

Ponta interior de P: vértice v reflexo cujos vizinhos em δP estão ambos acima ou ambos abaixo de v.



Lema: Se P não tem pontas interiores, P é y-monótono.

Ponta interior de P:
vértice de suporte no interior da aresta do seu trapézio.

Partição em polígonos monótonos

Lema: Se P não tem pontas interiores, P é monótono.

Idéia: acabar com as pontas interiores!

Partição em polígonos monótonos

Lema: Se P não tem pontas interiores, P é monótono.

Idéia: acabar com as pontas interiores!

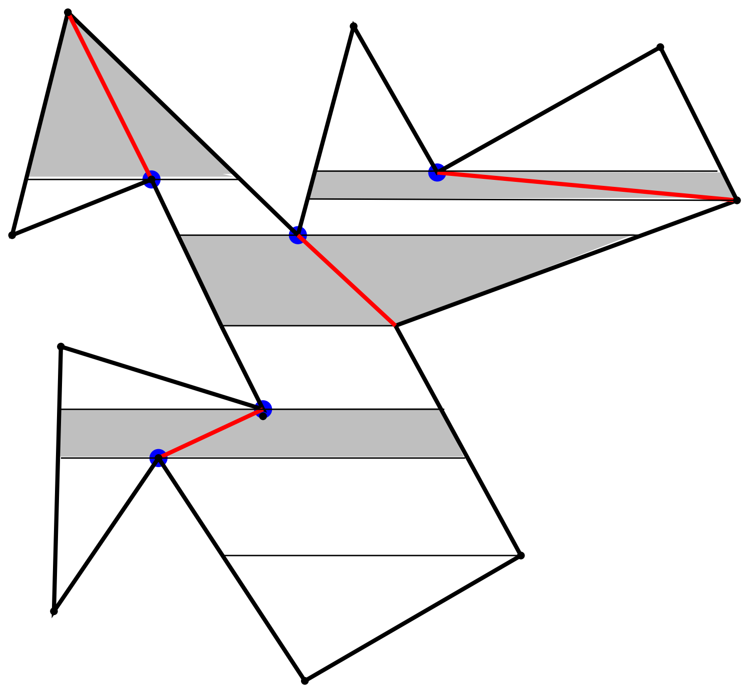
Como?

Partição em polígonos monótonos

Lema: Se P não tem pontas interiores, P é monótono.

Idéia: acabar com as pontas interiores!

Como?



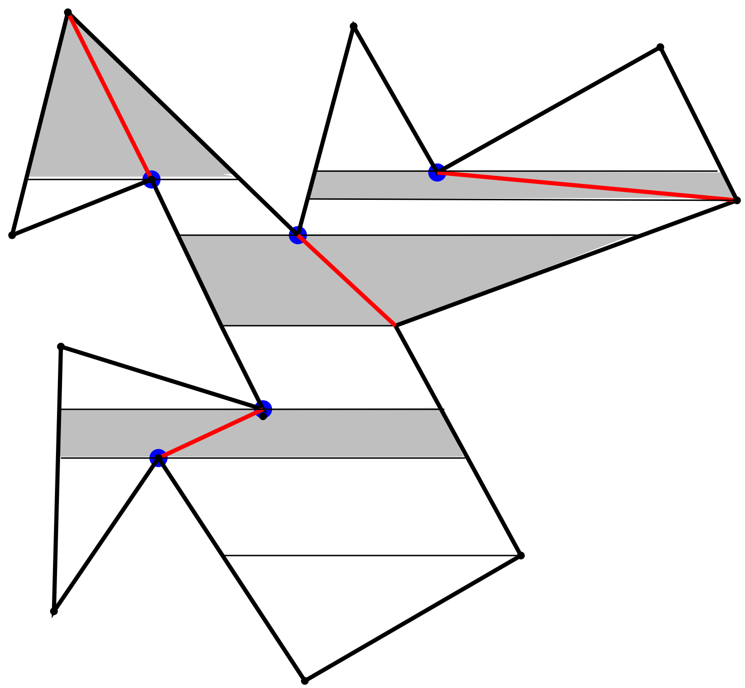
Uma diagonal a partir de cada ponta interior:

Partição em polígonos monótonos

Lema: Se P não tem pontas interiores, P é monótono.

Idéia: acabar com as pontas interiores!

Como?



Uma diagonal a partir de cada ponta interior:

diagonal entre a ponta e o outro vértice de suporte.

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

ED para a linha de varredura ℓ: ABBB ou skip list

O que é guardado na ED da linha de varredura?

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

ED para a linha de varredura ℓ: ABBB ou skip list

O que é guardado na ED da linha de varredura?

Trapézios que cruzam ℓ, dados por triplas (e, u, f), onde

- e e f são as arestas de P que contém respectivamente o lado esquerdo e direito do trapézio
- u é o vértice de suporte superior do trapézio

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

ED para a linha de varredura ℓ: ABBB ou skip list

O que é guardado na ED da linha de varredura?

Trapézios que cruzam ℓ, dados por triplas (e, u, f), onde

- e e f são as arestas de P que contém respectivamente o lado esquerdo e direito do trapézio
- u é o vértice de suporte superior do trapézio

(u: candidato a extremo de uma diagonal particionadora)

Algoritmo de Lee e Preparata

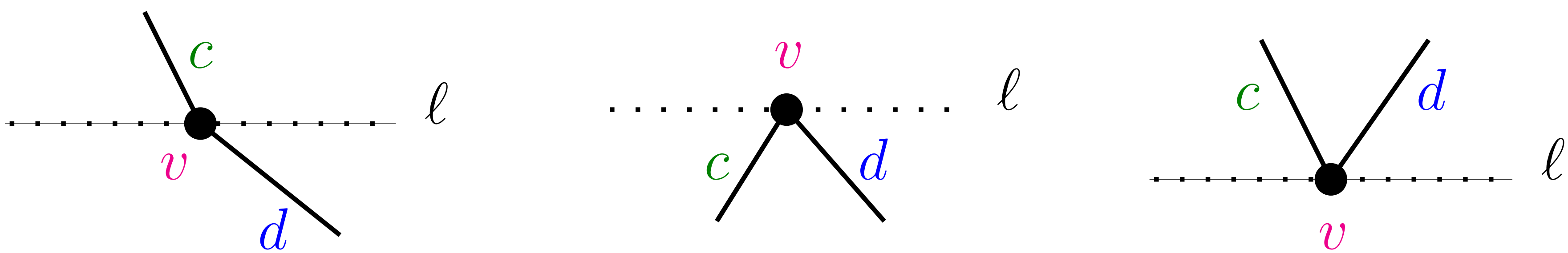
Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

Algoritmo de Lee e Preparata

Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

c e d: arestas do polígono incidentes a v

Três casos a considerar:

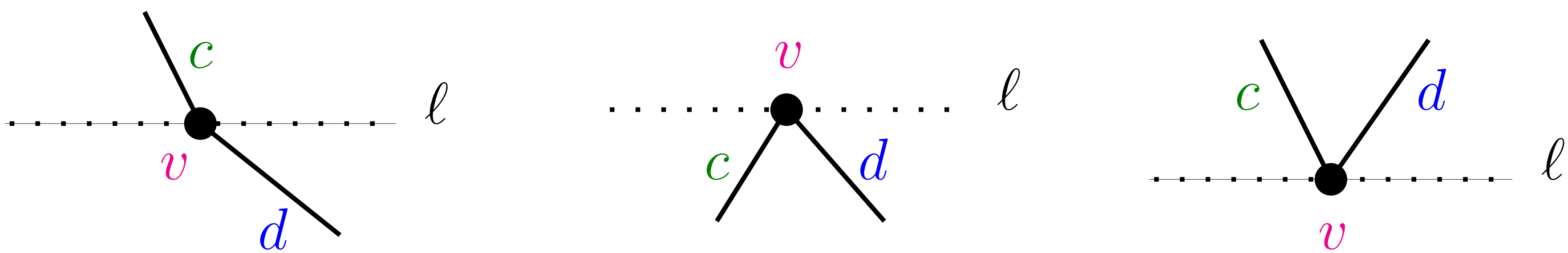


Algoritmo de Lee e Preparata

Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

c e d: arestas do polígono incidentes a v

Três casos a considerar:



Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

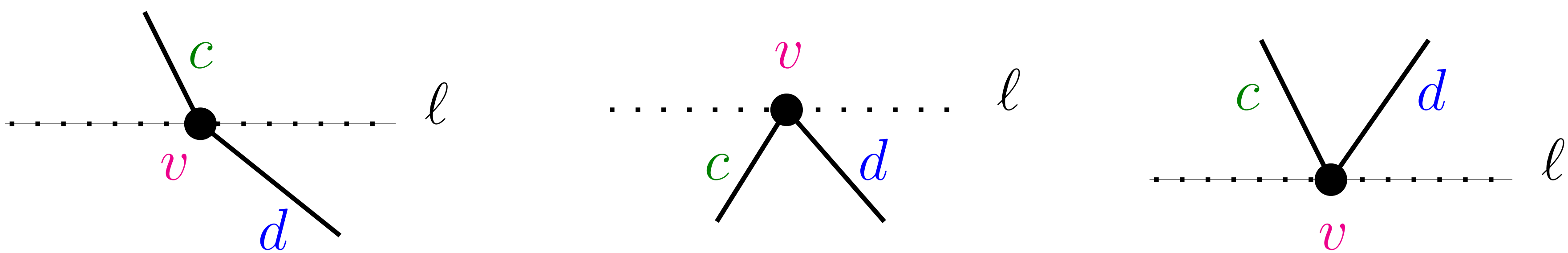
Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

Algoritmo de Lee e Preparata

Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

c e d: arestas do polígono incidentes a v

Três casos a considerar:



Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

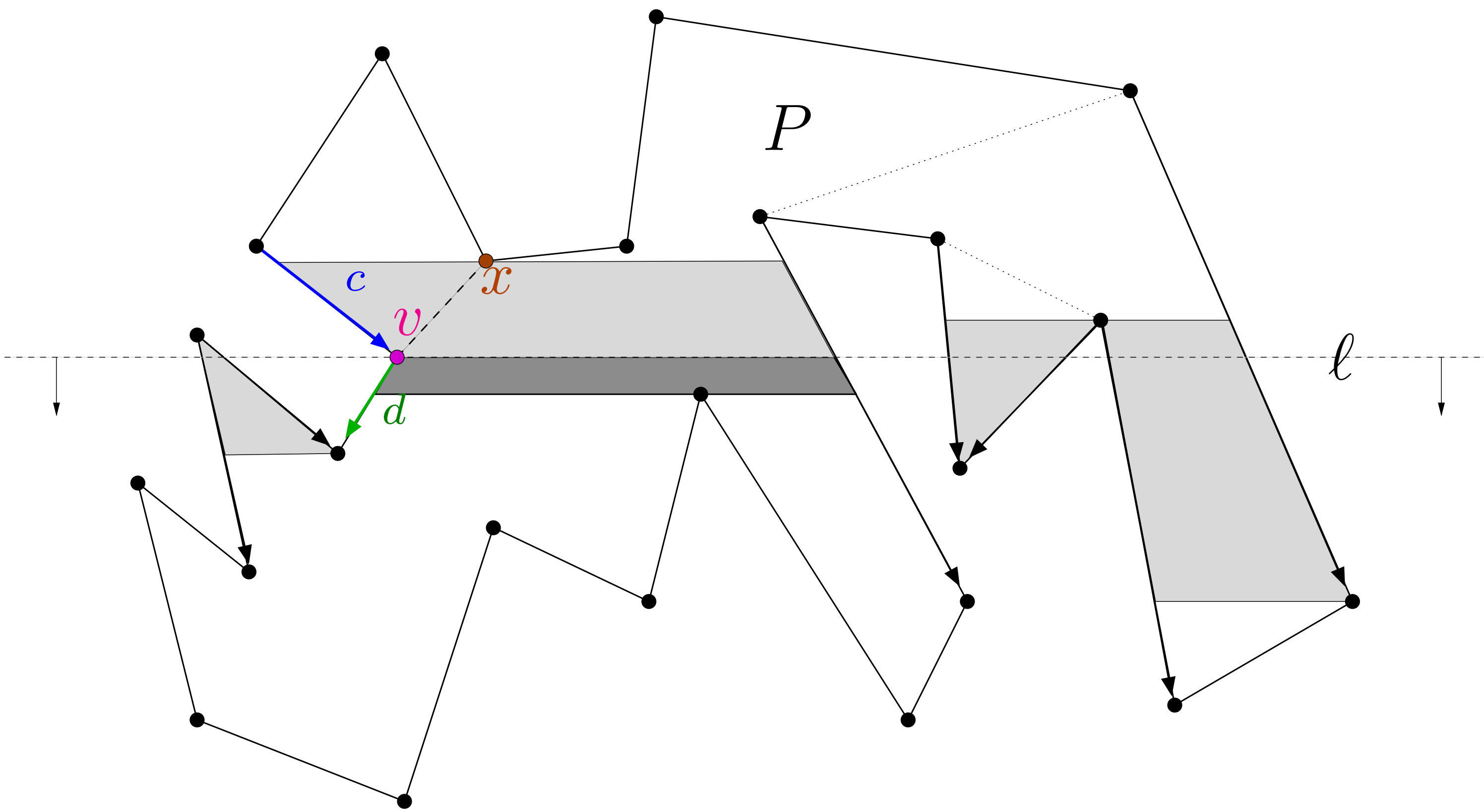
Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

No que segue, ED da linha de varredura: ABBB T

Caso 1

Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

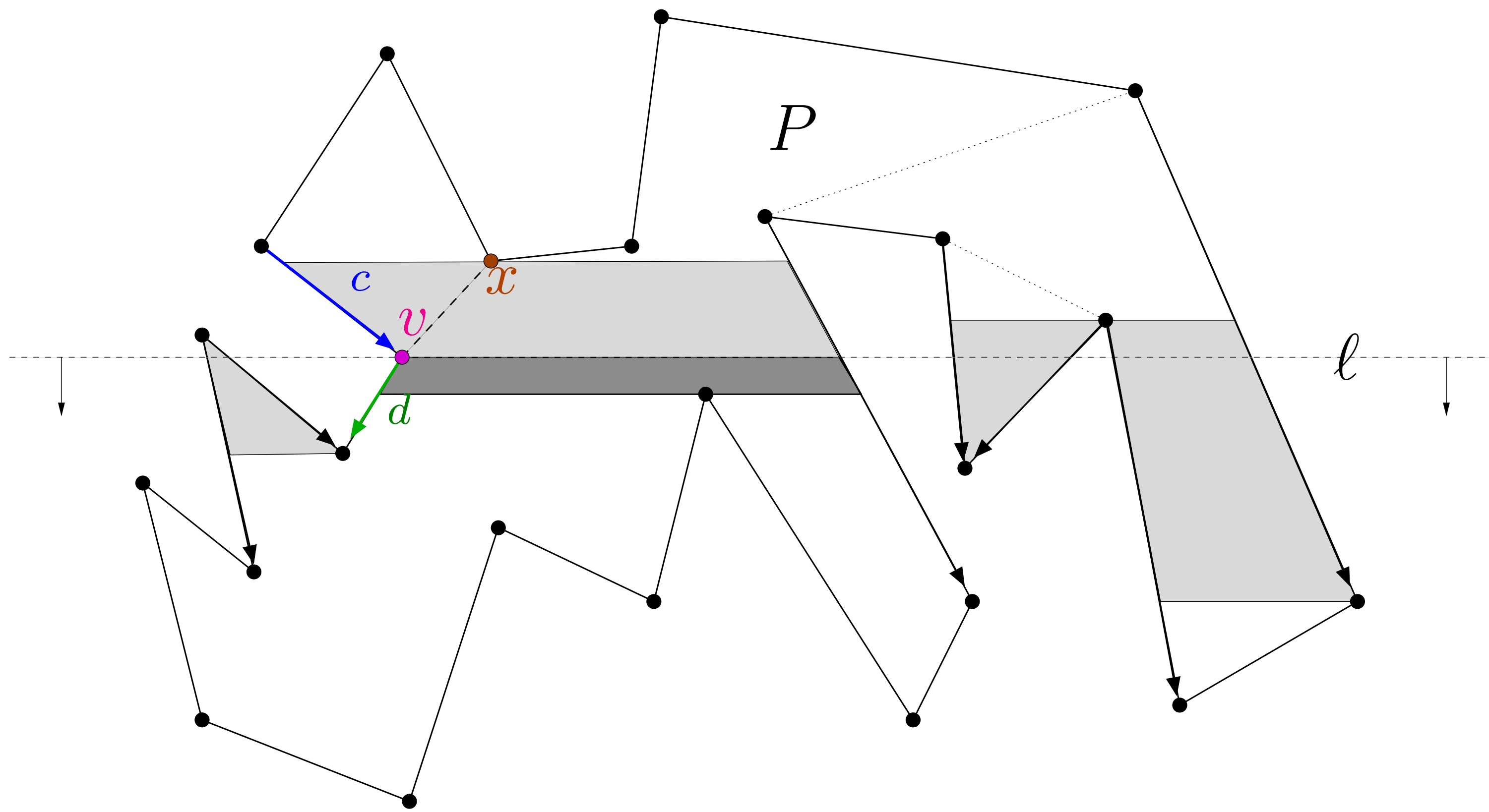
Remova o trapézio (c, x, e) ou (e, x, c)
e insira o trapézio (d, v, e) ou (e, v, d) em T.



Caso 1

Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

Remova o trapézio (c, x, e) ou (e, x, c)
e insira o trapézio (d, v, e) ou (e, v, d) em T.



Se x for ponta para baixo, acrescente a diagonal (x, v).

Teste de ponta para baixo

PONTAPARABAIXO(x, Y, n)

1 $x^- \leftarrow x - 1 \quad x^+ \leftarrow x + 1$

2 se $x^- = 0$ então $x^- \leftarrow n$

3 se $x^+ = n + 1$ então $x^+ \leftarrow 1$

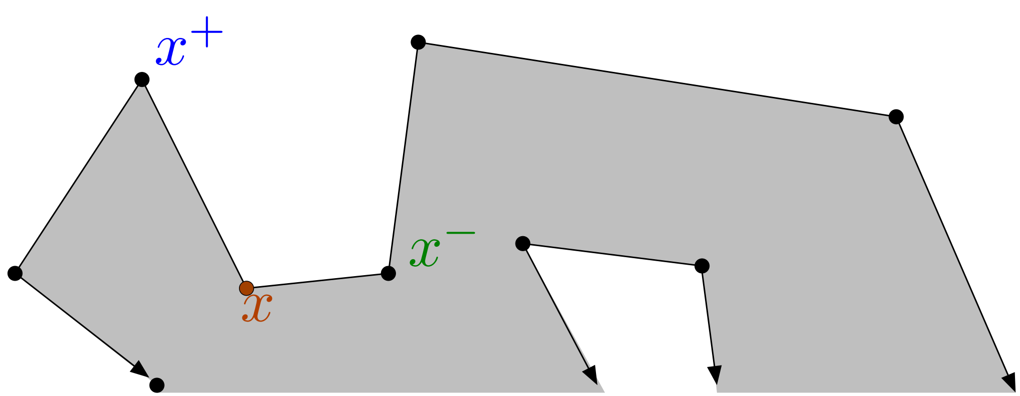
$\triangleright$ x^- e x^+ são o predecessor e o sucessor de x em δP

4 se $Y[x^-] > Y[x]$ e $Y[x^+] > Y[x]$

$\triangleright$ x é ponta interior para baixo?

5 então devolva VERDADE

6 senão devolva FALSO



Caso 1

TRATACASO1(T, u, v, w, Y, n, D, t)

se $Y[u] < Y[w]$ então $u \leftrightarrow w$
$((i, j), x, (k, l)) \leftarrow$ REMOVA(T, v)
se $v = j$ $\triangleright$ o trapézio está à direita de v?
    então INSIRA$(T, (v, w), v, (k, l))$
    senão INSIRA$(T, (i, j), v, (v, w))$
se PONTAPARABAIXO(x, Y, n)
    então $t \leftarrow t + 1$ $D[t] \leftarrow (x, v)$