Geometria Computacional

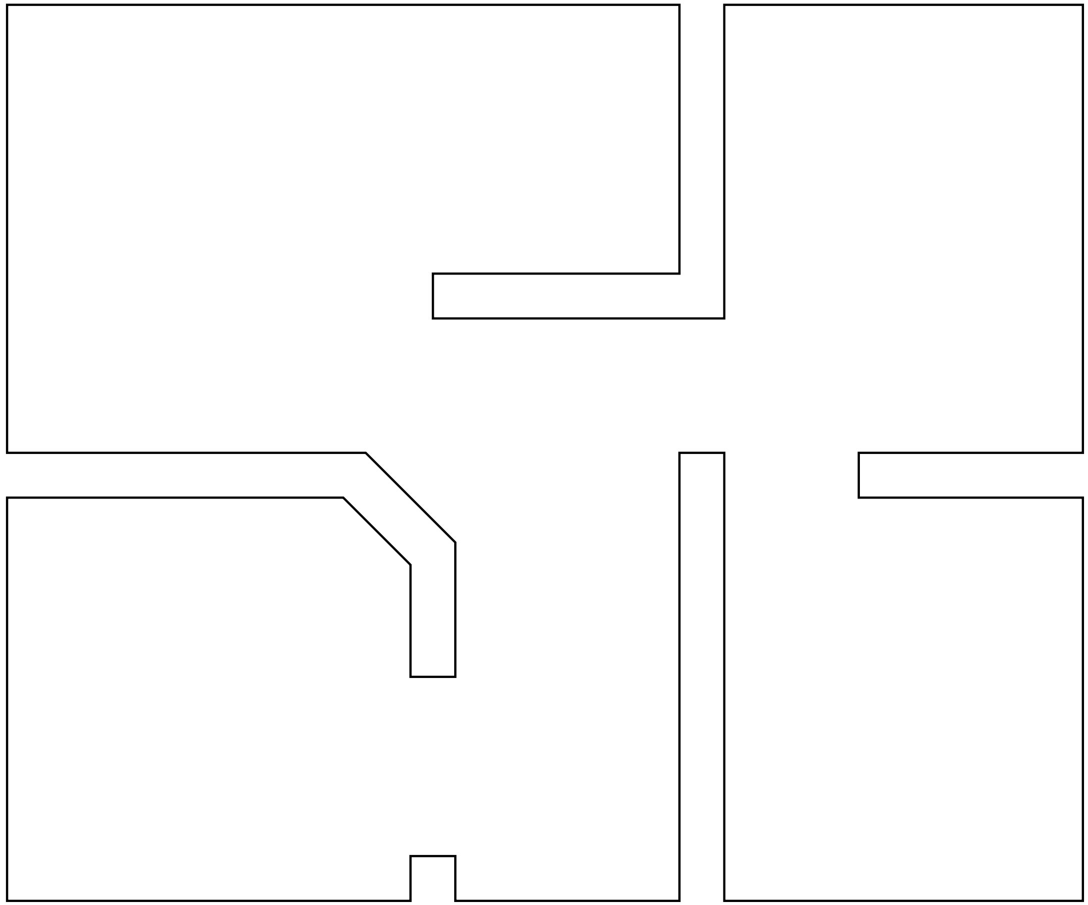
Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

http://www.ime.usp.br/˜cris/

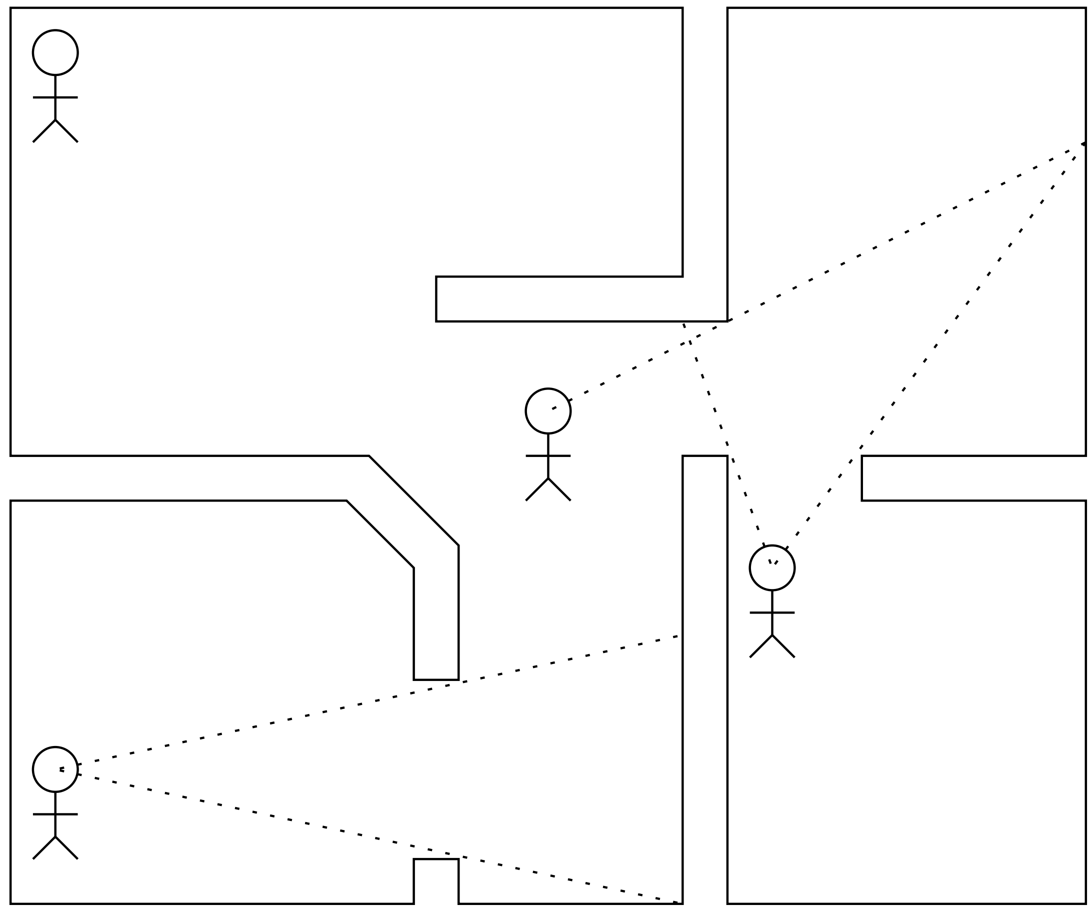
segundo semestre de 2011

Teorema da Galeria de Arte



Quantos guardas são necessários?

Teorema da Galeria de Arte



Quantos guardas são necessários? Quatro?

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

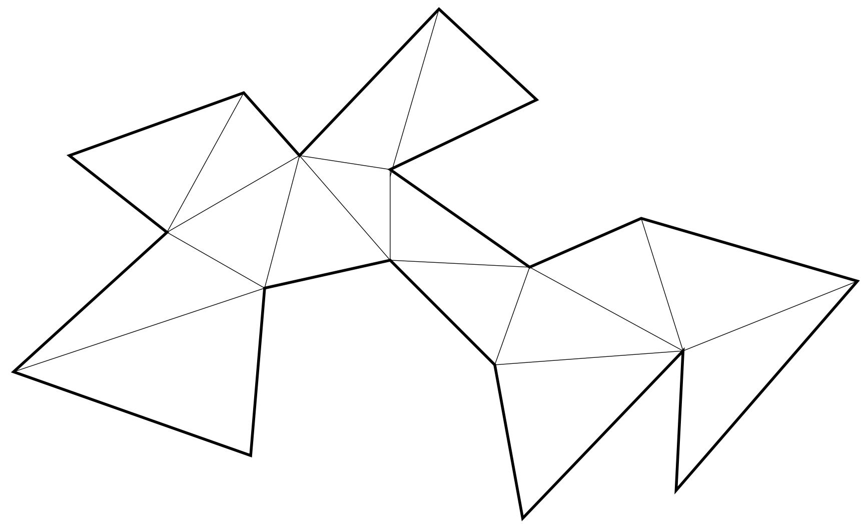
Primeira prova: Chvátal

Prova que veremos: Fisk

Ingredientes:
triangulação de polígonos e coloração de grafos

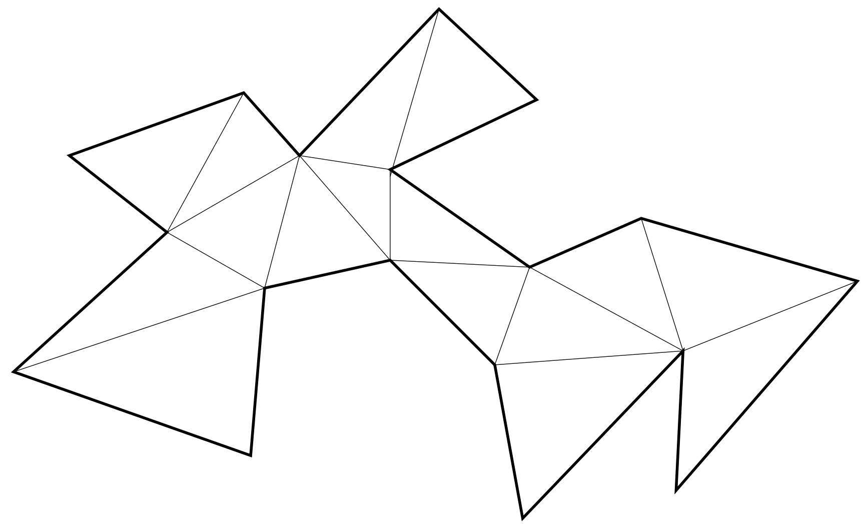
Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

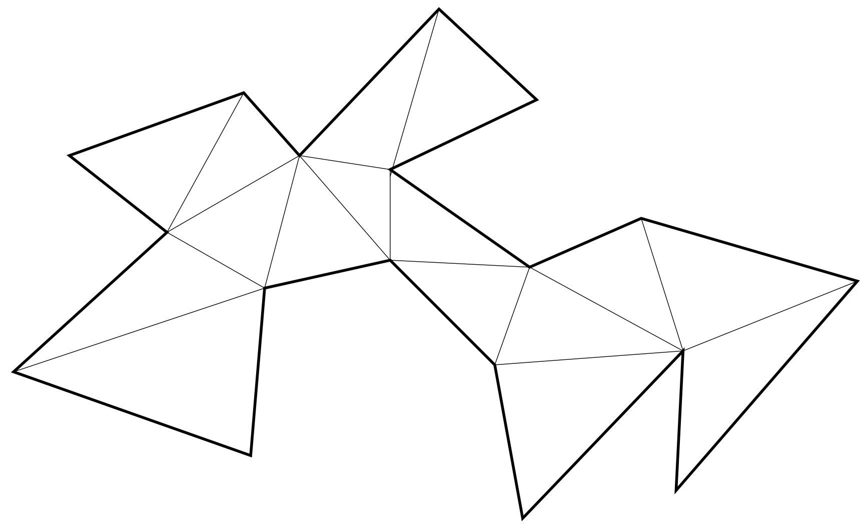
Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

P: polígono T: triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
$uv \in E$ sse uv está em T

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

P: polígono T: triangulação de P

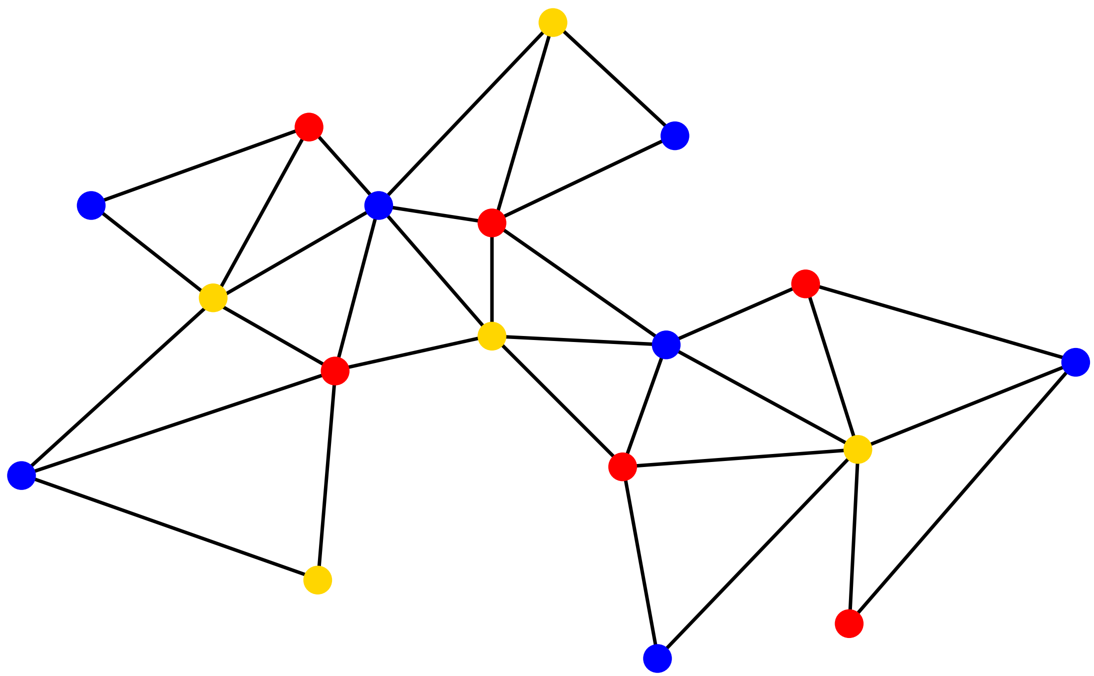
$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
$uv \in E$ sse uv está em T

G_T é um grafo outerplanar
(planar com todos os vértices na face externa)

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração de grafos

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.



Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto. Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

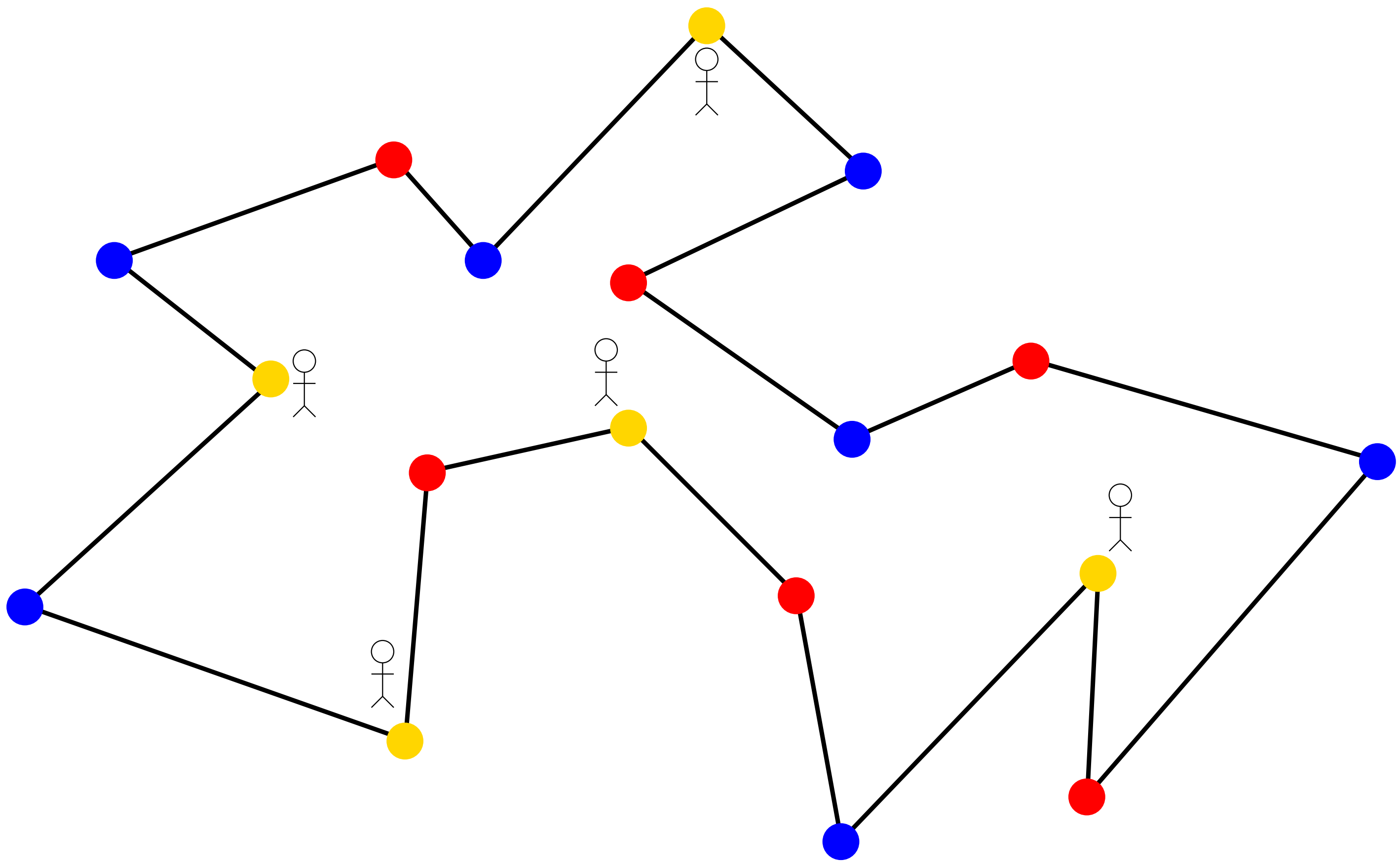
Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto. Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P.

Uma das cores é usada no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes na coloração. ■

Exemplo



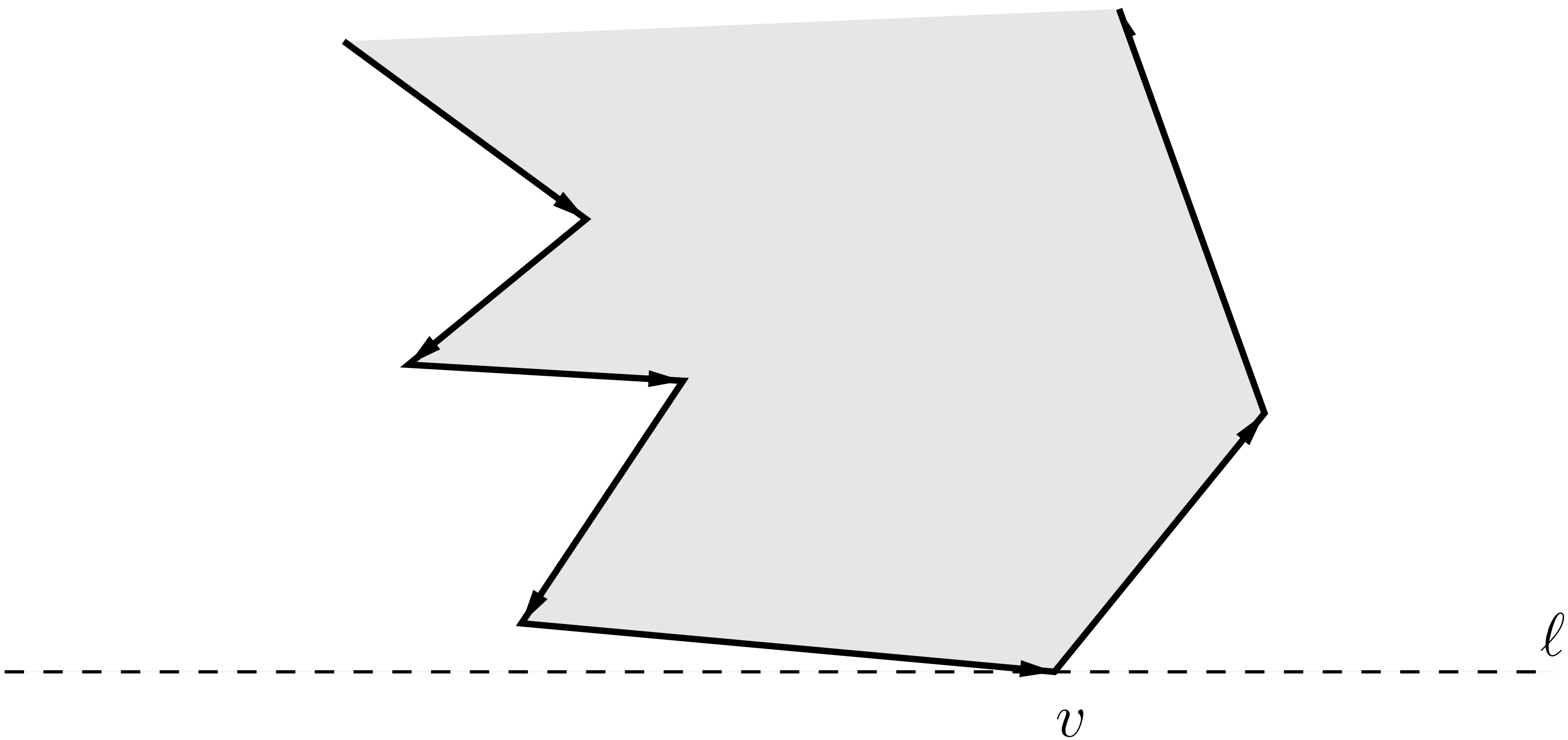
Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Prova: (Feita na aula.)



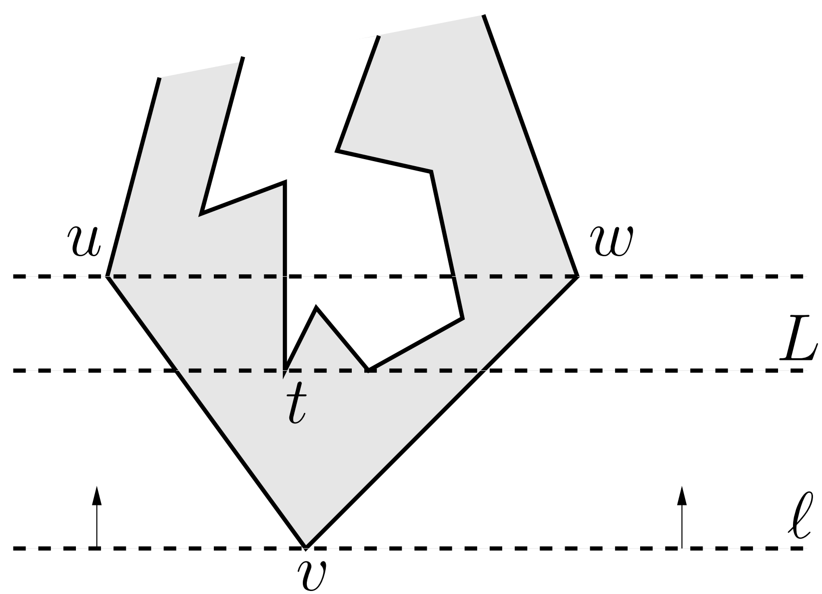
Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Prova: (Feita na aula.)



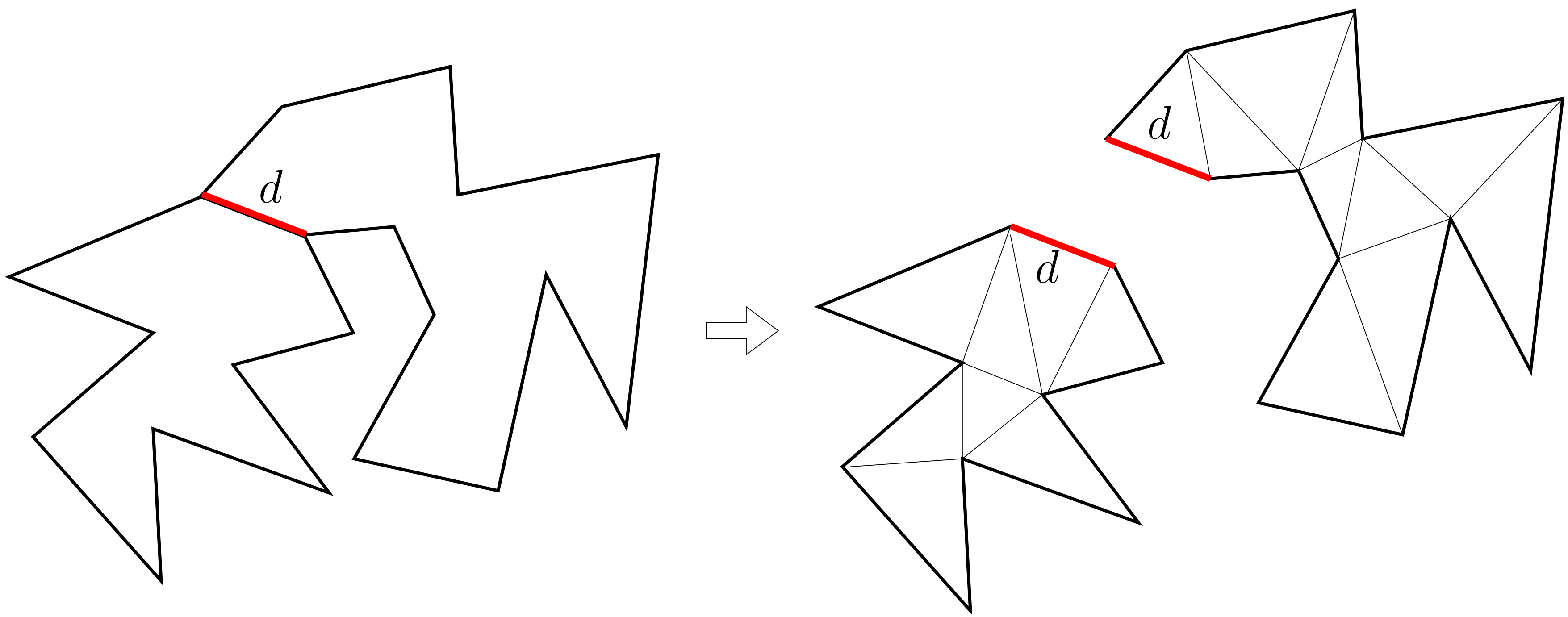
Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Prova: (Feita na aula.)



Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.

Prova: Conseqüência direta do Teorema da Triangulação.

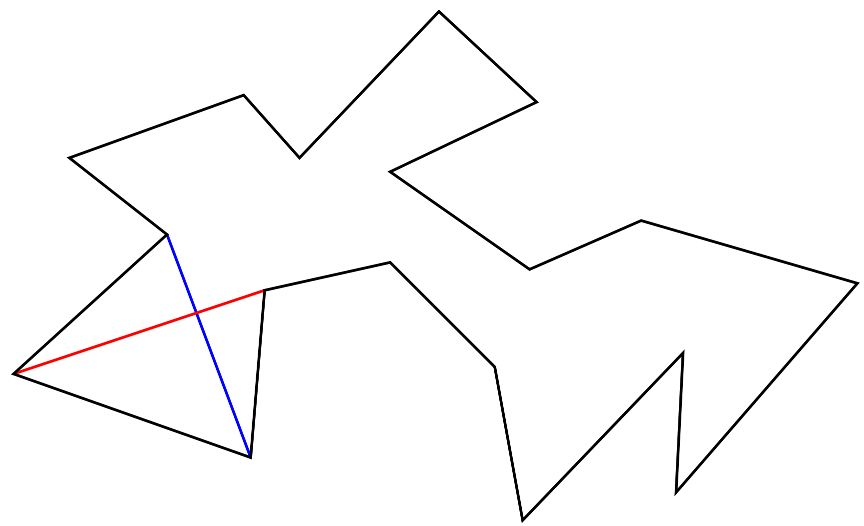
Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

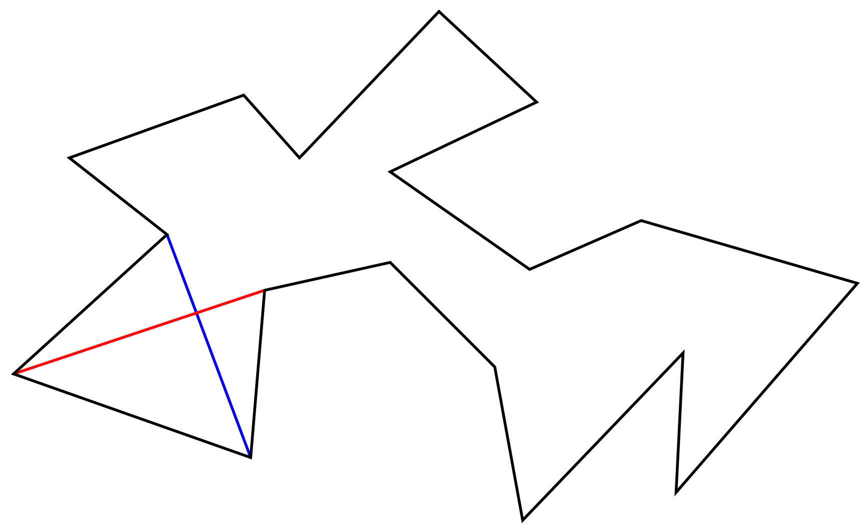
Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.



Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.



Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

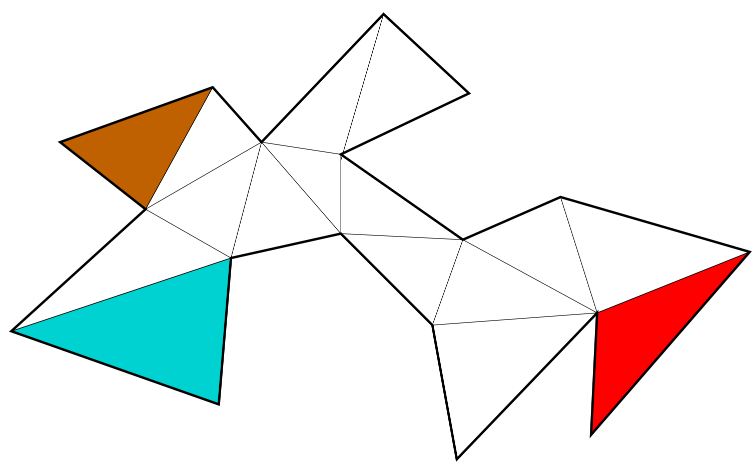
Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

Teorema 3: Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triangulos de T formam orelhas de P.

Prova: (Feita na aula.)



Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

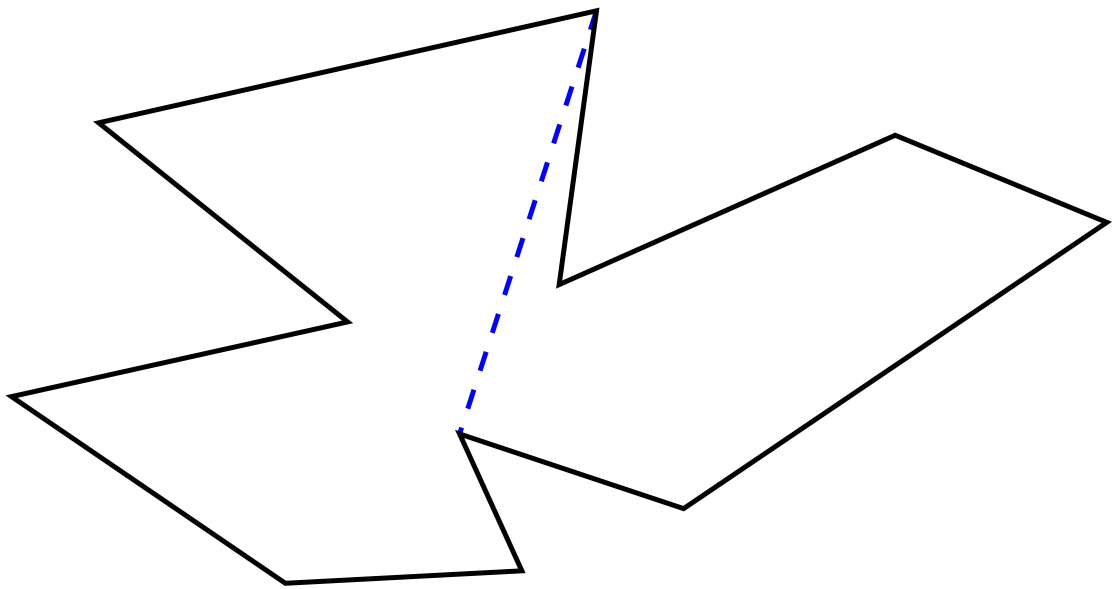
Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Prova: (Feita na aula.)

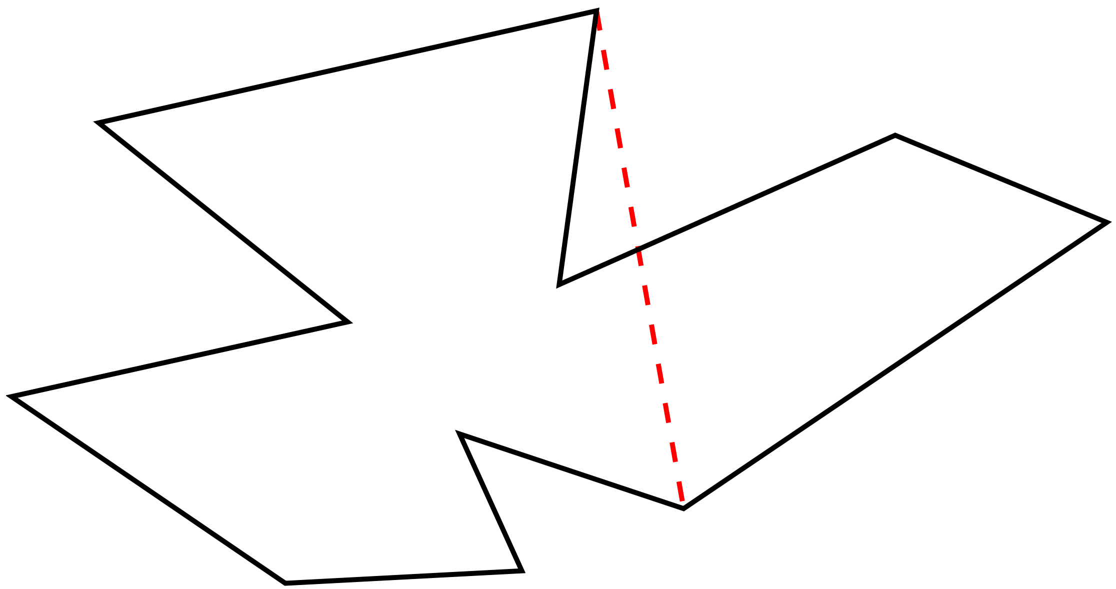
Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?



Teste de diagonal

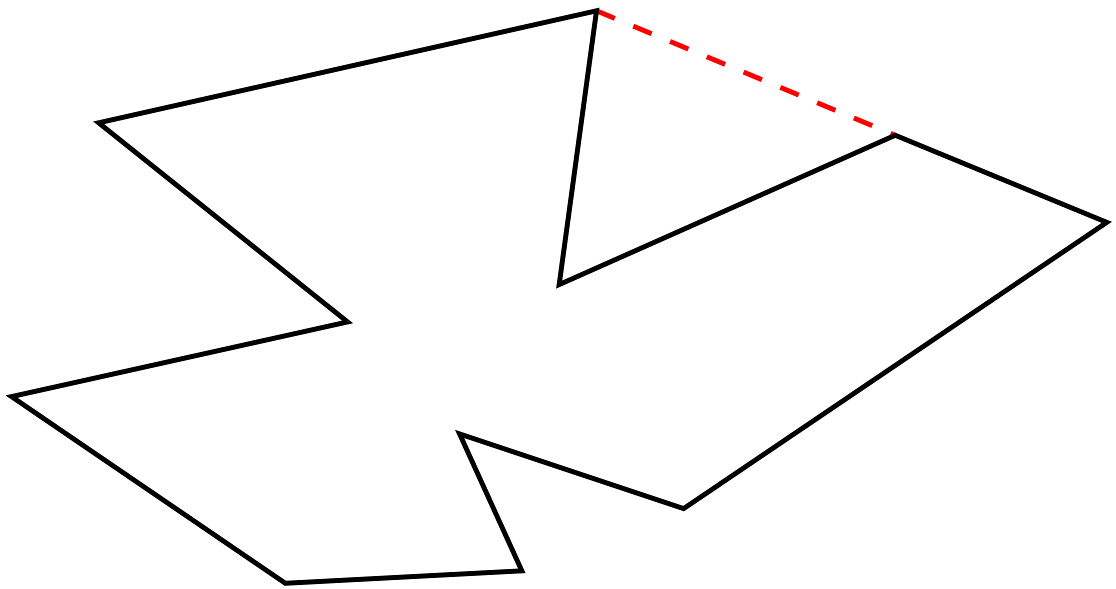
Como encontrar uma diagonal?



Interseção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?

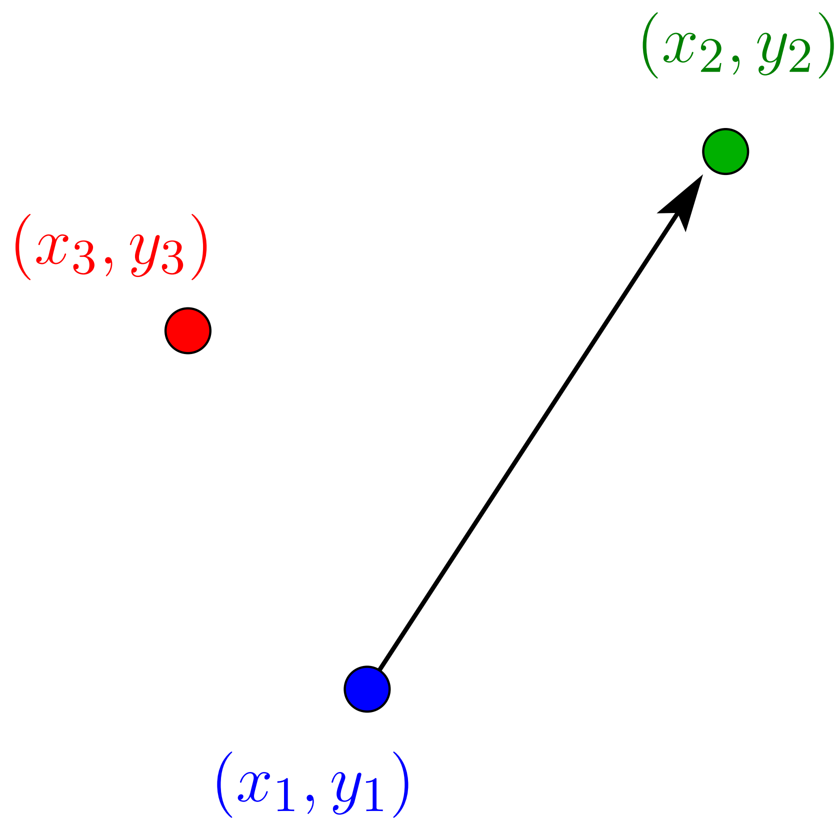


Interseção de segmentos: como decidir se
como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Pertinência: como decidir se
um segmento está dentro ou não do polígono?

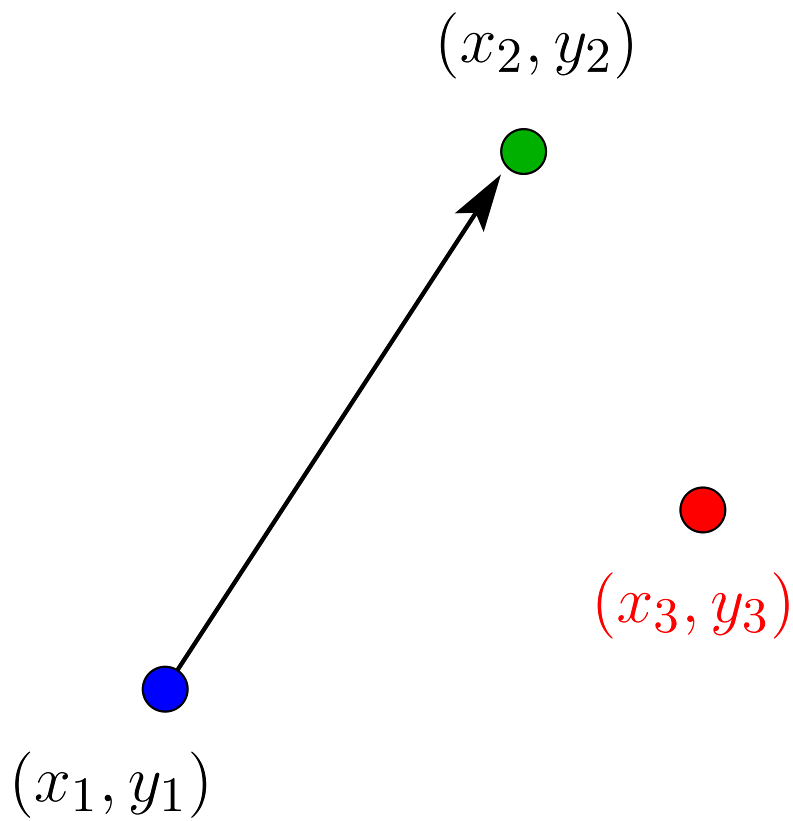
Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$ = VERDADE



Predicados geométricos

ESQUERDA$(((x_1, y_1), ((x_2, y_2), (x_3, y_3))$ = FALSO



Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$

Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$: sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$: sinal do determinante

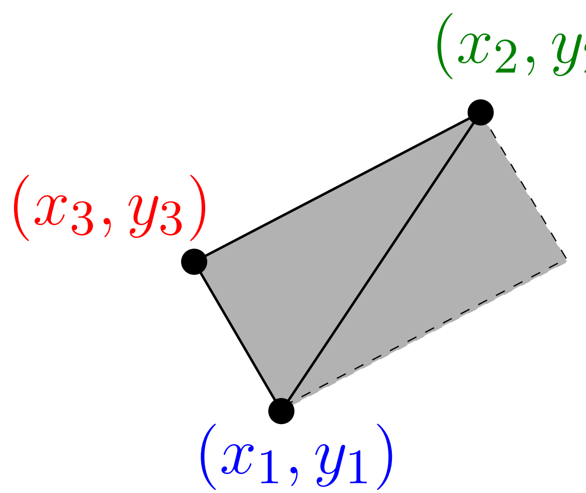
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$: sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

O valor absoluto deste número é duas vezes a área do triângulo de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3).



Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$
1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$
2 então devolva VERDADE
4 senão devolva FALSO

Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$
1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$
2 então devolva VERDADE
4 senão devolva FALSO

ESQUERDA$^+((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$
1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) > 0$
2 então devolva VERDADE
4 senão devolva FALSO

Predicados geométricos

ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$
1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$
2 então devolva VERDADE
4 senão devolva FALSO

ESQUERDA$^+((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$
1 se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) > 0$
2 então devolva VERDADE
4 senão devolva FALSO

Podemos definir similarmente

DIREITA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$
DIREITA$^+((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$

COLINEAR$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$

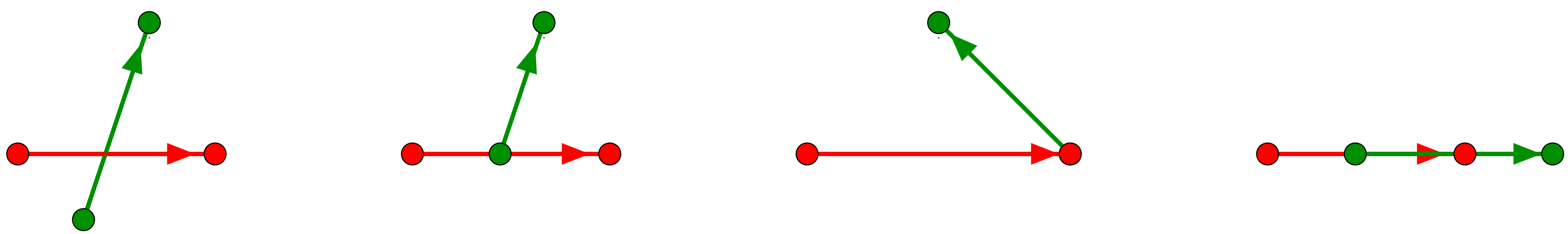
Interseção de dois segmentos

INTERSECTA:
Recebe dois segmentos e devolve VERDADE se os segmentos se intersectam, e FALSO caso contrário.

Interseção de dois segmentos

INTERSECTA:
Recebe dois segmentos e devolve VERDADE se os segmentos se intersectam, e FALSO caso contrário.

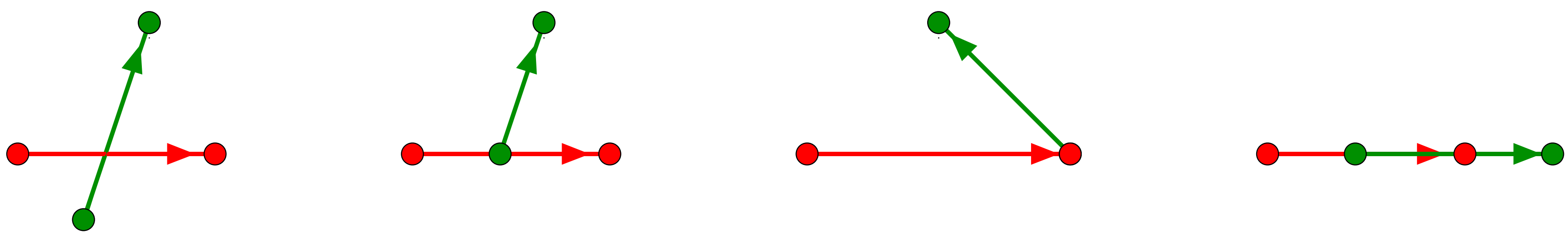
Em geral, os extremos de cada segmento devem estar em lados opostos do outro segmento, mas há casos especiais.



Interseção de dois segmentos

INTERSECTA:
Recebe dois segmentos e devolve VERDADE se os segmentos se intersectam, e FALSO caso contrário.

Em geral, os extremos de cada segmento devem estar em lados opostos do outro segmento, mas há casos especiais.



Hipótese de posição geral:
não há três vértices do polígono colineares.

Neste caso, é fácil detectar interseção de dois segmentos.

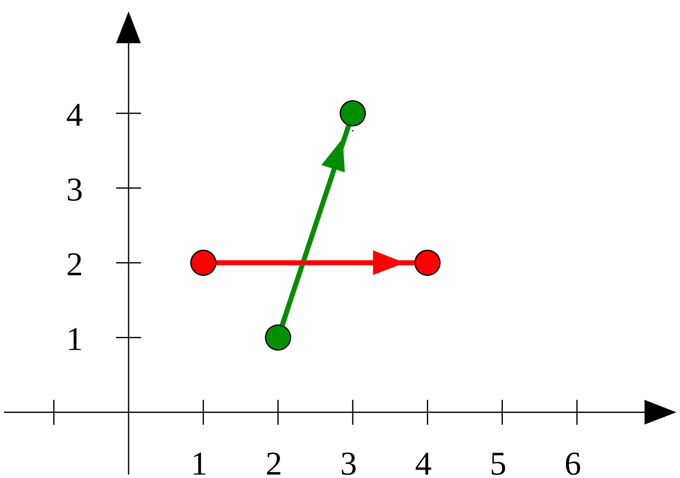
Interseção para pontos em posição geral

INTERSECTA($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$)

1 se ESQUERDA($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$) $\neq$
ESQUERDA($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4)$)
e ESQUERDA($(x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)$) $\neq$
ESQUERDA($(x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2)$)

2 então devolva VERDADE

3 senão devolva FALSO



ESQUERDA($(1,2), (4,2), (2,1)$) = FALSO

ESQUERDA($(1,2), (4,2), (3,4)$) = VERDADE

ESQUERDA($(2,1), (3,4), (1,2)$) = VERDADE

ESQUERDA($(2,1), (3,4), (4,2)$) = FALSO

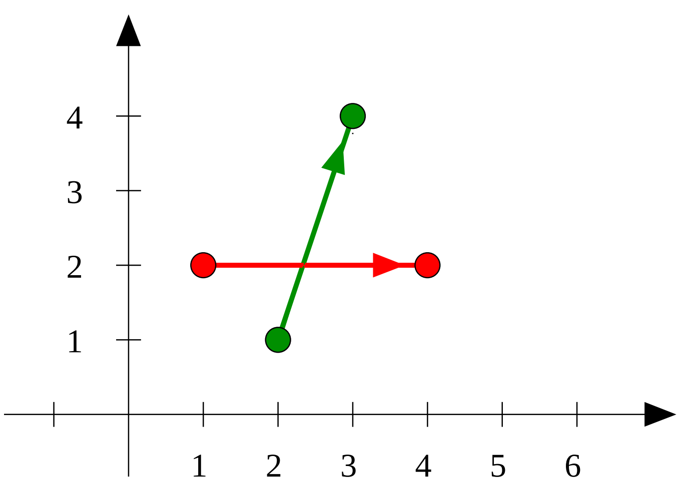
Interseção para pontos em posição geral

INTERSECTA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$

1 se ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq$
ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e ESQUERDA$((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq$
ESQUERDA$((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$

2 então devolva VERDADE

3 senão devolva FALSO



ESQUERDA$((1, 2), (4, 2), (2, 1)) =$ FALSO

ESQUERDA$((1, 2), (4, 2), (3, 4)) =$ VERDADE

ESQUERDA$((2, 1), (3, 4), (1, 2)) =$ VERDADE

ESQUERDA$((2, 1), (3, 4), (4, 2)) =$ FALSO

INTERSECTA$((1, 2), (4, 2), (2, 1), (3, 4)) =$ VERDADE

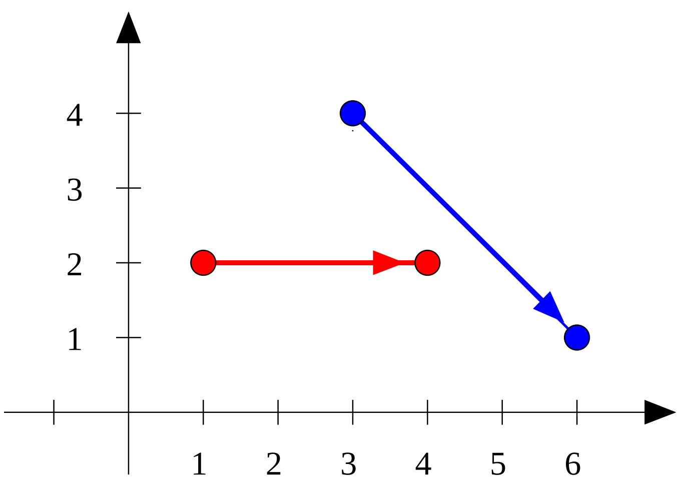
Interseção para pontos em posição geral

INTERSECTA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$

1 se ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq$
ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e ESQUERDA$((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq$
ESQUERDA$((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$

2 então devolva VERDADE

3 senão devolva FALSO

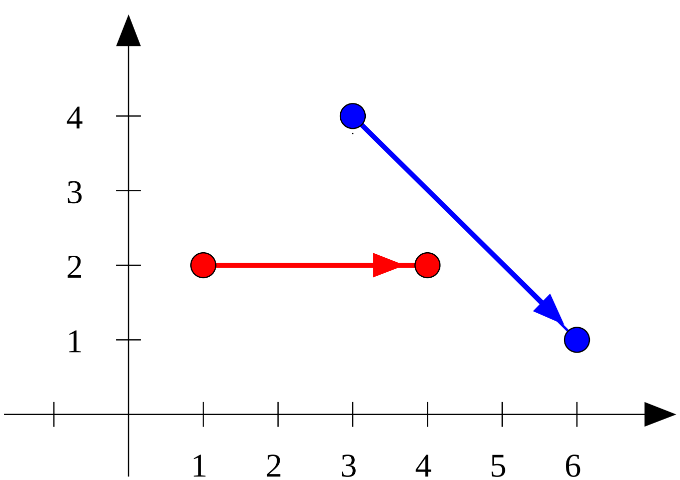


ESQUERDA$((3, 4), (6, 1), (1, 2)) =$ FALSO

ESQUERDA$((3, 4), (6, 1), (4, 2)) =$ FALSO

Interseção para pontos em posição geral

INTERSECTA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$
1 se ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \neq$
ESQUERDA$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4))$
e ESQUERDA$((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_1, y_1)) \neq$
ESQUERDA$((x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_2, y_2))$
2 então devolva VERDADE
3 senão devolva FALSO



ESQUERDA$((3, 4), (6, 1), (1, 2)) =$ FALSO

ESQUERDA$((3, 4), (6, 1), (4, 2)) =$ FALSO

INTERSECTA$((1, 2), (4, 2), (3, 4), (6, 1)) =$ FALSO

Algoritmos para triangulação

Algoritmo super ingênuo: $\mathrm{O}(n^4)$

Algoritmos para triangulação

Algoritmo super ingênuo: $\mathrm{O}(n^4)$

Algoritmo um pouco menos ingênuo:
$\mathrm{O}(n^2)$, usando orelhas!

Algoritmos para triangulação

Algoritmo super ingênuo: $\mathrm{O}(n^4)$

Algoritmo um pouco menos ingênuo:
$\mathrm{O}(n^2)$, usando orelhas!

Algoritmos mais rápidos:

- $\mathrm{O}(n \lg n)$, veremos em breve...
- $\mathrm{O}(n)$, complicado... não estudaremos...
- $\mathrm{O}(n \lg^* n)$, mais simples e rápido na prática