Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

http://www.ime.usp.br/~cris/

segundo semestre de 2011

Combinação convexa

P: coleção de pontos do plano, dada por $X[1\,..\,n], Y[1\,..\,n]$.

Combinação convexa de pontos de P: soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Fecho convexo de P: conjunto de combinações convexas de pontos de P, ou seja,

$$\operatorname{conv}(P) := \{\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}.$$

Combinação convexa

P: coleção de pontos do plano, dada por $X[1 \dots n], Y[1 \dots n]$.

Combinação convexa de pontos de P: soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Fecho convexo de P: conjunto de combinações convexas de pontos de P, ou seja,

$$\operatorname{conv}(P) := \{\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)\}.$$

Problema: Dada uma coleção P de pontos do plano, determinar o fecho convexo de P.

Mergehull

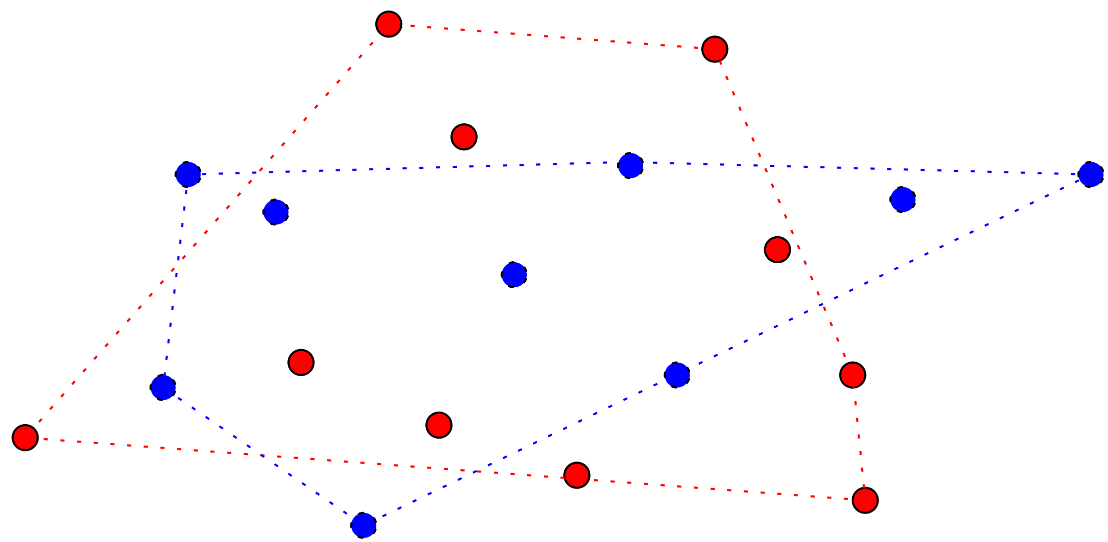
Ideia: divisão e conquista.

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Mergehull

Ideia: divisão e conquista.
Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

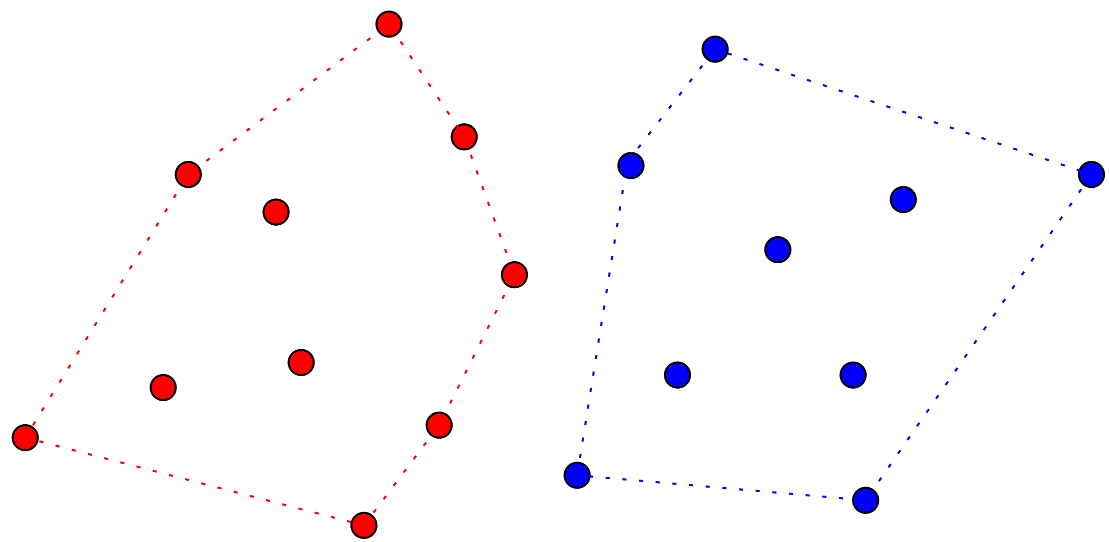
Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou...



Mergehull

Ideia: divisão e conquista.
Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

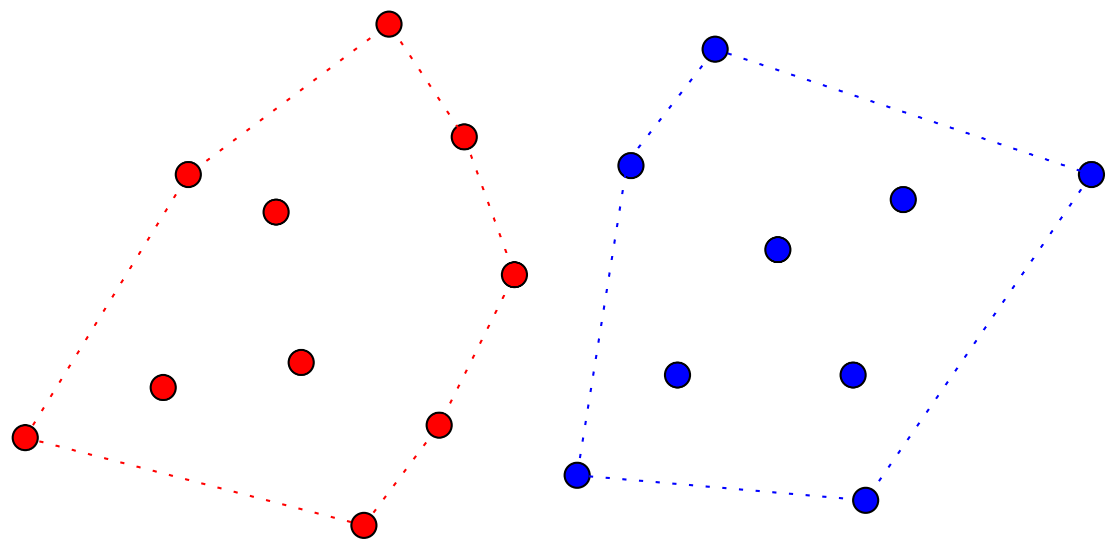
Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou...
depois de ordená-la pela X-coordenada dos pontos.



Mergehull

Ideia: divisão e conquista.
Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou...
depois de ordená-la pela X-coordenada dos pontos.



Vamos discutir a segunda implementação, em que a fase de juntar as soluções é um pouco mais simples.

Mergehull

MergeHull (X, Y, n)

1 MergeSort(X, Y, n) $\triangleright$ ordena por X-coordenada

2 devolva MergeHullRec$(X, Y, 1, n)$

Mergehull

MERGEHULL (X, Y, n)
1 MERGESORT(X, Y, n) ▷ ordena por X-coordenada
2 devolva MERGEHULLREC$(X, Y, 1, n)$

Consumo de tempo: $\Theta(n \lg n) + T(n)$,
onde $T(n)$ é o tempo consumido por
MERGEHULLREC$(X, Y, 1, n)$.

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

se $p = r$ $\triangleright$ há exatamente um ponto na coleção

  então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$

  senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

    $(H_1, h_1) \leftarrow$ MERGEHULLREC(X, Y, p, q)

    $(H_2, h_2) \leftarrow$ MERGEHULLREC$(X, Y, q{+}1, r)$

    $(H, h) \leftarrow$ JUNTAHULL$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

devolva (H, h)

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

```
se p = r        ▷ há exatamente um ponto na coleção
    então h ← 1     H[1] ← p
    senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
            (H_1, h_1) ← MERGEHULLREC(X, Y, p, q)
            (H_2, h_2) ← MERGEHULLREC(X, Y, q+1, r)
            (H, h) ← JUNTAHULL(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)
devolva (H, h)
```

Se conseguirmos uma implementação do JUNTAHULL$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $\mathrm{O}(n)$, então...

Miolo recursivo do Mergehull

MergeHullRec (X, Y, p, r)
se $p = r$ $\triangleright$ há exatamente um ponto na coleção
então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
$(H_1, h_1) \leftarrow$ MergeHullRec(X, Y, p, q)
$(H_2, h_2) \leftarrow$ MergeHullRec$(X, Y, q{+}1, r)$
$(H, h) \leftarrow$ JuntaHull$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
devolva (H, h)

Se conseguirmos uma implementação do JuntaHull$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $\mathrm{O}(n)$, então...

Consumo de tempo do MergeHullRec:
$T(n) = 2T(n/2) + \mathrm{O}(n)$, onde $n = r - p + 1$.

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

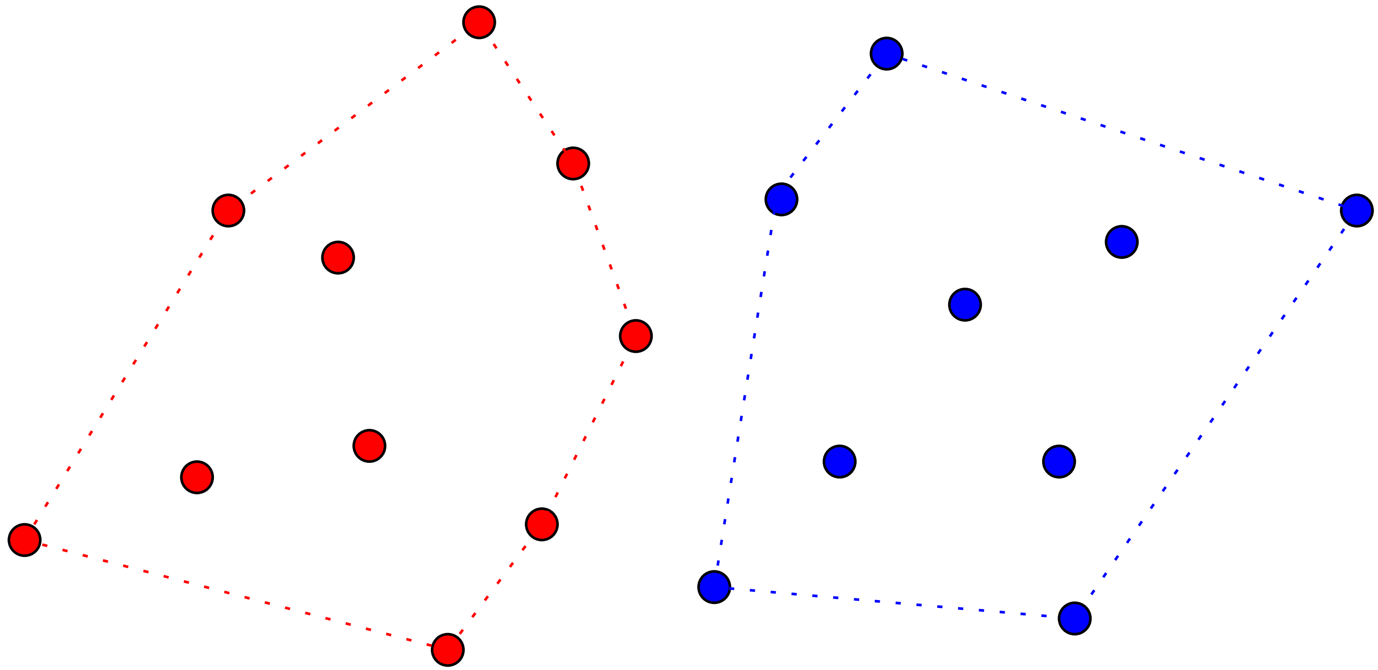
```
se p = r   ▷ há exatamente um ponto na coleção
    então h ← 1    H[1] ← p
    senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
            (H_1, h_1) ← MERGEHULLREC(X, Y, p, q)
            (H_2, h_2) ← MERGEHULLREC(X, Y, q+1, r)
            (H, h) ← JUNTAHULL(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)
devolva (H, h)
```

Se conseguirmos uma implementação do JUNTAHULL$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $\mathrm{O}(n)$, então...

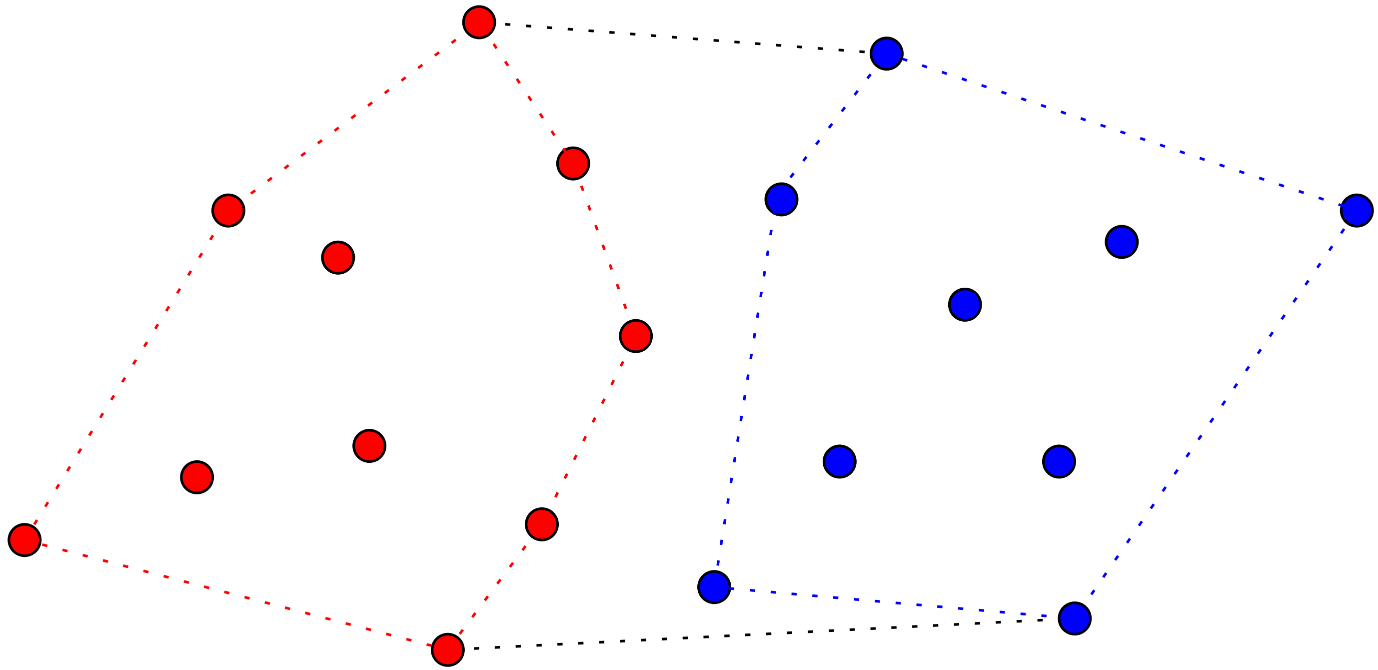
Consumo de tempo do MERGEHULLREC:
$T(n) = 2T(n/2) + \mathrm{O}(n)$, onde $n = r - p + 1$.

A solução de tal recorrência é $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Como juntar o fecho de duas coleções?

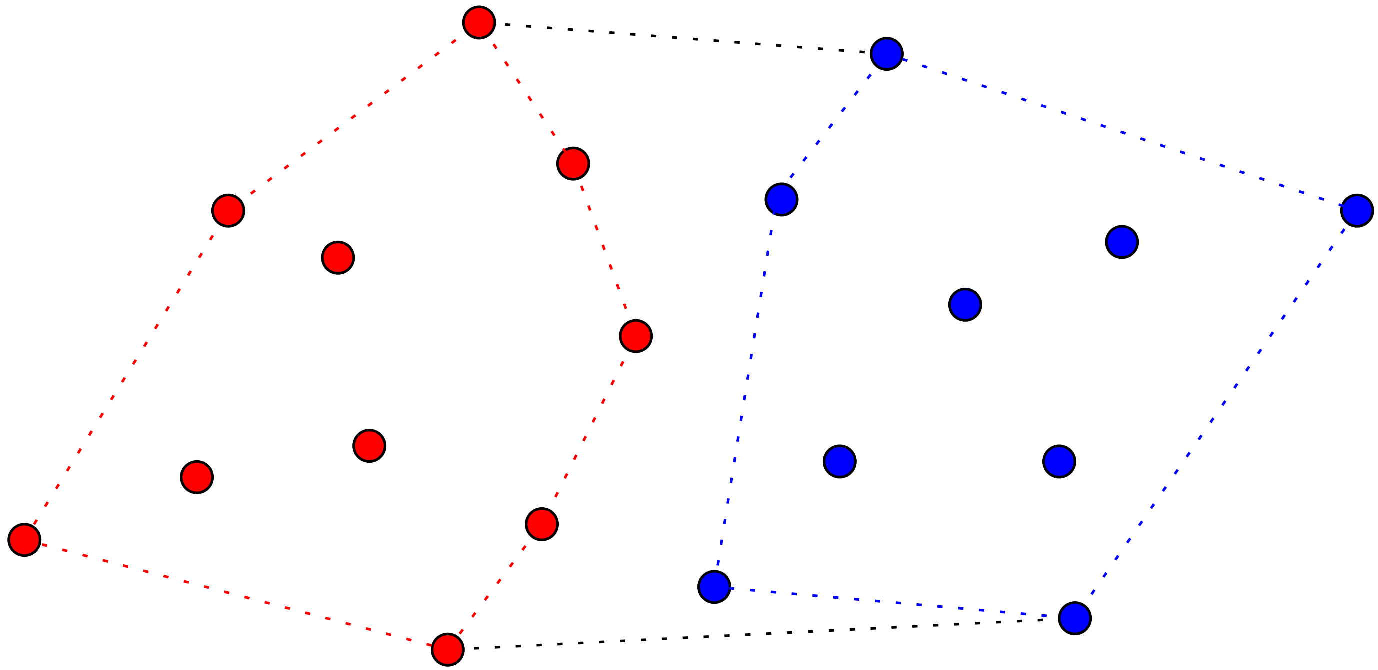


Como juntar o fecho de duas coleções?



Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

Como juntar o fecho de duas coleções?

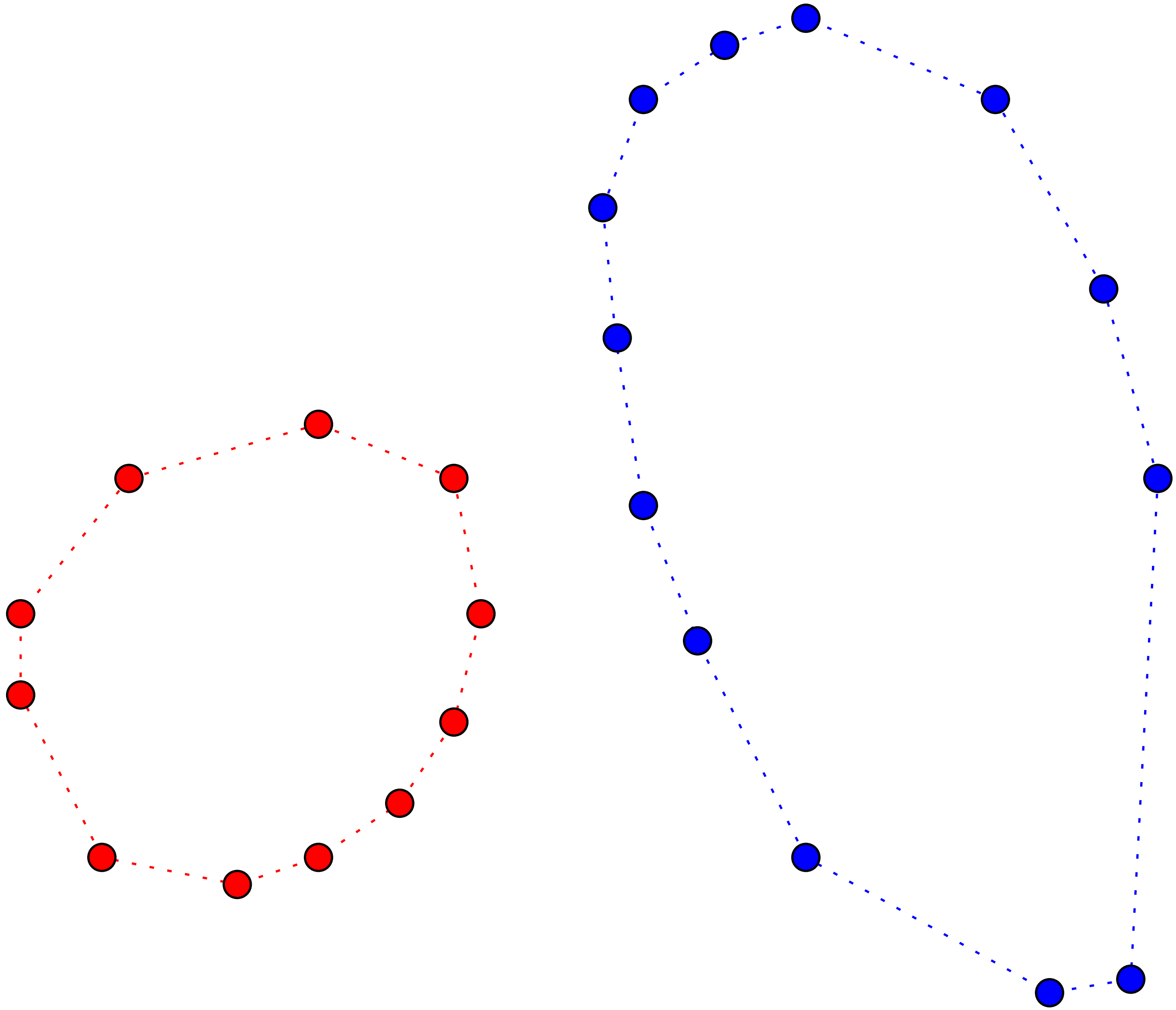


Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

Hipótese simplificadora: não há três pontos colineares nem dois pontos com a mesma Y-coordenada.

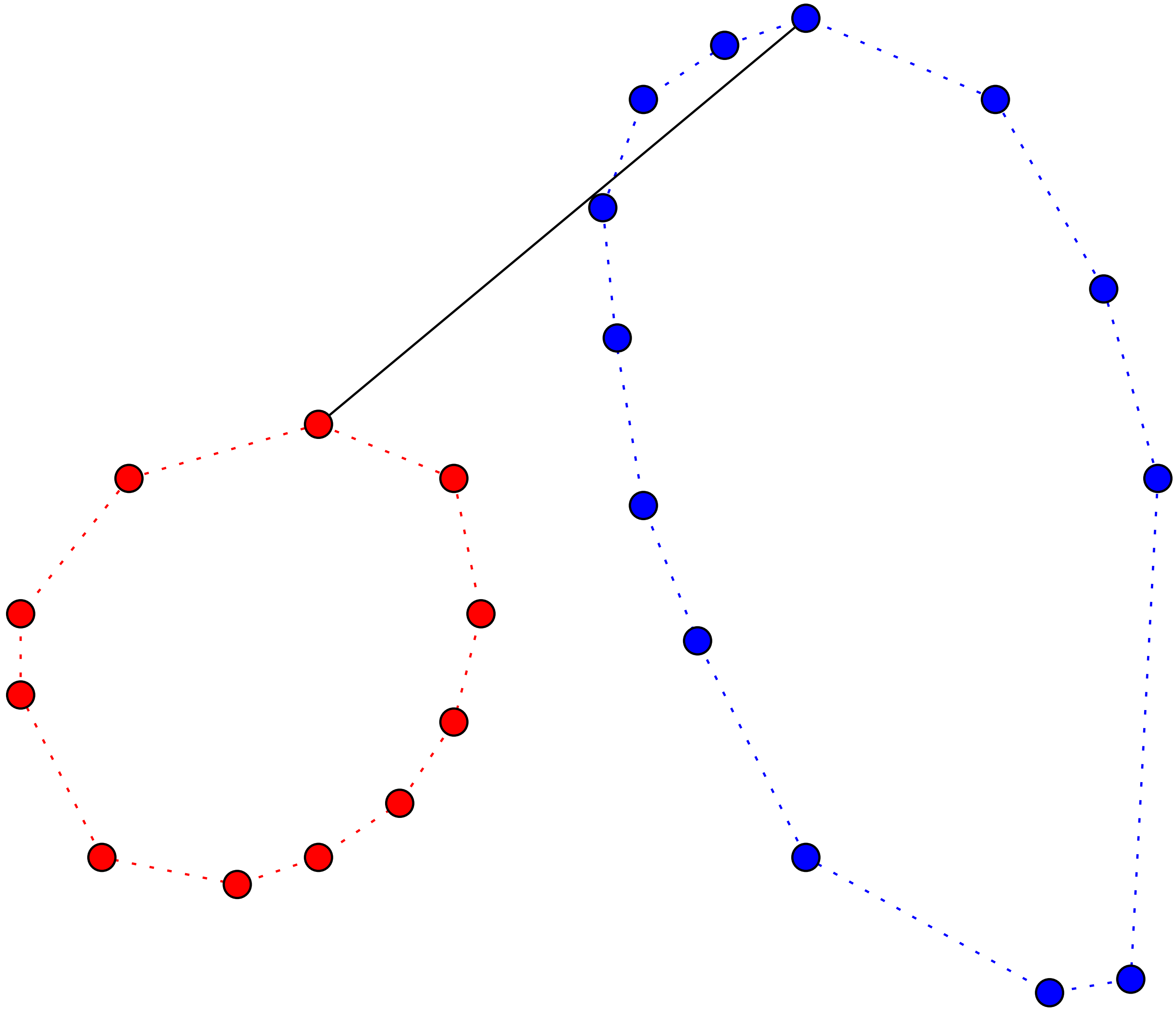
Como juntar o fecho de duas coleções?

Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

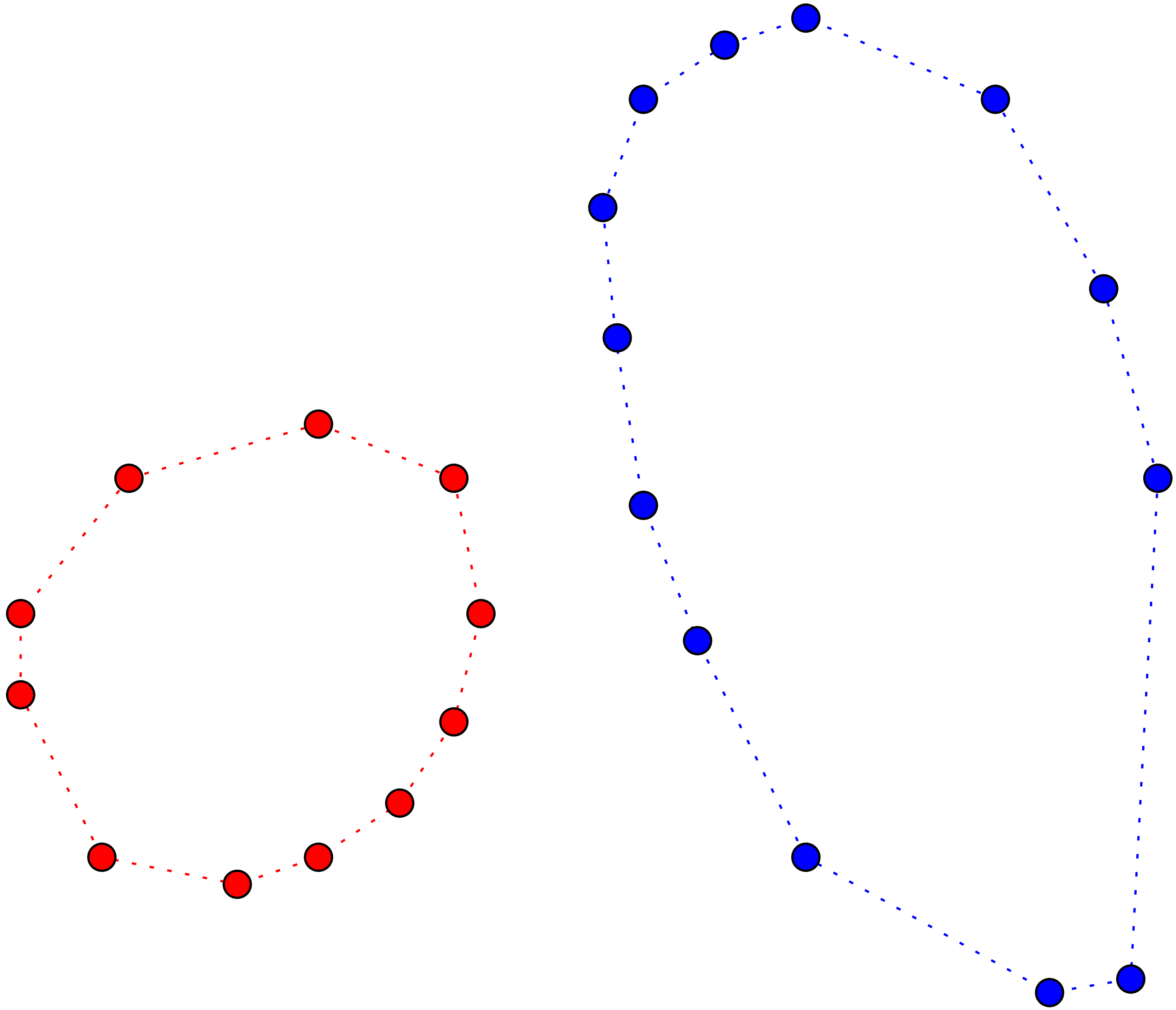


Como juntar o fecho de duas coleções?

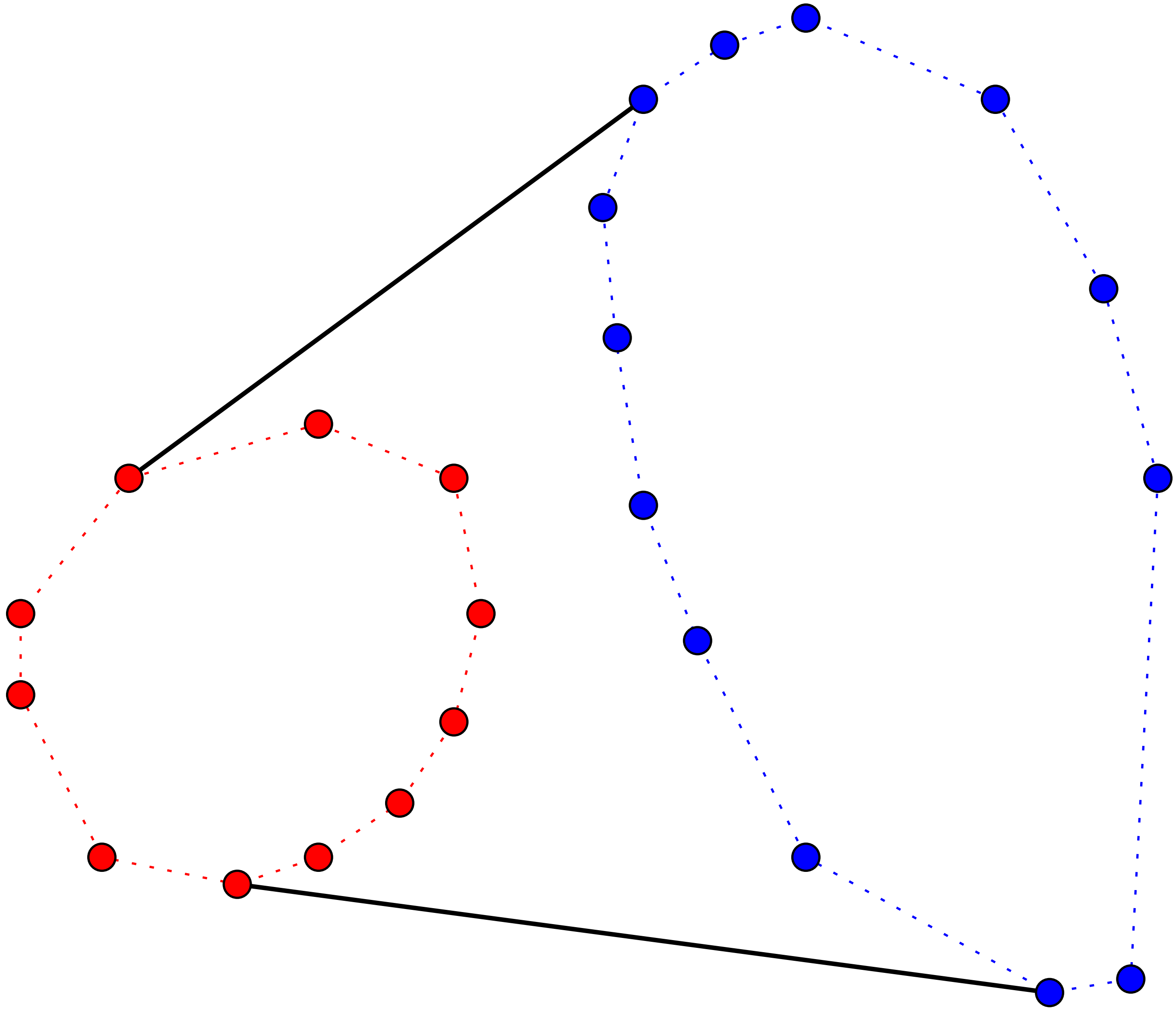
Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos? Não...



Como juntar o fecho de duas coleções?

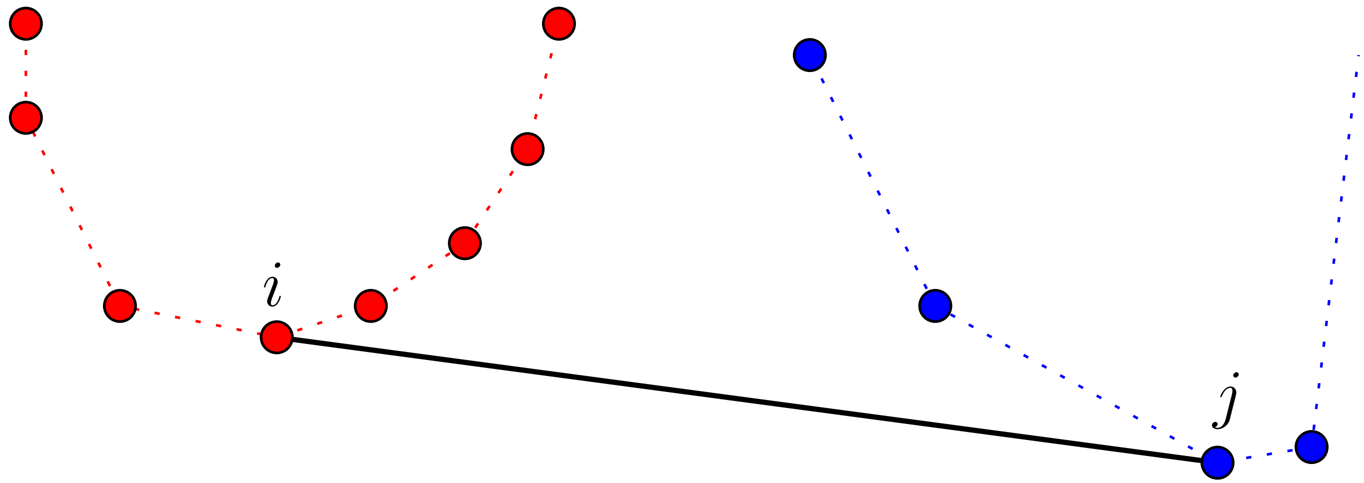


Como juntar o fecho de duas coleções?



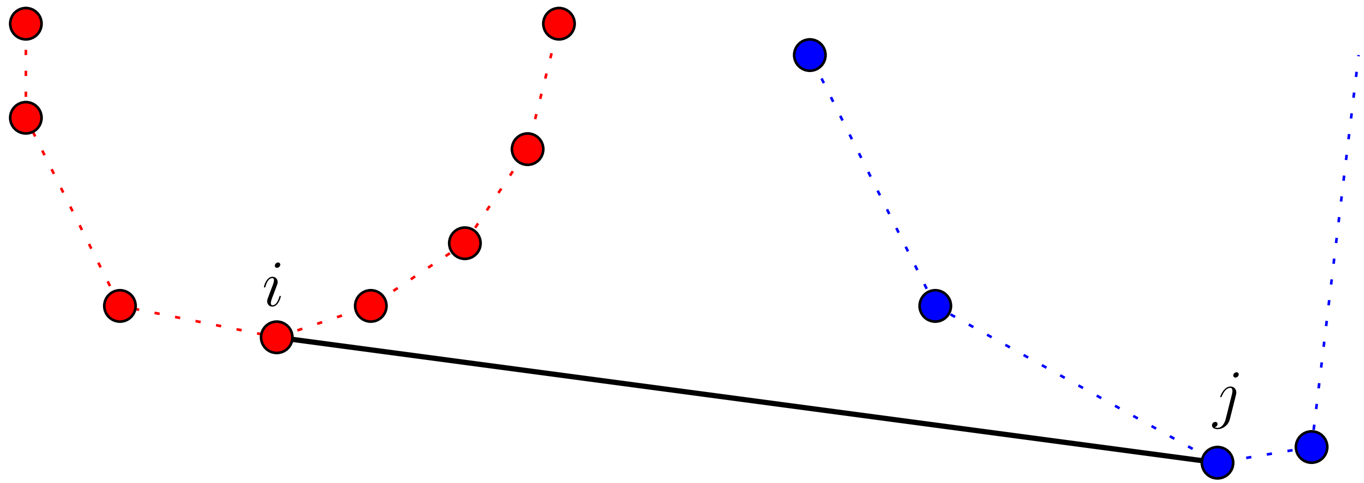
Basta encontrar a tangente inferior e a tangente superior.

Tangente inferior



O par (i, j)

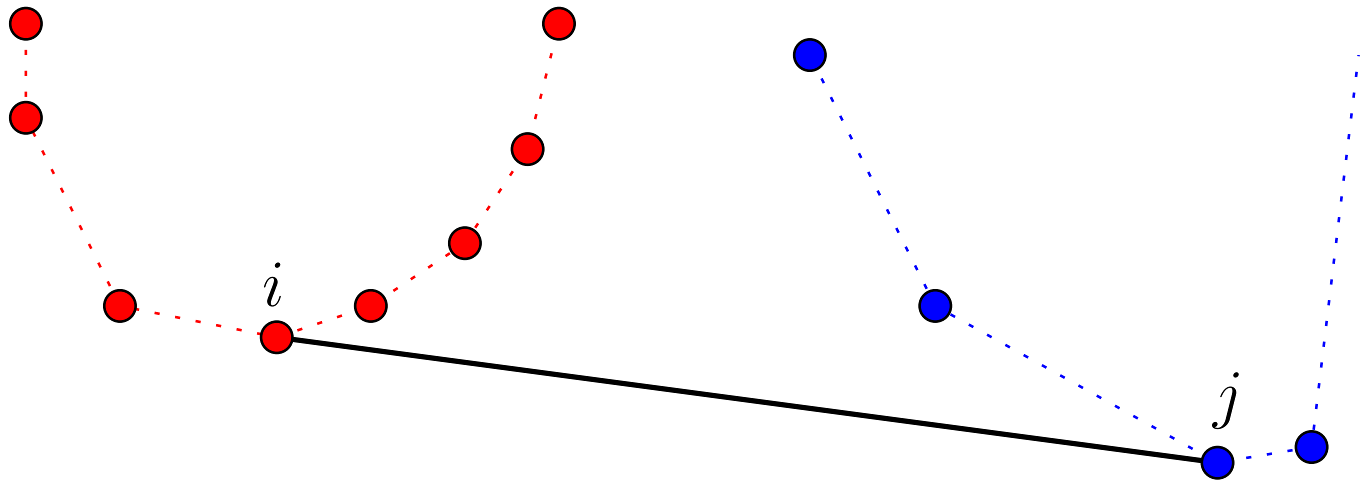
Tangente inferior



O par $(\textcolor{red}{i}, \textcolor{blue}{j})$

é uma tangente inferior para a coleção vermelha se

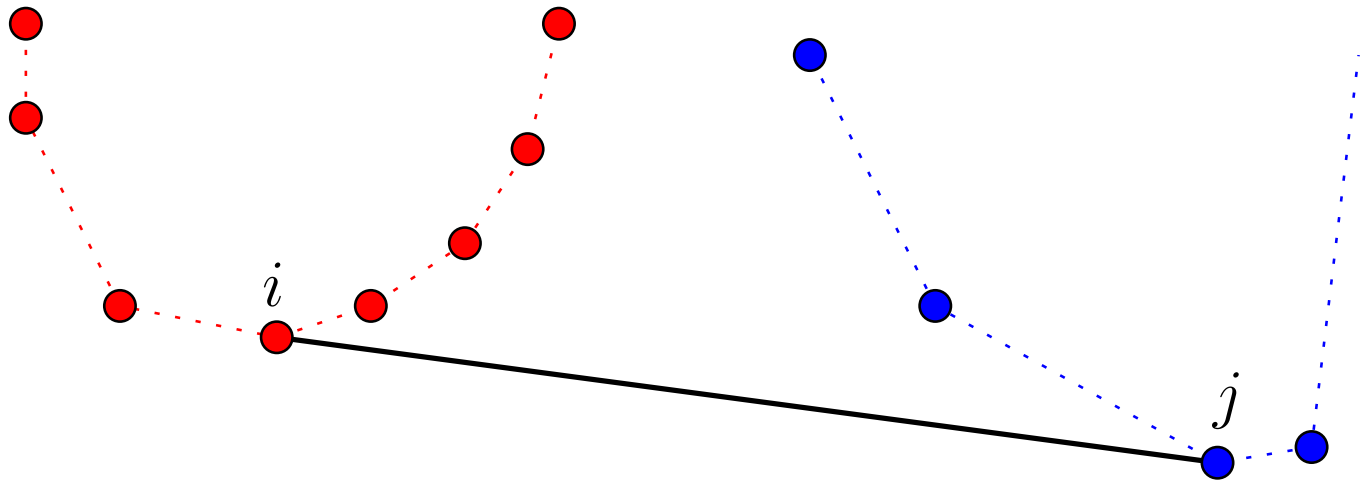
Tangente inferior



O par (i, j)

é uma tangente inferior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão "acima" do segmento definido por (i, j),

Tangente inferior

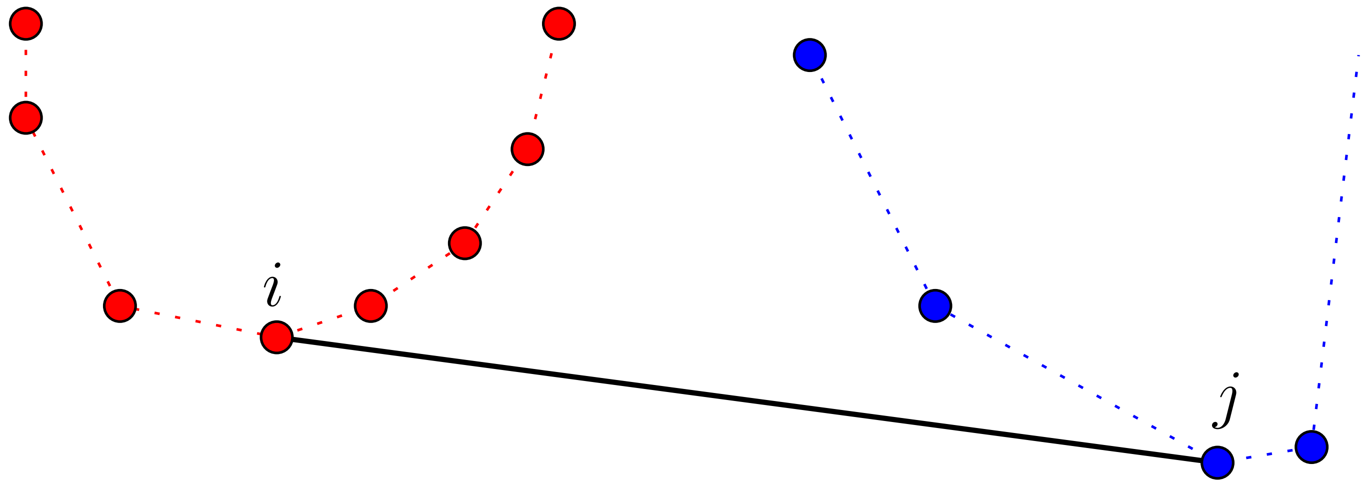


O par (i, j)

é uma tangente inferior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão "acima" do segmento definido por (i, j),

é uma tangente inferior para a coleção azul se

Tangente inferior

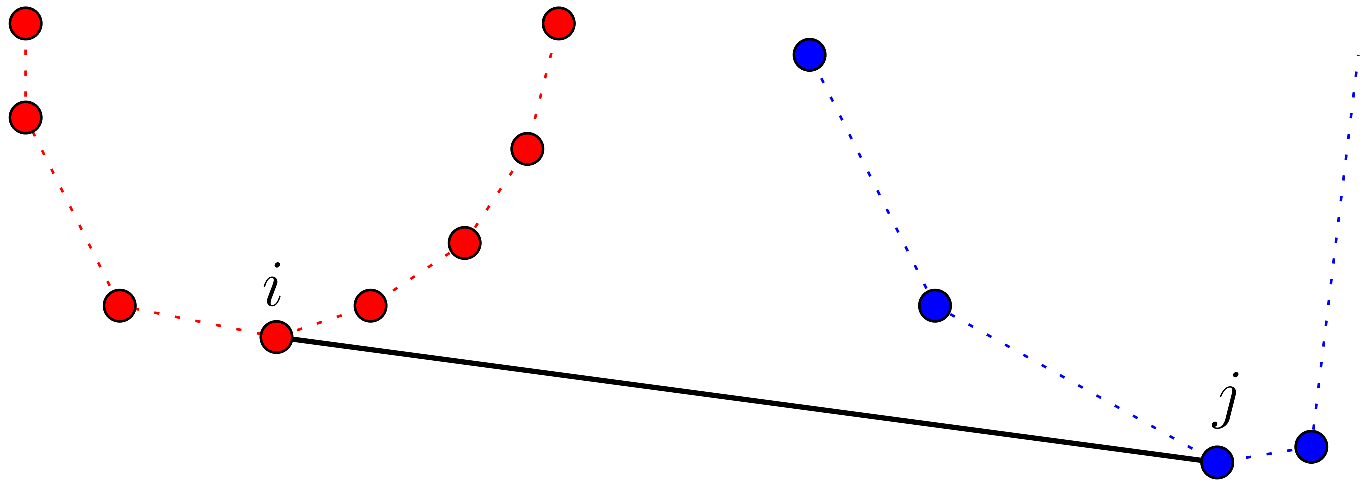


O par (i, j)

é uma tangente inferior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão "acima" do segmento definido por (i, j),

é uma tangente inferior para a coleção azul se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão "acima" do segmento definido por (i, j),

Tangente inferior



O par (i, j)

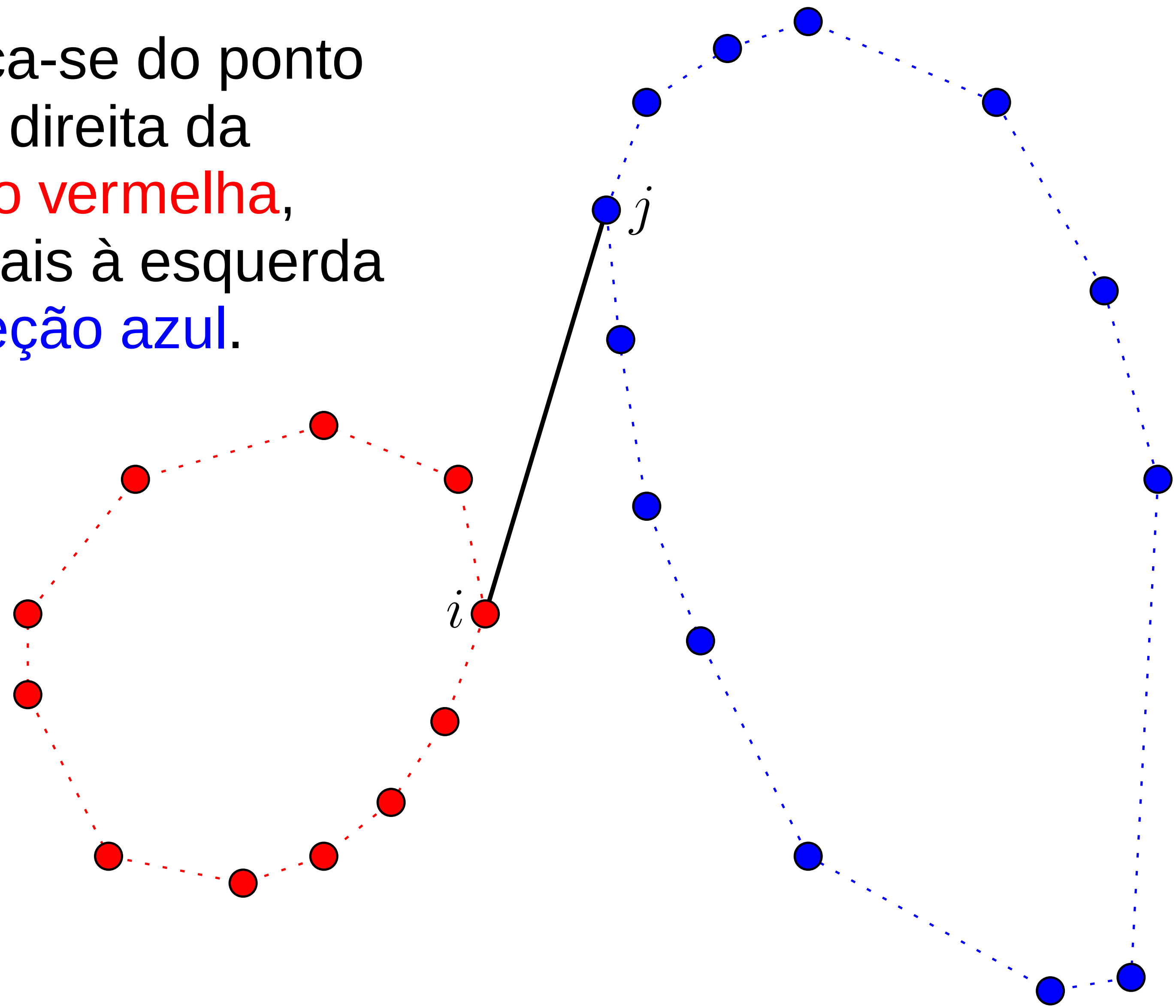
é uma tangente inferior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j),

é uma tangente inferior para a coleção azul se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j),

é uma tangente inferior se for os dois acima.

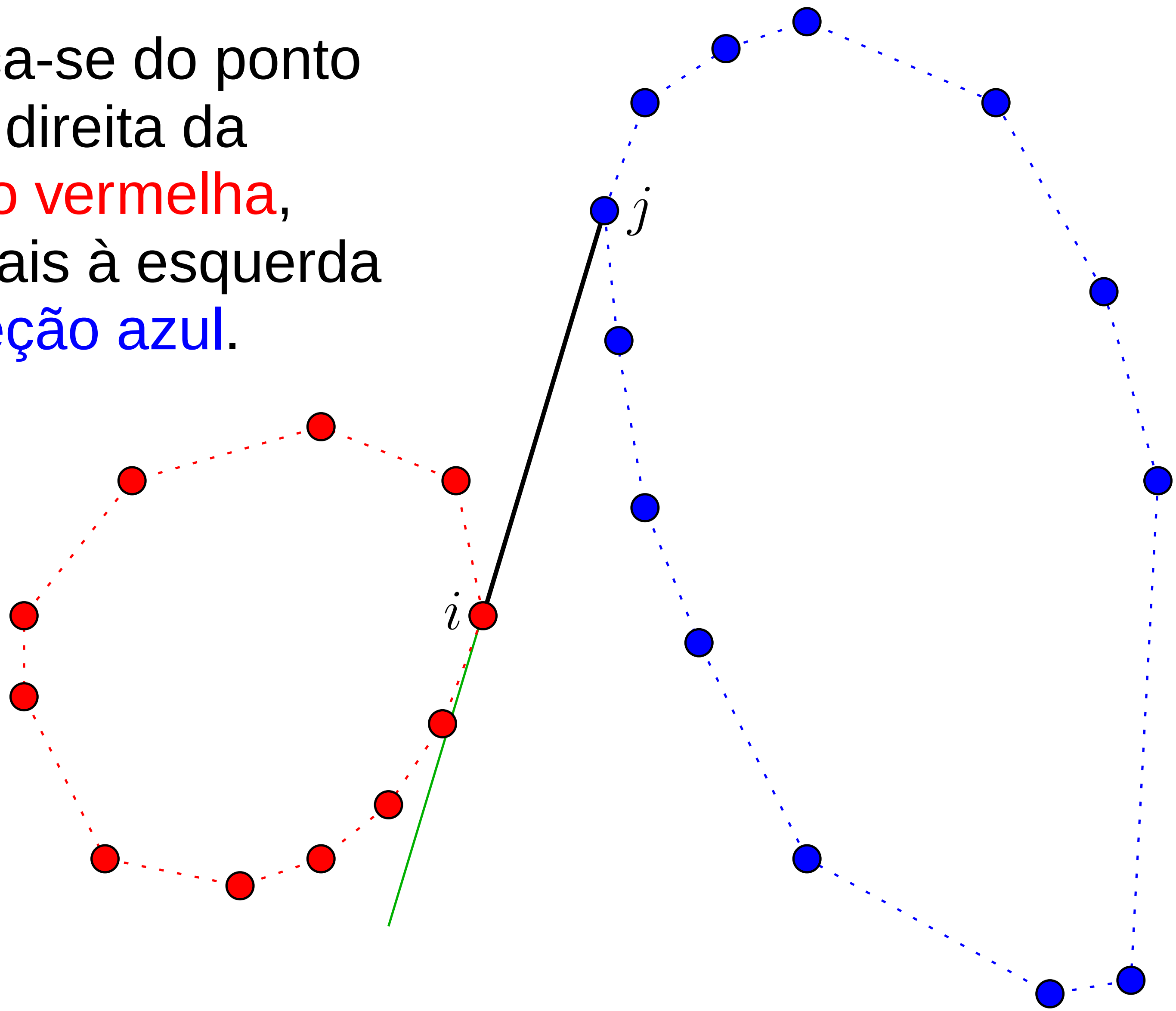
Como encontrar a tangente inferior?

Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



Como encontrar a tangente inferior?

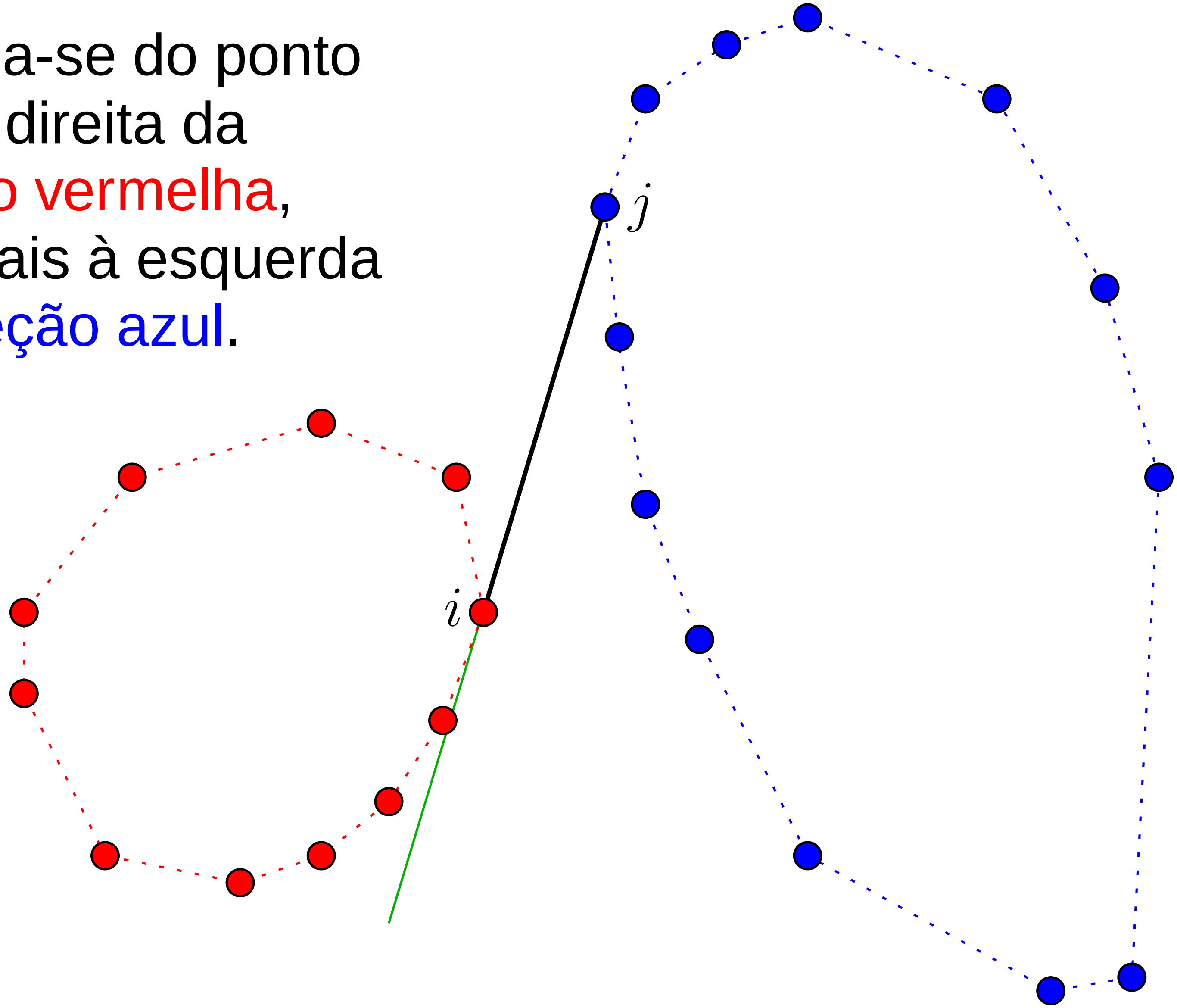
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha?

Como encontrar a tangente inferior?

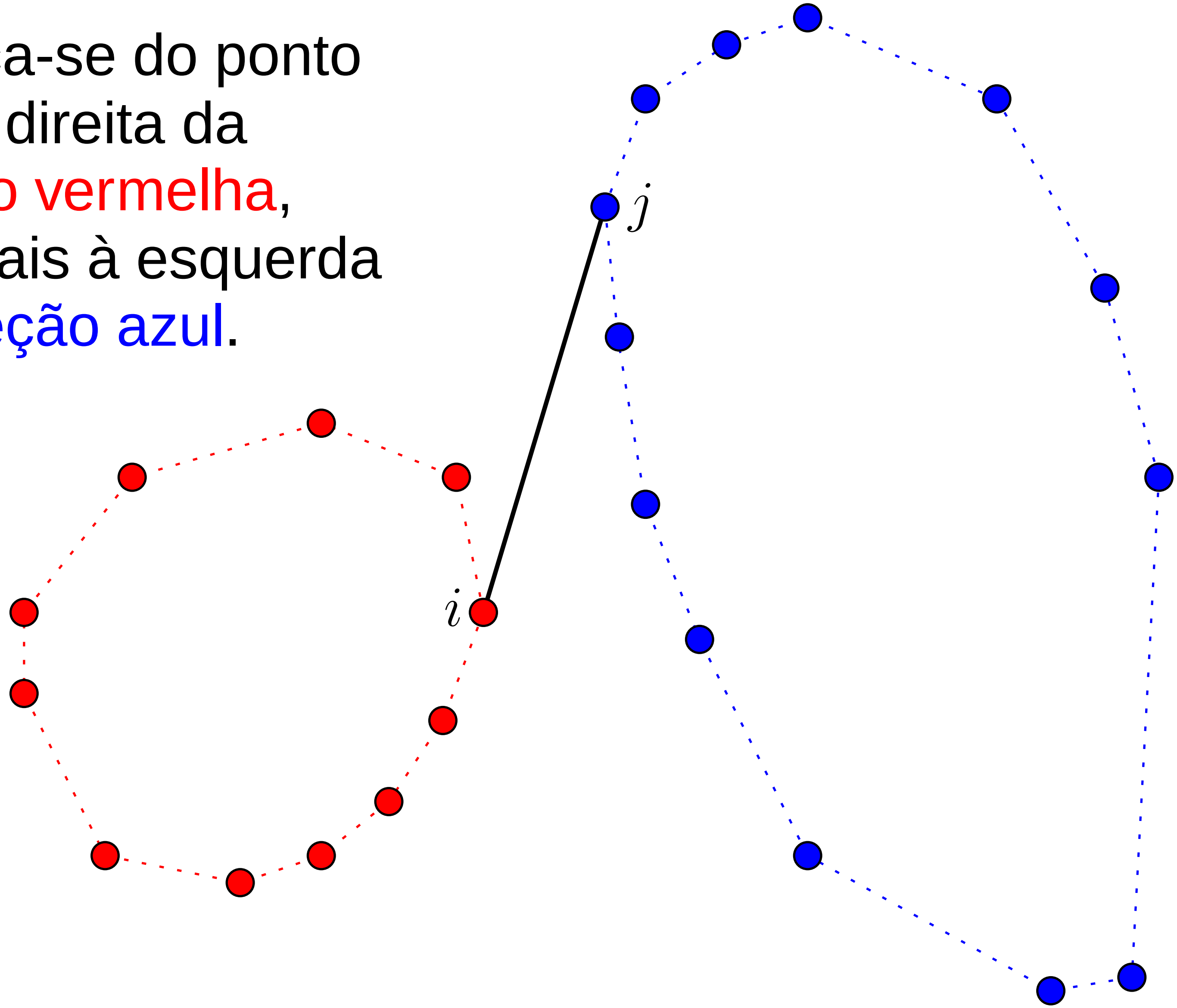
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Sim!

Como encontrar a tangente inferior?

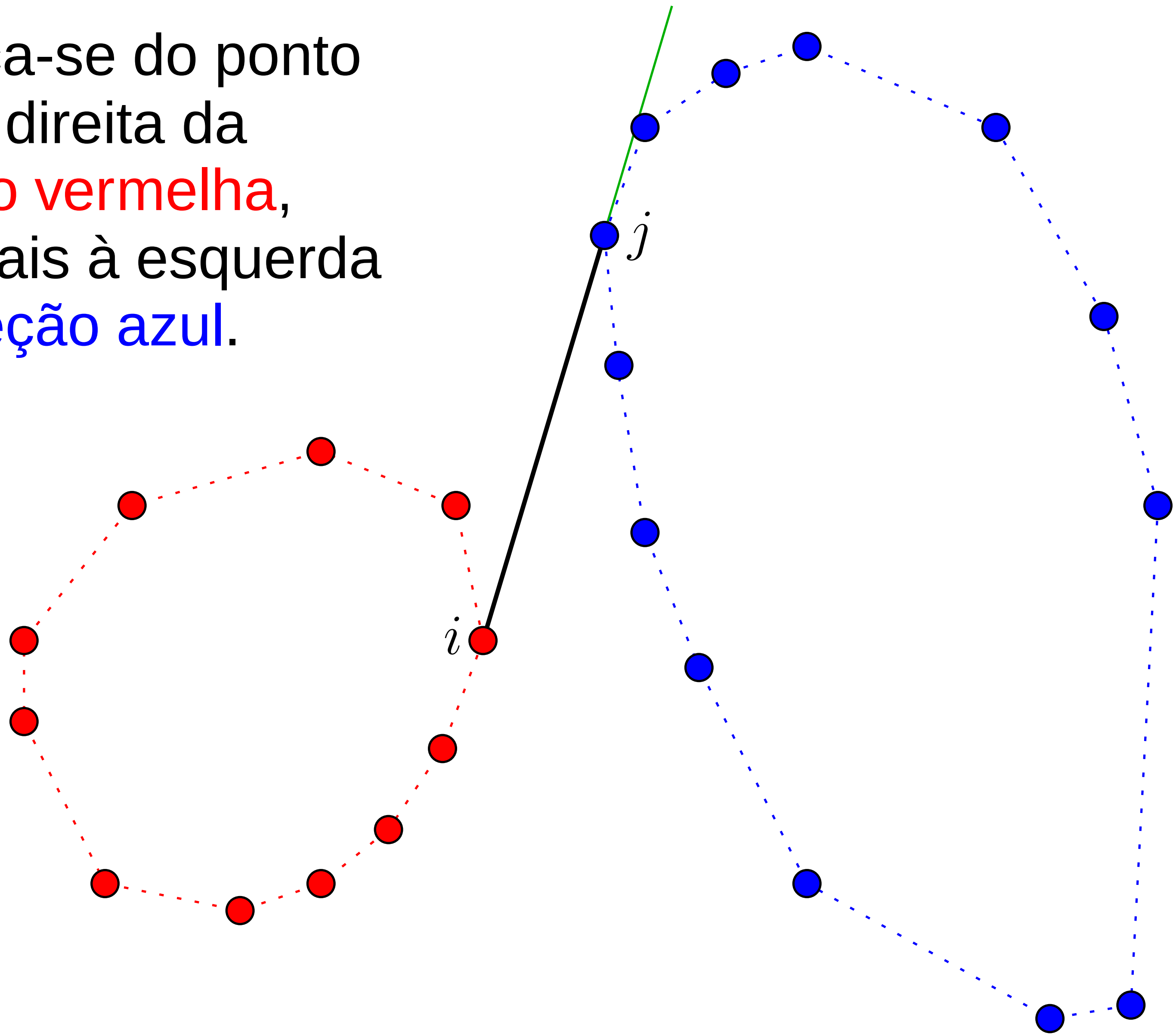
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul?

Como encontrar a tangente inferior?

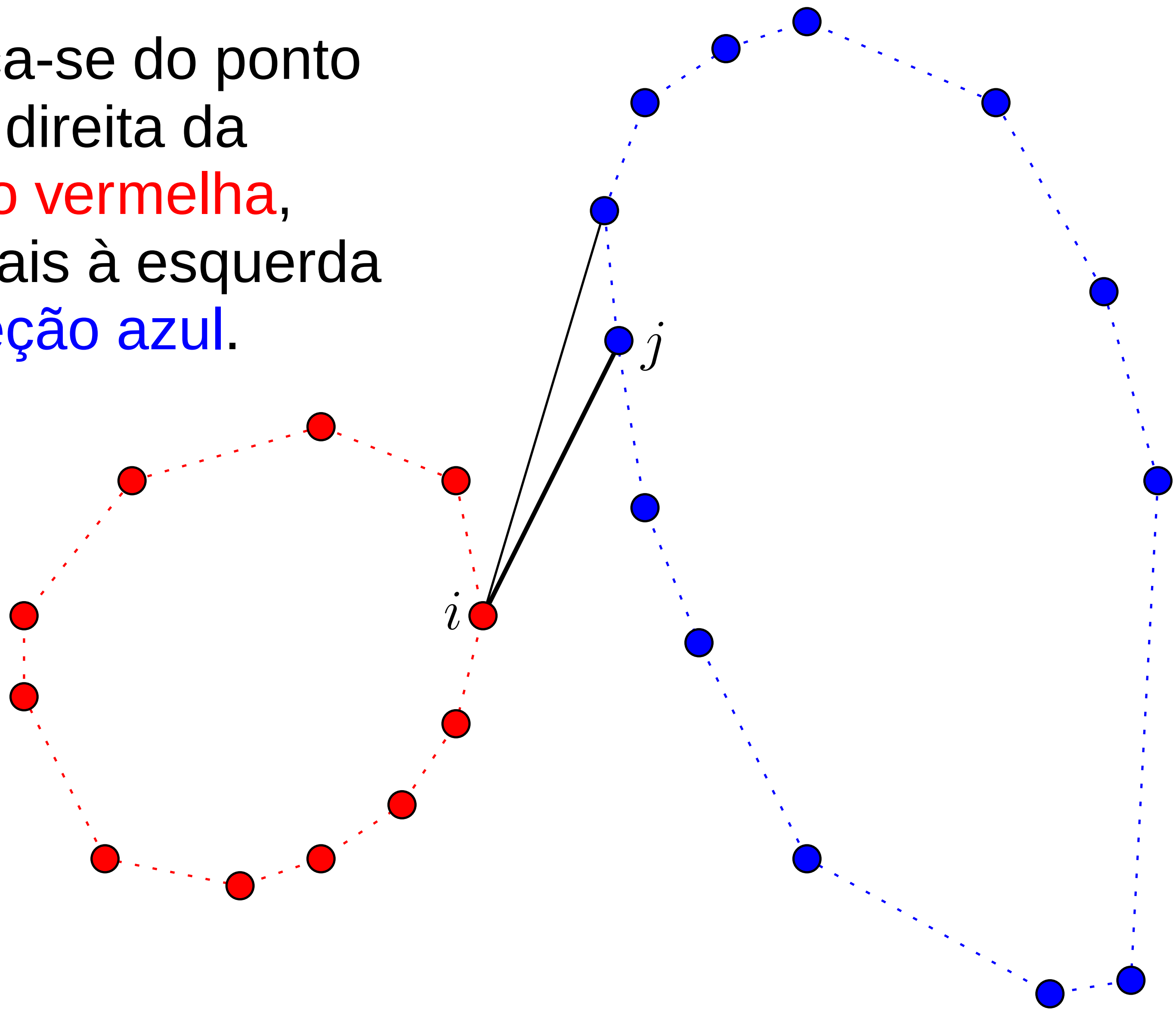
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente *inferior* da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

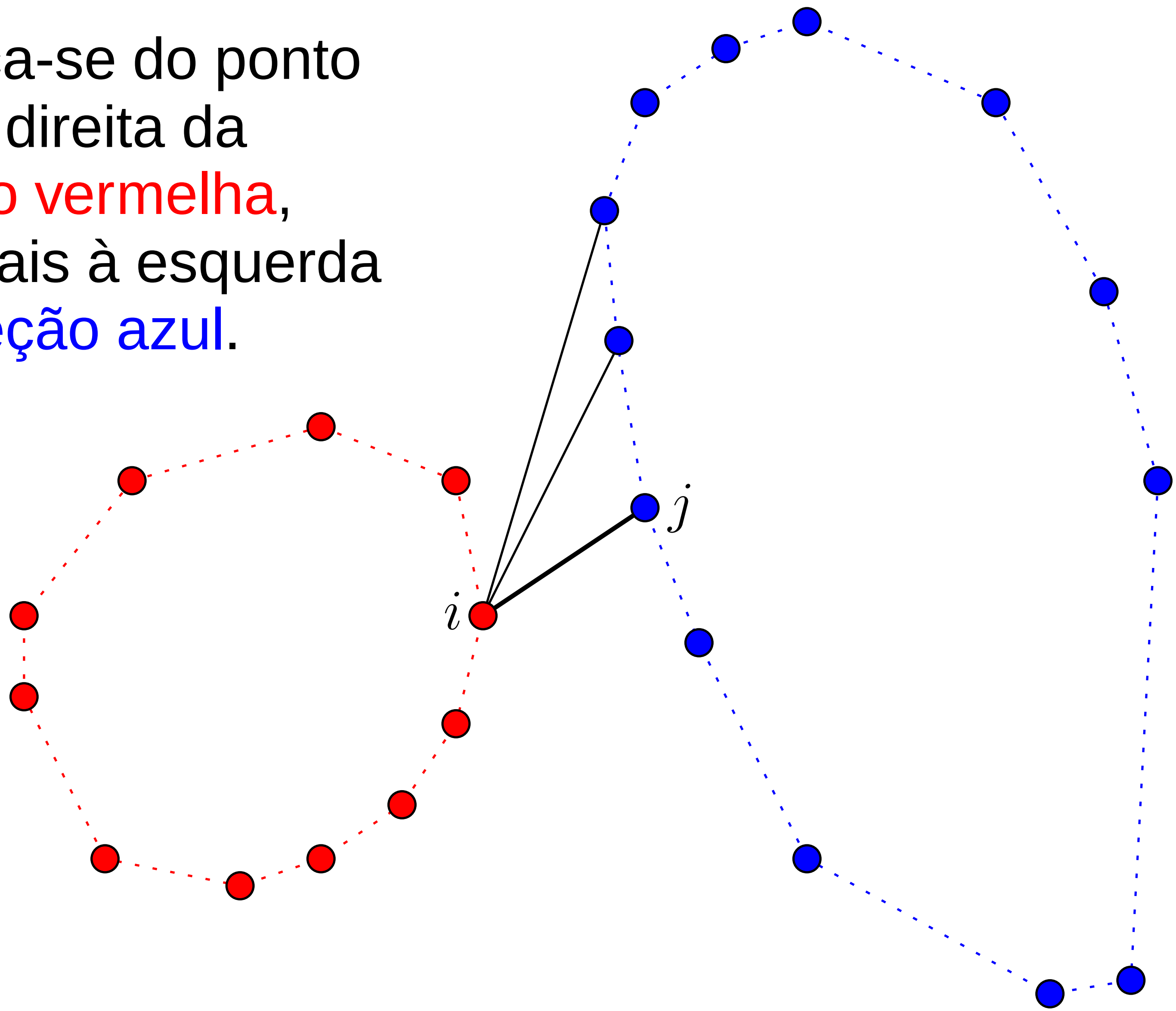
Começa-se do ponto
mais à direita da
coleção vermelha,
e do mais à esquerda
da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

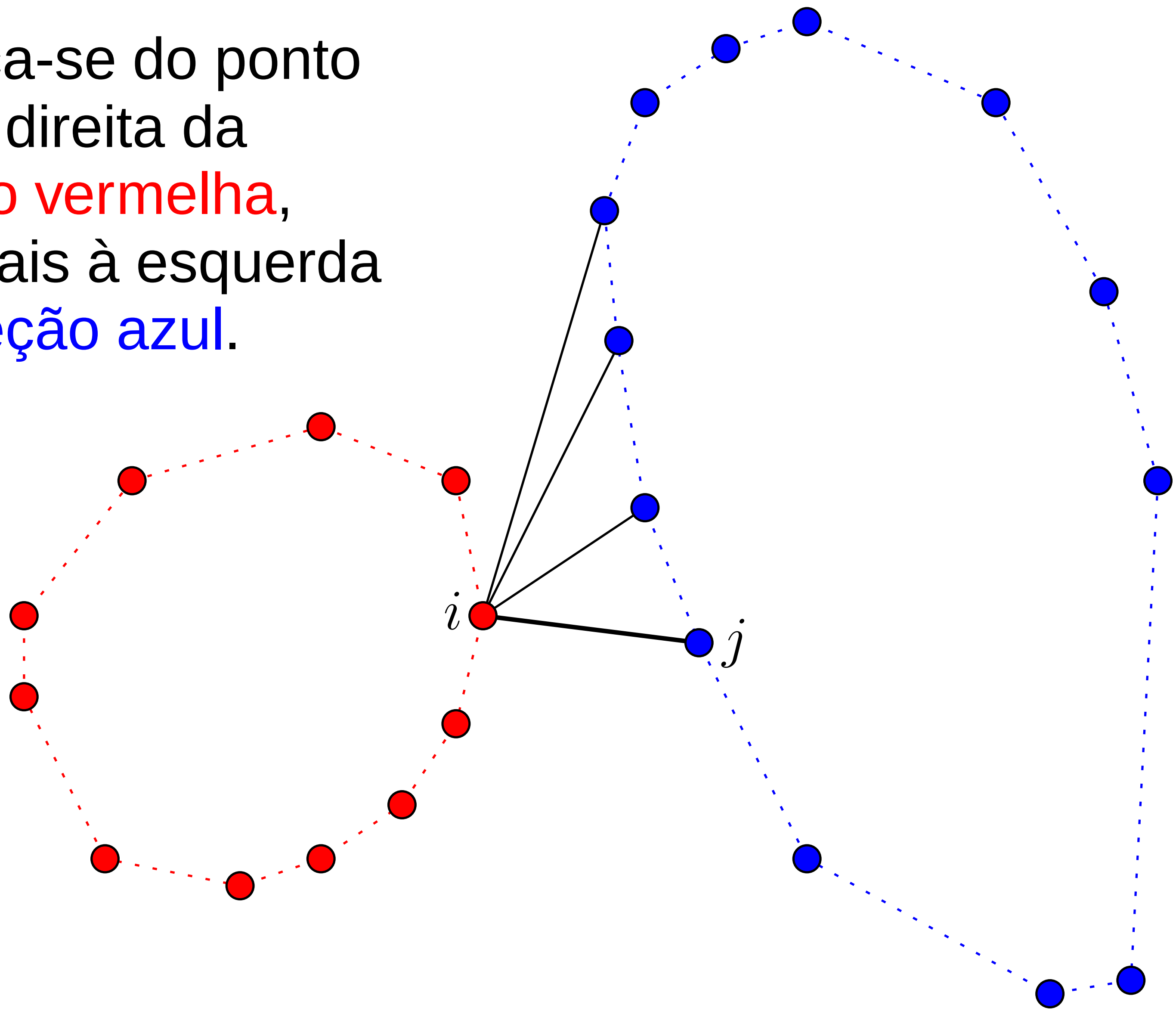
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

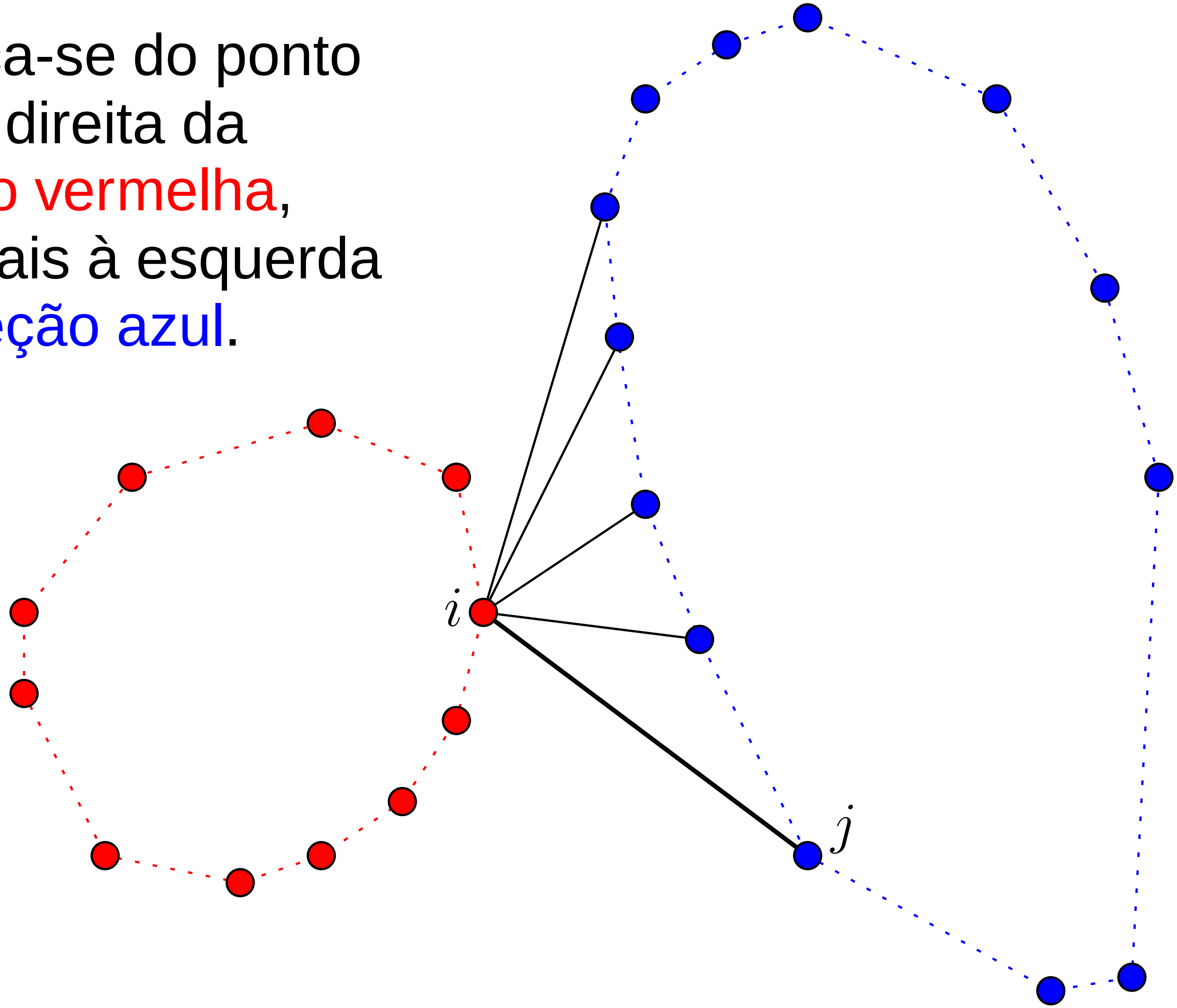
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

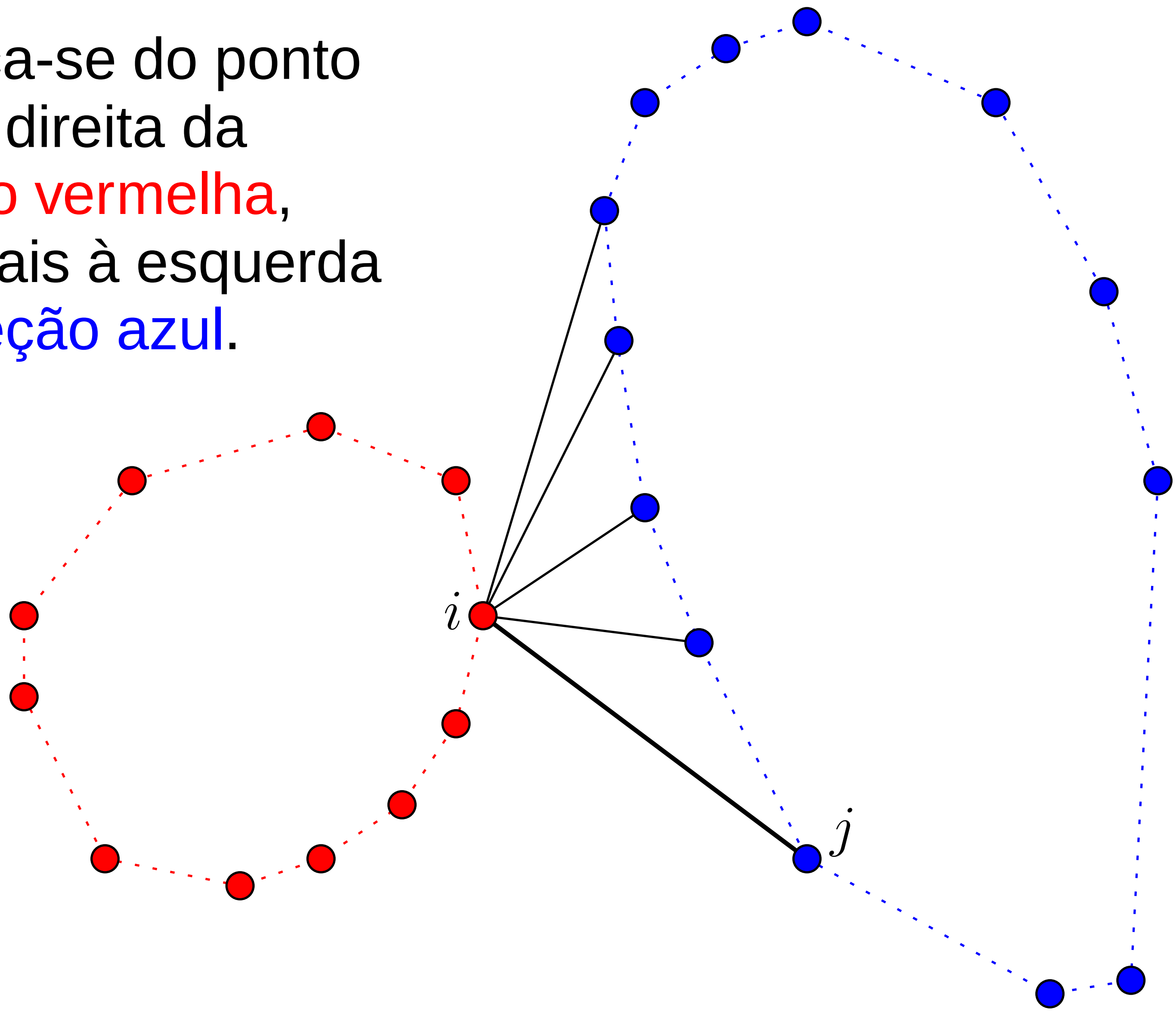
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Sim!

Como encontrar a tangente inferior?

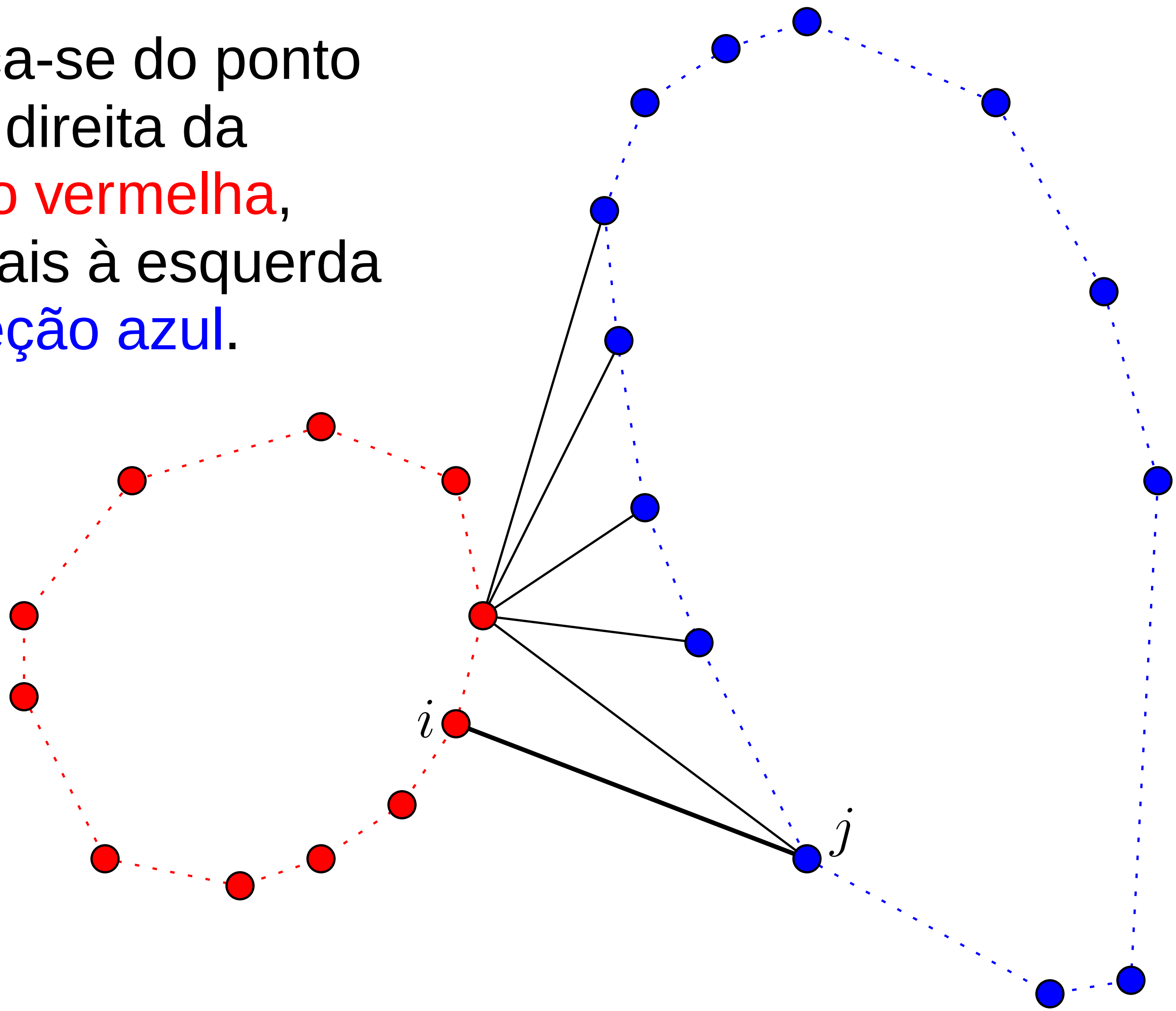
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

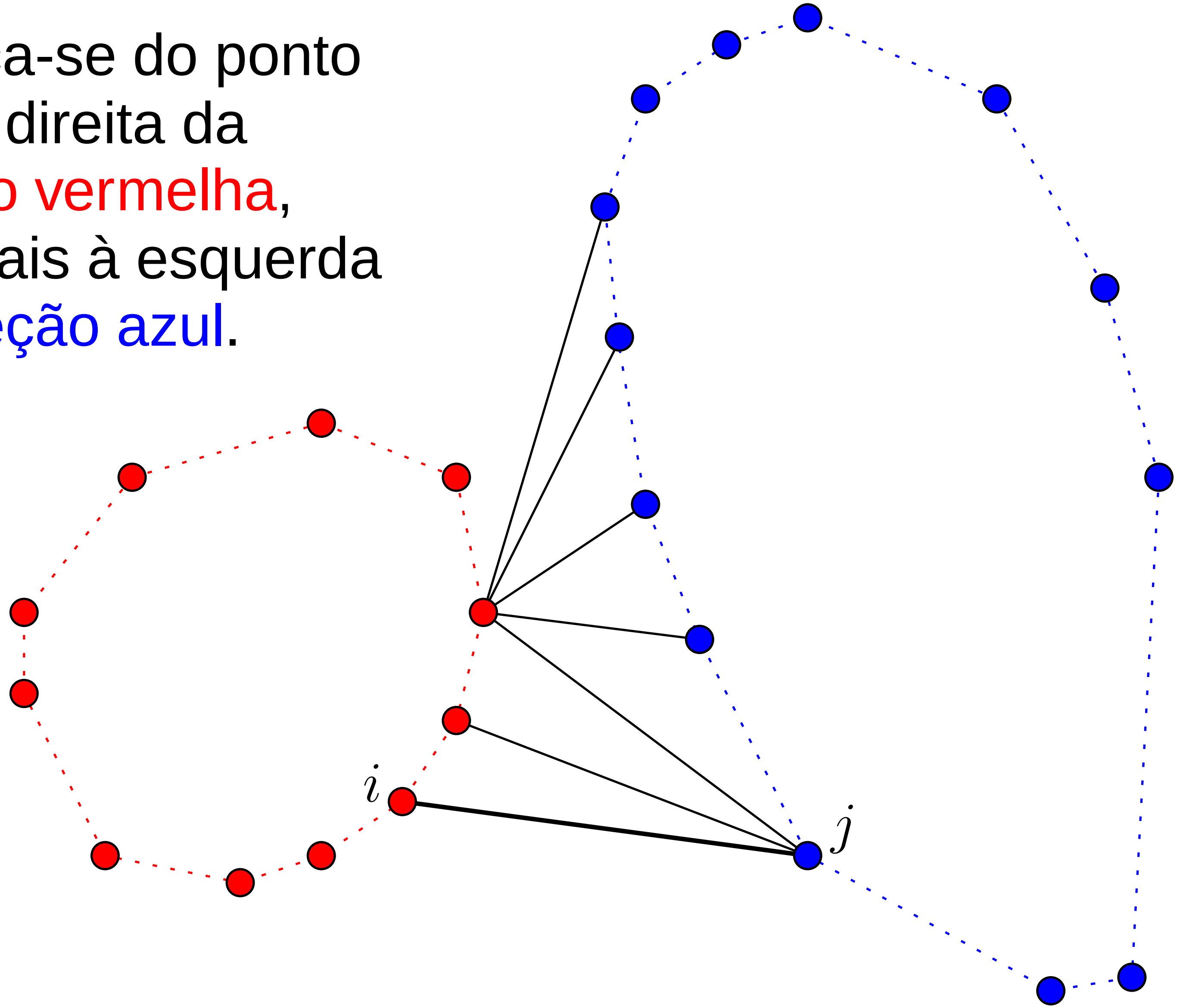
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

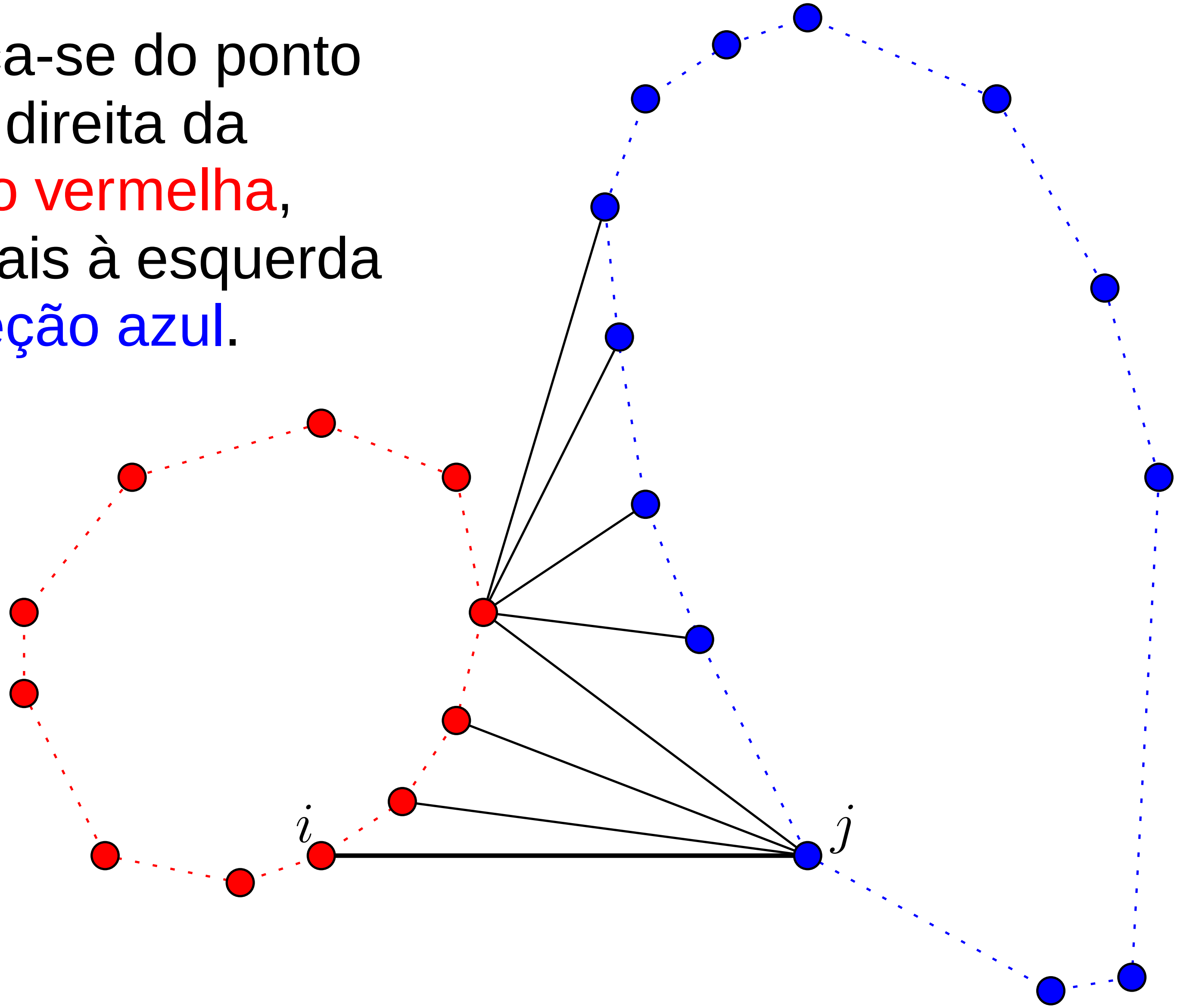
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

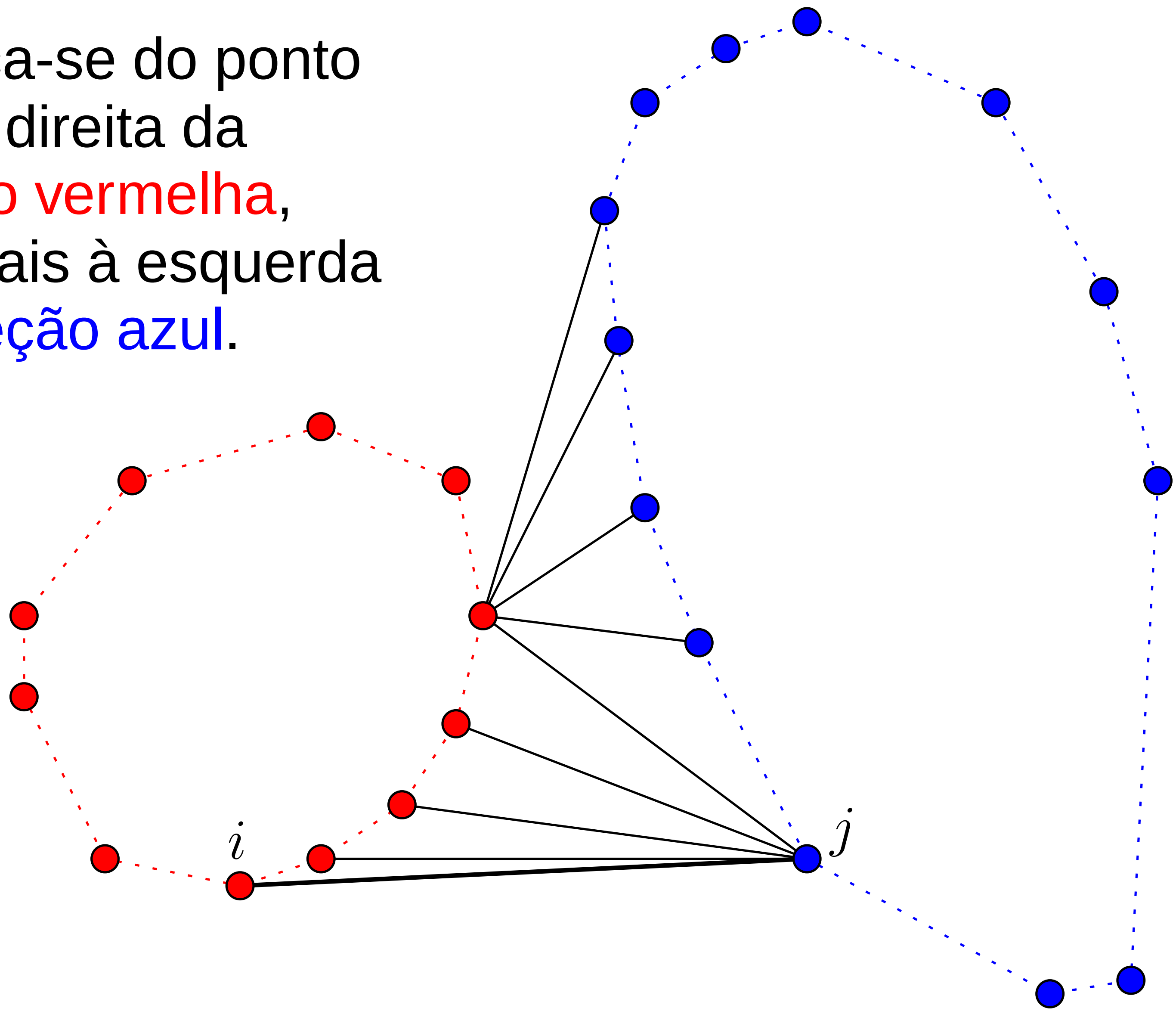
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

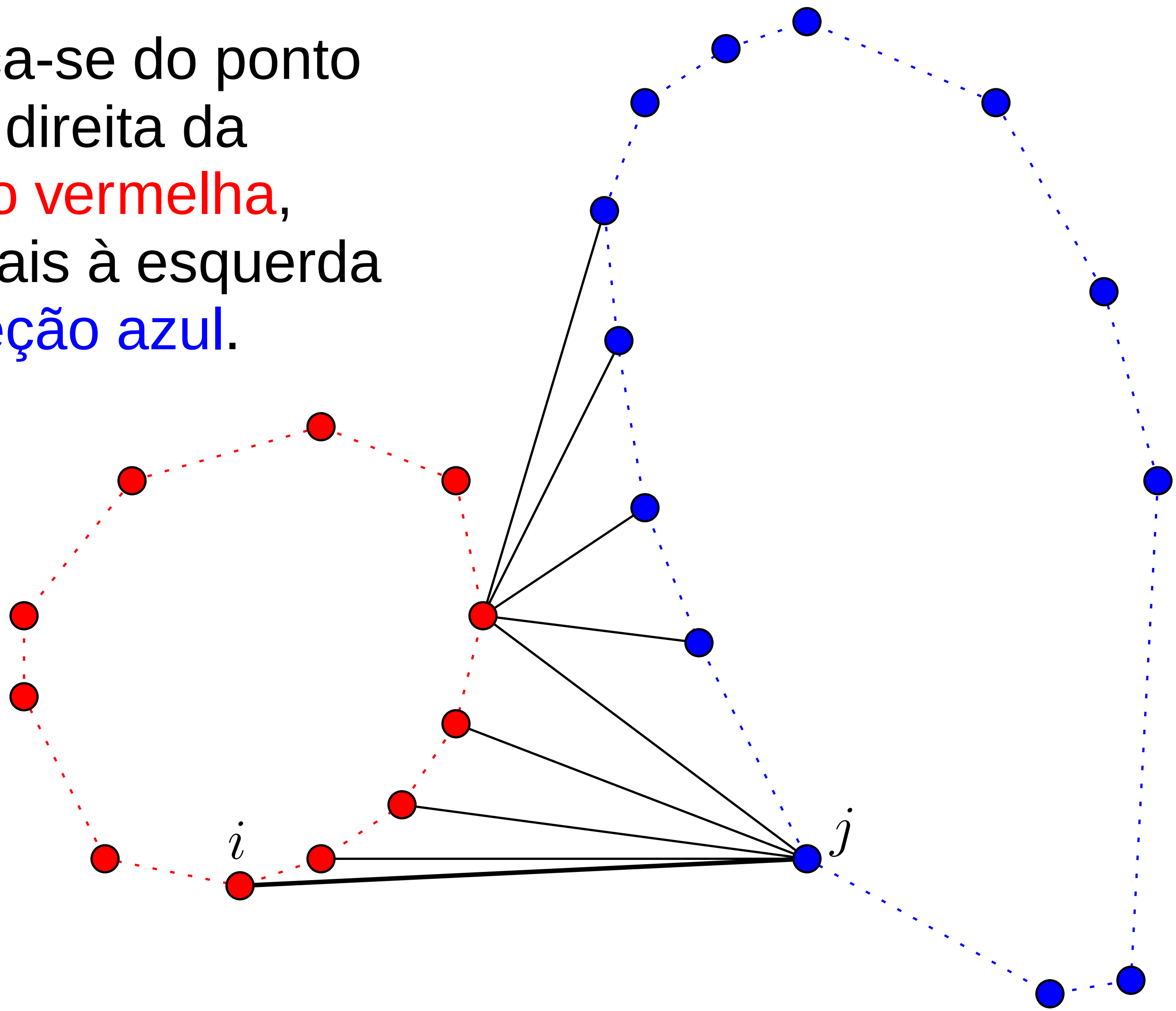
Começa-se do ponto
mais à direita da
coleção vermelha,
e do mais à esquerda
da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Sim!

Como encontrar a tangente inferior?

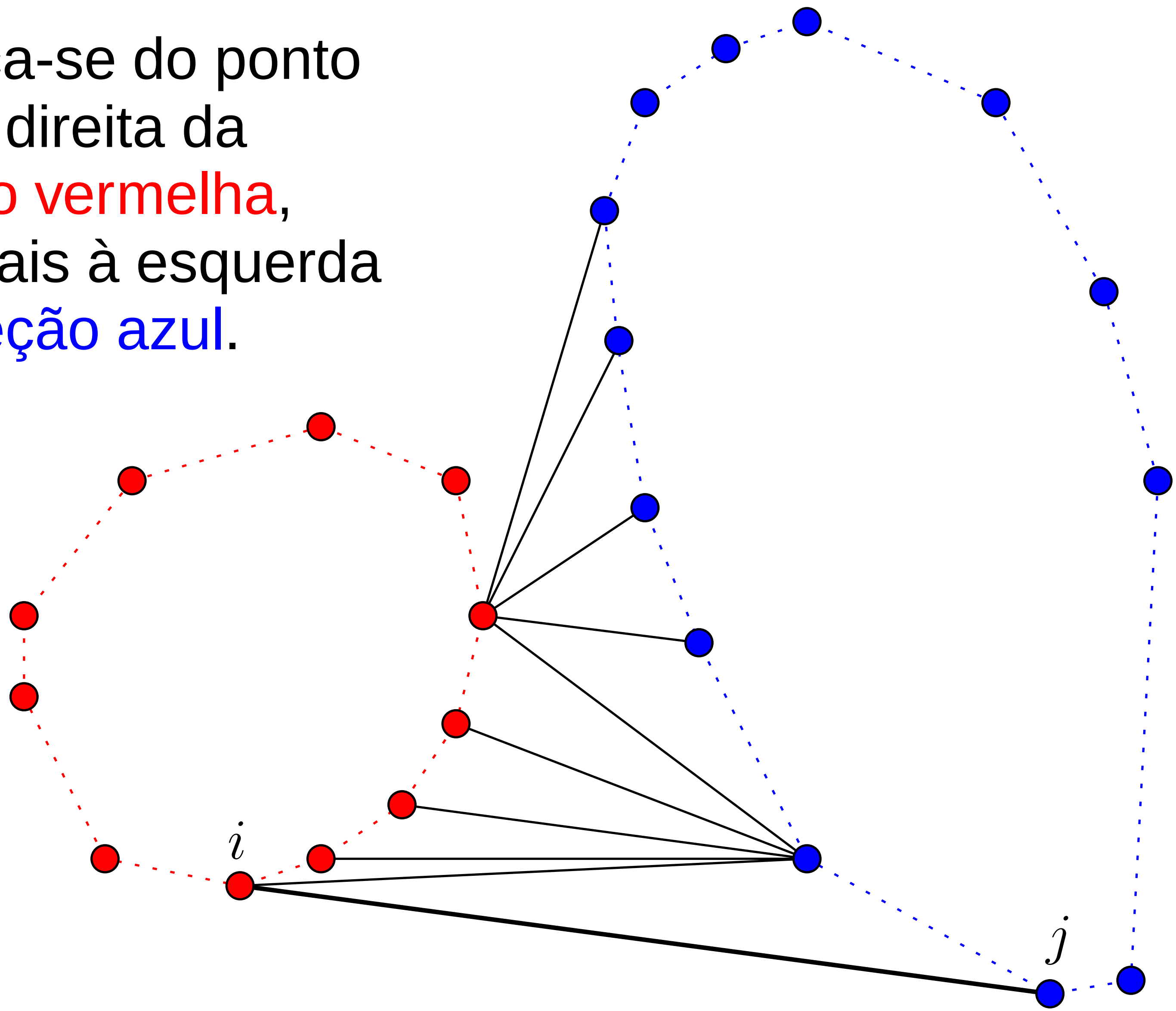
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

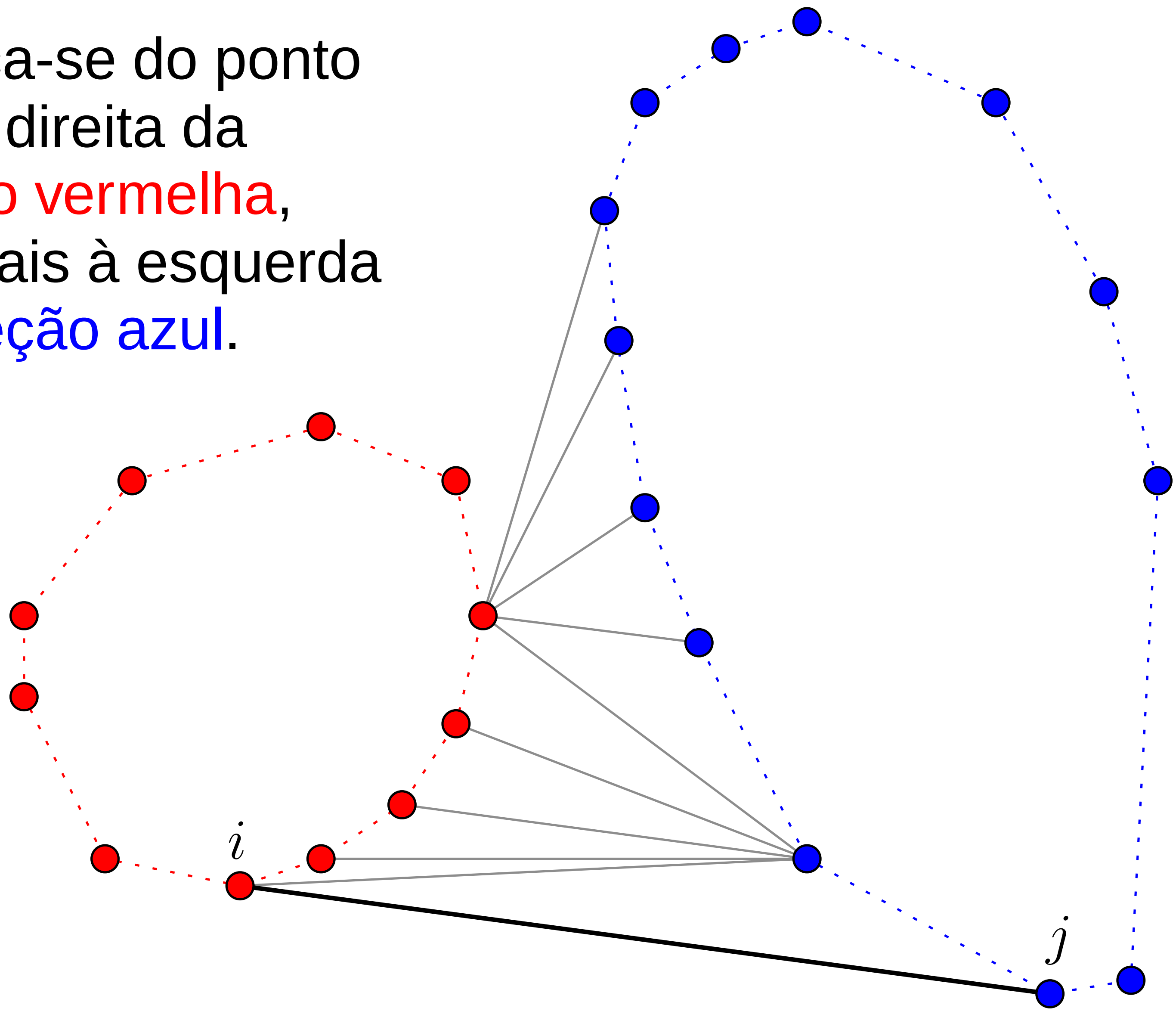
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Sim!

Como encontrar a tangente inferior?

Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior!

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$i \leftarrow \text{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ vermelho mais à direita

$j \leftarrow \text{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ azul mais à esquerda

enquanto (i, j) não é tangente inferior faça

  enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça

    $i \leftarrow i-1$

  enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça

    $j \leftarrow j+1$

devolva (i, j)

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ $\triangleright$ vermelho mais à direita

$j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ $\triangleright$ azul mais à esquerda

enquanto (i, j) não é tangente inferior faça

  enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$

    ou DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i+1])$ faça

  $\triangleright$ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça

    $i \leftarrow i-1$

  enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j-1])$

    ou DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça

  $\triangleright$ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça

    $j \leftarrow j+1$

devolva (i, j)

Simplificação

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

```
TangenteInferior (X, Y, H₁, h₁, H₂, h₂)
  i ← argmax{X[H₁[k]] : 1 ≤ k ≤ h₁}        ▷ vermelho mais à direita
  j ← argmin{X[H₂[k]] : 1 ≤ k ≤ h₂}        ▷ azul mais à esquerda
  enquanto (i, j) não é tangente inferior faça
      enquanto Dir(X, Y, H₁[i], H₂[j], H₁[i−1]) faça
        ▷ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça
          i ← i−1
      enquanto Dir(X, Y, H₁[i], H₂[j], H₂[j+1]) faça
        ▷ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça
          j ← j+1
  devolva (i, j)
```

Tangente inferior?

Considere os índices "módulo" o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita

$j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda

enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
ou DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça

▷ enquanto não é tangente inferior faça

    enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça

    ▷ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça

        $i \leftarrow i-1$

    enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j-1])$ faça

    ▷ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça

        $j \leftarrow j+1$

devolva (i, j)

Tangente inferior?

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$i \leftarrow \text{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ $\triangleright$ mais à direita
$j \leftarrow \text{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ $\triangleright$ mais à esquerda
enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i{-}1])$
    ou DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j{+}1])$ faça
    enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i{-}1])$ faça
        $i \leftarrow i{-}1$
    enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j{+}1])$ faça
        $j \leftarrow j{+}1$
devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Tangente inferior?

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$i \leftarrow \mathrm{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita
$j \leftarrow \mathrm{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda
enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i{-}1])$
    ou DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j{+}1])$ faça
    enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i{-}1])$ faça
        $i \leftarrow i{-}1$
    enquanto DIR$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j{+}1])$ faça
        $j \leftarrow j{+}1$
devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Se ele termina, a resposta é correta.

Tangente inferior?

TangenteInferior $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$i \leftarrow \mathrm{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita

$j \leftarrow \mathrm{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda

enquanto Dir$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
  ou Dir$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça

  enquanto Dir$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça

    $i \leftarrow i-1$

  enquanto Dir$(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça

    $j \leftarrow j+1$

devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Se ele termina, a resposta é correta.

E ele termina?

Correção do algoritmo

Pergunta:

TANGENTEINFERIOR$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Correção do algoritmo

Pergunta:
TANGENTEINFERIOR$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Correção do algoritmo

Pergunta:
TANGENTEINFERIOR$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,
então i_b está na metade de baixo de $H_1[1 \mathinner{.\,.} h_1]$
(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)
e j_b está na metade de baixo de $H_2[1 \mathinner{.\,.} h_2]$.

Correção do algoritmo

Pergunta:
TangenteInferior$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,
então i_b está na metade de baixo de $H_1[1 \mathinner{.\,.} h_1]$
(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)
e j_b está na metade de baixo de $H_2[1 \mathinner{.\,.} h_2]$.

Uma vez que i atinge i_b, ele não é mais decrementado.

Uma vez que j atinge j_b, ele não é mais incrementado.

Correção do algoritmo

Pergunta:
TangenteInferior$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,
então i_b está na metade de baixo de $H_1[1\,..\,h_1]$
(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)
e j_b está na metade de baixo de $H_2[1\,..\,h_2]$.

Uma vez que i atinge i_b, ele não é mais decrementado.

Uma vez que j atinge j_b, ele não é mais incrementado.

Assim TangenteInferior$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina.

Tangente inferior

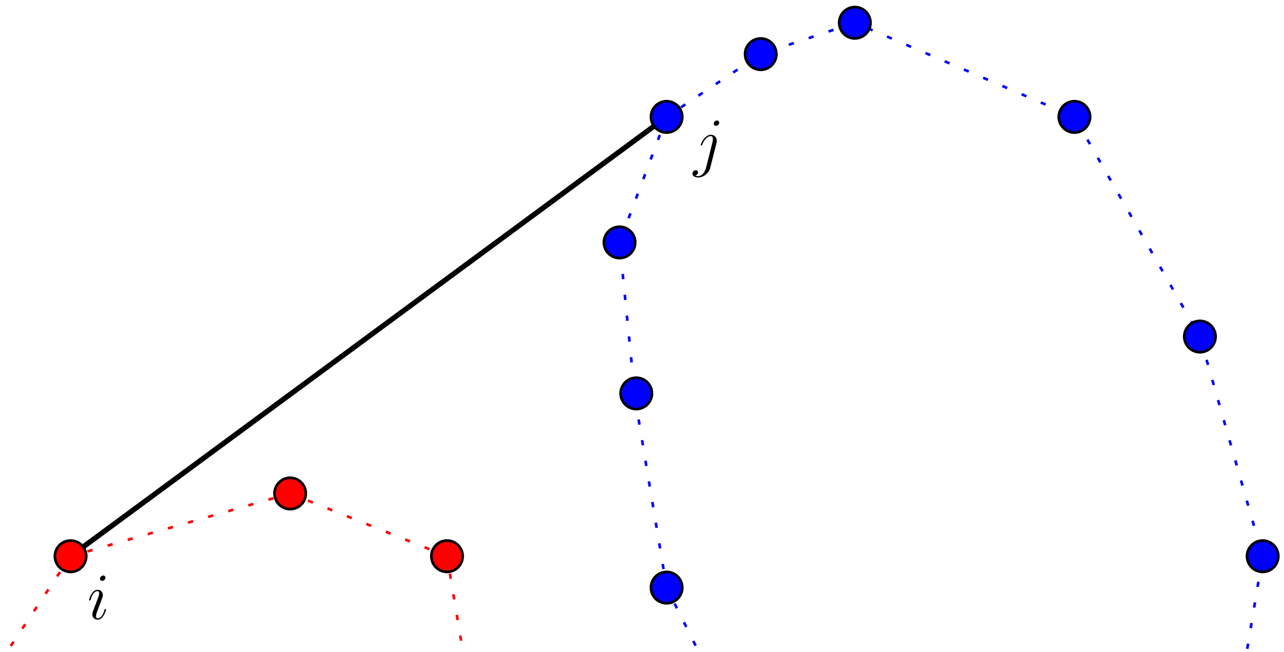
TangenteInferior $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

```
i ← argmax{X[H_1[k]] : 1 ≤ k ≤ h_1}        ▷ mais à direita
j ← argmin{X[H_2[k]] : 1 ≤ k ≤ h_2}        ▷ mais à esquerda
enquanto Dir(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i−1])
              ou Dir(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]) faça
    enquanto Dir(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i−1]) faça
        i ← i−1
    enquanto Dir(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]) faça
        j ← j+1
devolva (i, j)
```

O algoritmo está correto?
Ele termina e produz a resposta correta.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

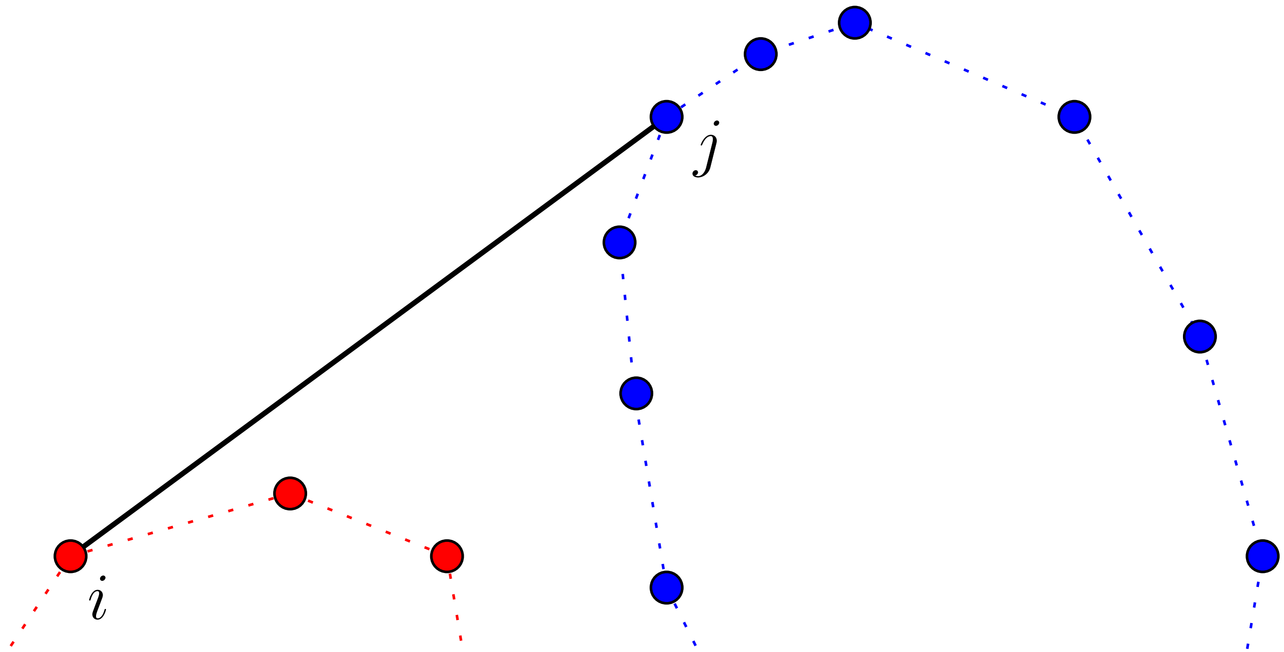
Tangente superior



O par (i, j)

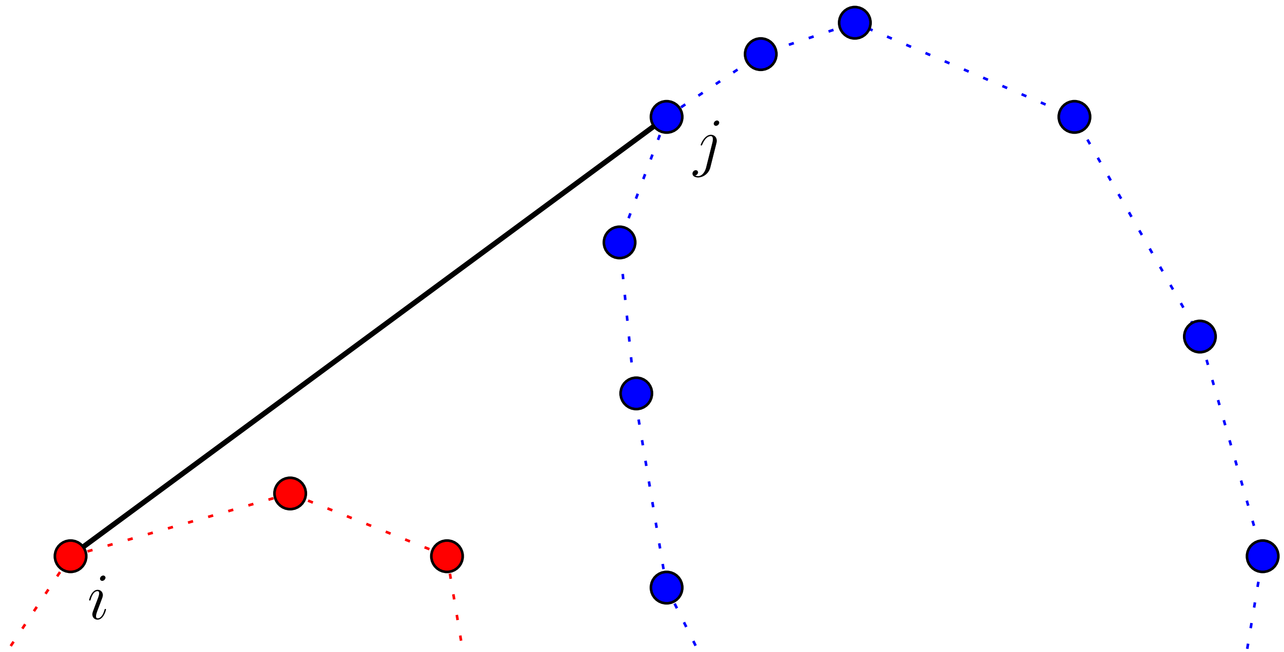
é uma tangente superior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j,

Tangente superior



O par (i, j)
é uma tangente superior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i{-}1]$ e $H_1[i{+}1]$ estão "abaixo" do segmento entre i e j,
é uma tangente superior para a coleção azul se os pontos de índice $H_2[j{-}1]$ e $H_2[j{+}1]$ estão "abaixo" do segmento entre i e j,

Tangente superior



O par (i, j)
é uma tangente superior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão "abaixo" do segmento entre i e j,
é uma tangente superior para a coleção azul se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão "abaixo" do segmento entre i e j,
é uma tangente superior se for os dois acima.

Tangente superior

O par (i, j)

é uma tangente superior para a coleção vermelha se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão "abaixo" do segmento entre i e j,

é uma tangente superior para a coleção azul se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão "abaixo" do segmento entre i e j,

é uma tangente superior se for os dois acima.

Exercício: Escreva a rotina
TANGENTESUPERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$,
que recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente superior (i, j) dos dois fechos.
Sua rotina deve consumir tempo $\mathrm{O}(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

Junta fechos

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

JUNTAHULL $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

$(i_b, j_b) \leftarrow$ TANGENTEINFERIOR$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
$(i_t, j_t) \leftarrow$ TANGENTESUPERIOR$(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
$h \leftarrow 0$
$i \leftarrow i_t$
enquanto $i \neq i_b + 1$ faça
    $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i] \quad i \leftarrow i + 1$
$j \leftarrow j_b$
enquanto $j \neq j_t - 1$ faça
    $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[j] \quad j \leftarrow j + 1$
devolva (H, h)

Junta fechos

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

JUNTAHULL $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

```
(i_b, j_b) ← TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)
(i_t, j_t) ← TANGENTESUPERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)
h ← 0
i ← i_t
enquanto i ≠ i_b + 1 faça
      h ← h + 1    H[h] ← H_1[i]    i ← i + 1
j ← j_b
enquanto j ≠ j_t − 1 faça
      h ← h + 1    H[h] ← H_2[j]    j ← j + 1
devolva (H, h)
```

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

Fecho convexo: um resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
EMBRULHO	$\mathrm{O}(nh)$
INCREMENTAL	$\mathrm{O}(n^2)$
GRAHAM	$\mathrm{O}(n \lg n)$
QUICKHULL	$\mathrm{O}(nh)$
MERGEHULL	$\mathrm{O}(n \lg n)$

Fecho convexo: um resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
EMBRULHO	$O(nh)$
INCREMENTAL	$O(n^2)$
GRAHAM	$O(n \lg n)$
QUICKHULL	$O(nh)$
MERGEHULL	$O(n \lg n)$

Cota inferior para o fecho convexo:
não existe algoritmo para encontrar o fecho convexo que no pior caso consuma $o(n \lg h)$.

Fecho convexo: um resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
EMBRULHO	$\mathrm{O}(nh)$
INCREMENTAL	$\mathrm{O}(n^2)$
GRAHAM	$\mathrm{O}(n \lg n)$
QUICKHULL	$\mathrm{O}(nh)$
MERGEHULL	$\mathrm{O}(n \lg n)$

Cota inferior para o fecho convexo:
não existe algoritmo para encontrar o fecho convexo que no pior caso consuma $\mathrm{o}(n \lg h)$.

Na aula vimos uma redução do problema da ordenação para o fecho convexo no plano que implica em um resultado um pouco mais fraco que este.