Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

`http://www.ime.usp.br/~cris/`

segundo semestre de 2011

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

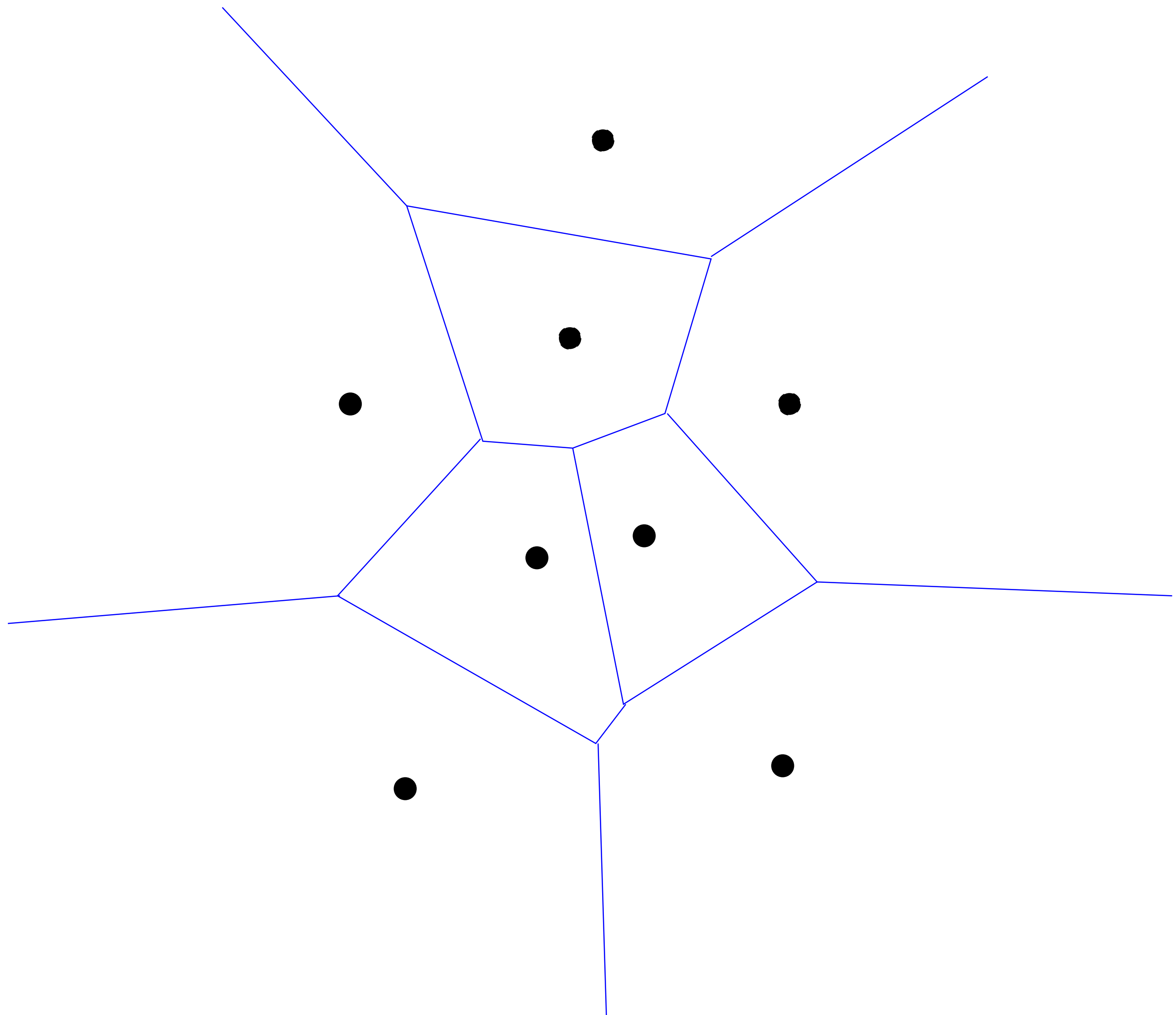
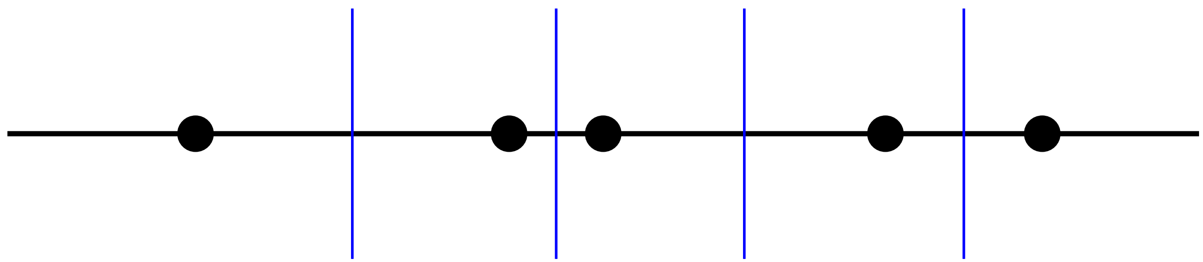


Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:

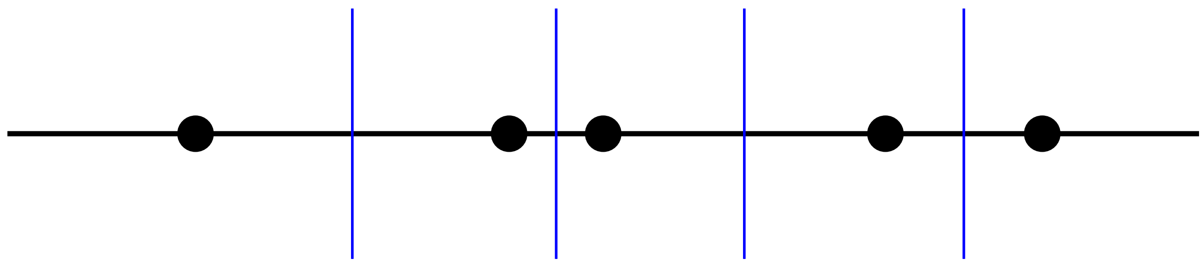


O diagrama são várias linhas paralelas.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:



O diagrama são várias linhas paralelas.

Versão bidimensional:

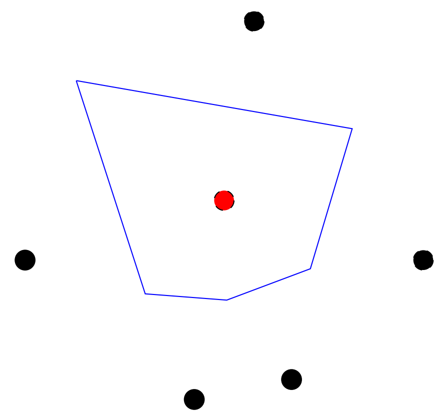
Pode ser construída em tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$, onde n é o número de pontos dados.

- Divisão e conquista: Shamos e Hoye (complexo)
- Linha de varredura: Fortune (elegante e simples)

Notação

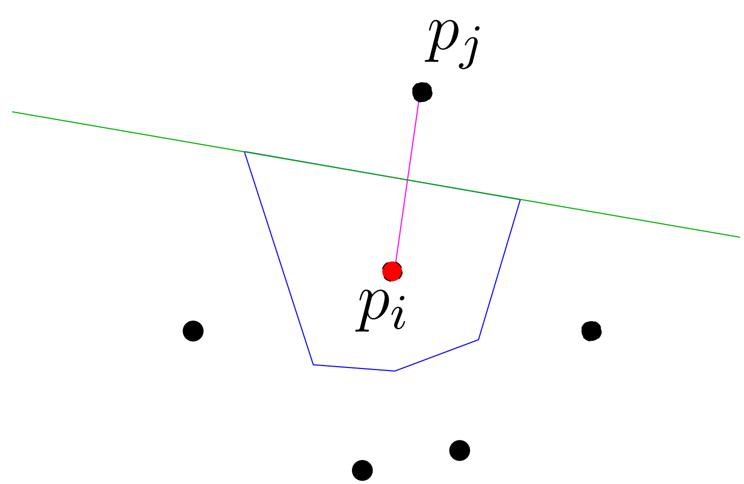
$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$

$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \textsc{Dist}(q, p_i) < \textsc{Dist}(q, p_j)$ para todo $j \neq i\}$



Notação

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j)$ para todo $j \neq i\}$

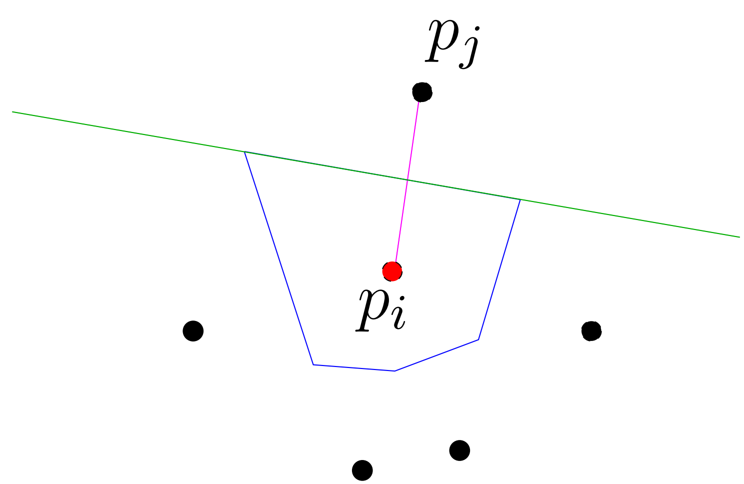


$h(p, q)$: semiplano determinado pela reta bissetora entre p e q que contém o ponto p.

$\mathcal{V}(p_i) = \cap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$

Notação

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \textsc{Dist}(q, p_i) < \textsc{Dist}(q, p_j)$ para todo $j \neq i\}$



$h(p,q)$: semiplano determinado pela reta bissetora entre p e q que contém o ponto p.

$\mathcal{V}(p_i) = \cap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$

Logo $\mathcal{V}(p_i)$ é convexo (interseção de $n-1$ semiplanos), com no máximo $n-1$ arestas e vértices.

Diagrama de Voronoi

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$

Célula de p_i:

$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$

Diagrama de Voronoi

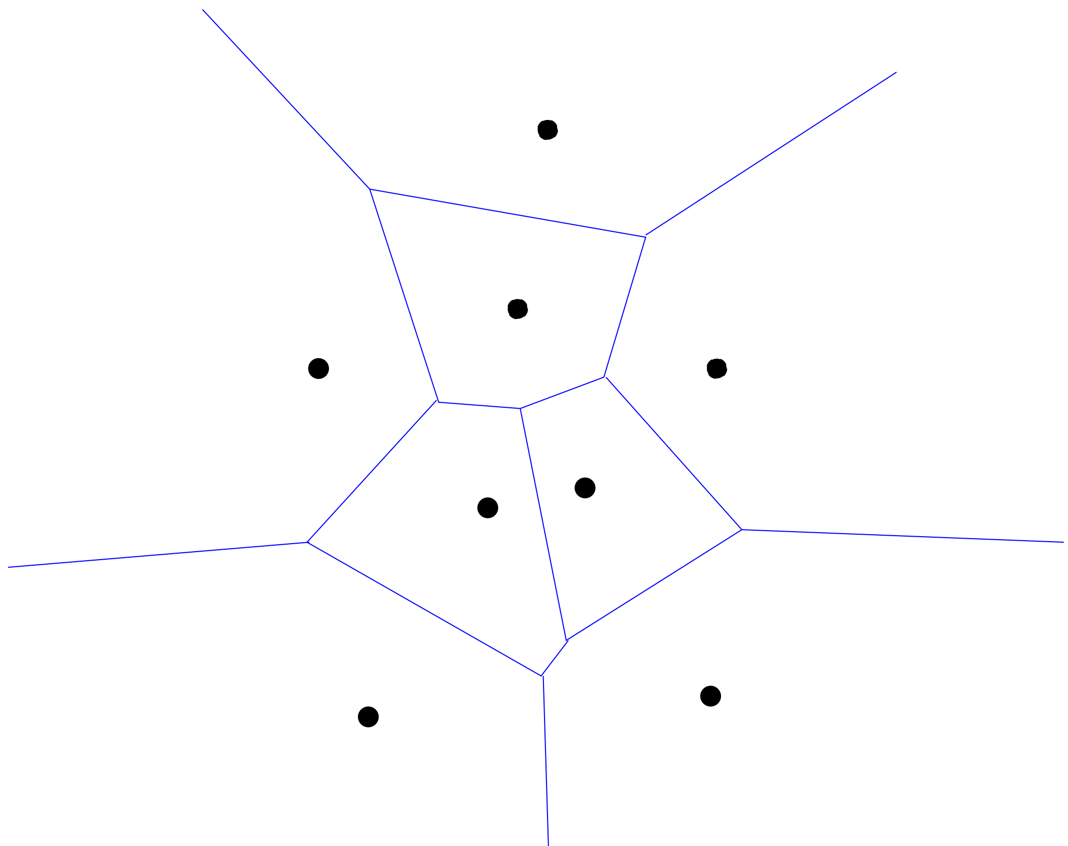
$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$

Célula de p_i:

$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \textsc{Dist}(q, p_i) < \textsc{Dist}(q, p_j)$ para todo $j \neq i\}$

Diagrama de Voronoi de P: $\mathrm{Vor}(P)$

subdivisão do plano nas células $\mathcal{V}(p_1), \ldots, \mathcal{V}(p_n)$.



Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n?

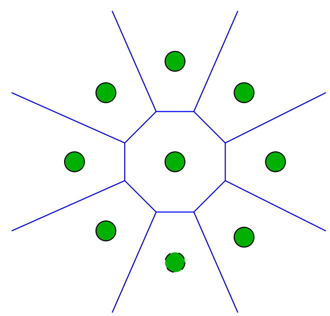
Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n?

Cada célula tem $\mathrm{O}(n)$ arestas.

Algumas podem ter $\Theta(n)$ arestas.



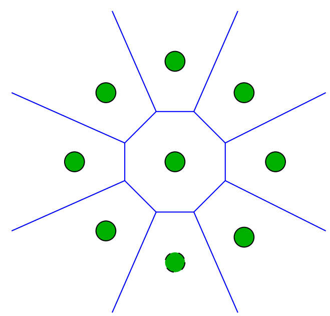
Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n?

Cada célula tem $\mathrm{O}(n)$ arestas.

Algumas podem ter $\Theta(n)$ arestas.



Teorema:

Para $n \geq 3$, o número de vértices no diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos no plano é no máximo $2n - 5$, e o número de arestas é no máximo $3n - 6$.

Arestas e vértices de $\mathrm{Vor}(P)$

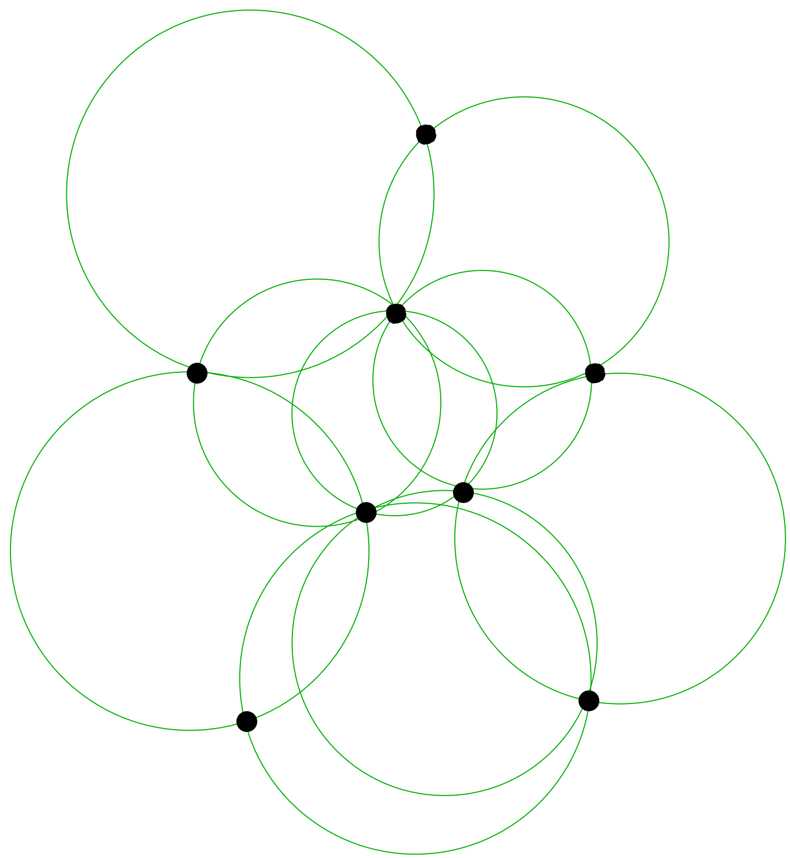
$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Arestas e vértices de $\mathrm{Vor}(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Teorema:

(i) Ponto q é vértice de $\mathrm{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).

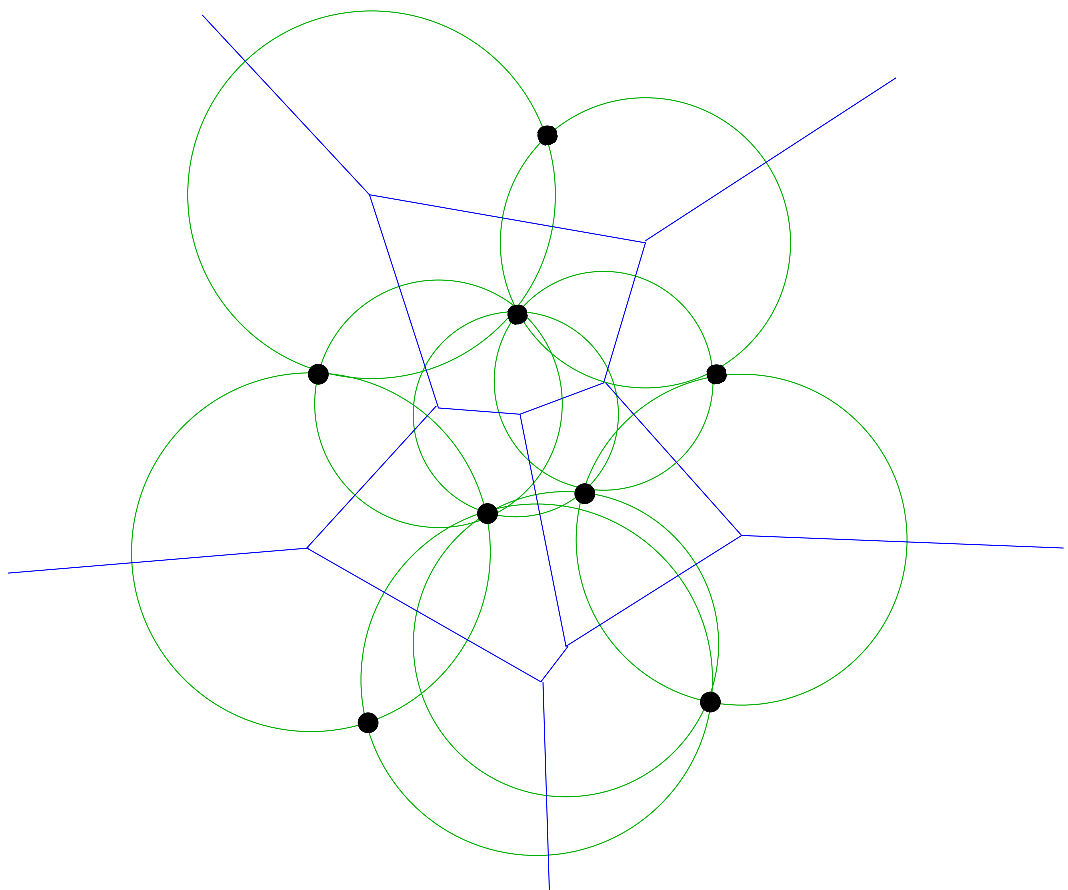


Arestas e vértices de $\mathrm{Vor}(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

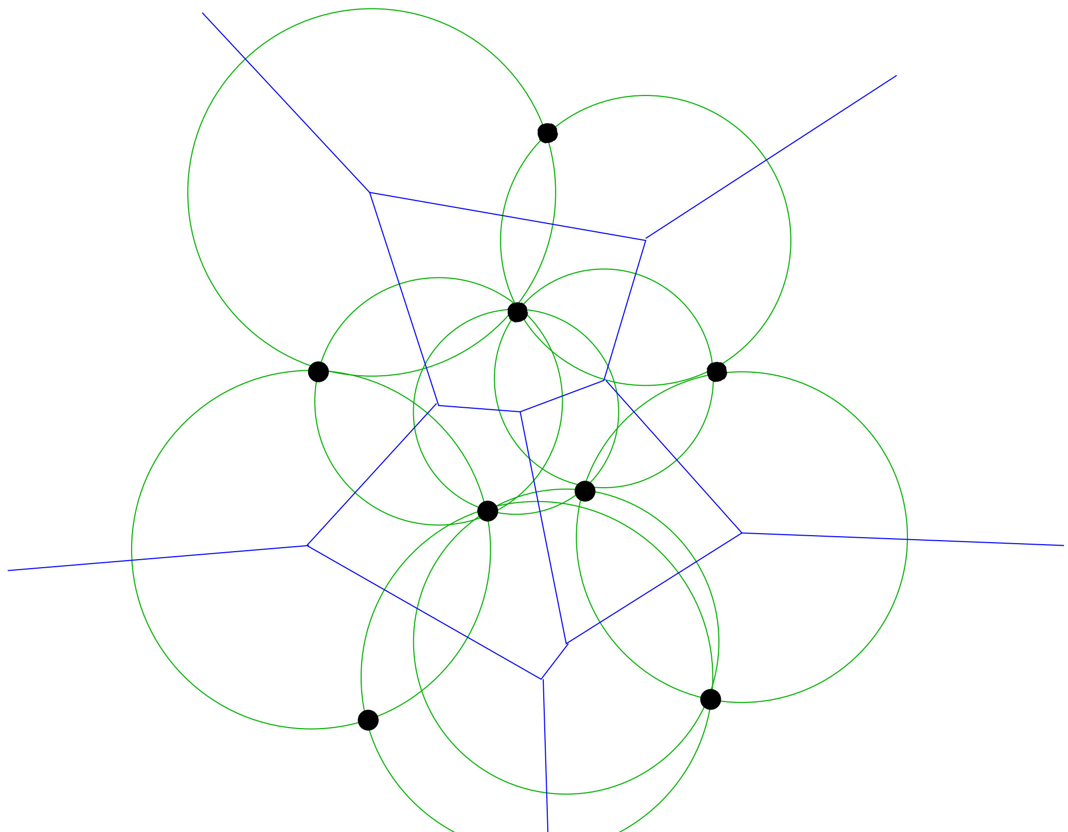
Teorema:

(i) Ponto q é vértice de $\mathrm{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).



Arestas e vértices de $\mathrm{Vor}(P)$

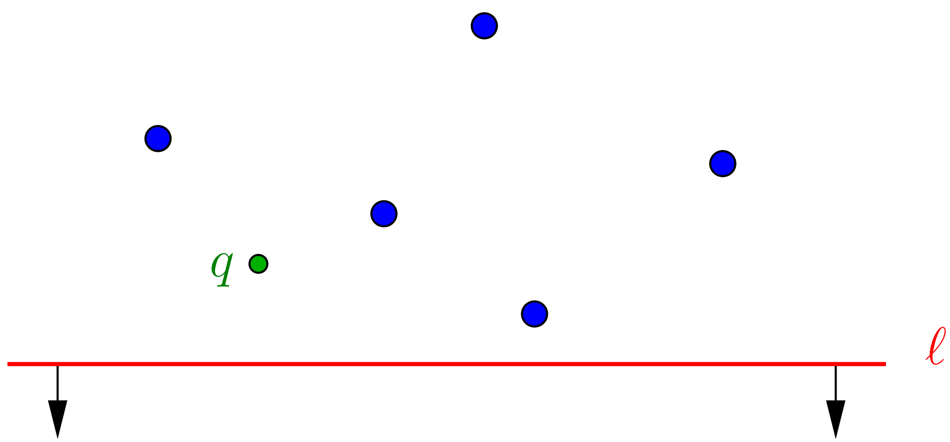
Teorema:
(i) Ponto q é vértice de $\mathrm{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).
(ii) A reta bissetora entre os pontos p_i e p_j define uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$ sse existe um ponto q nela tq $C_P(q)$ contém p_i e p_j e apenas estes (em sua fronteira).



Algoritmo de Fortune

ℓ^+: semiplano acima da linha de varredura ℓ

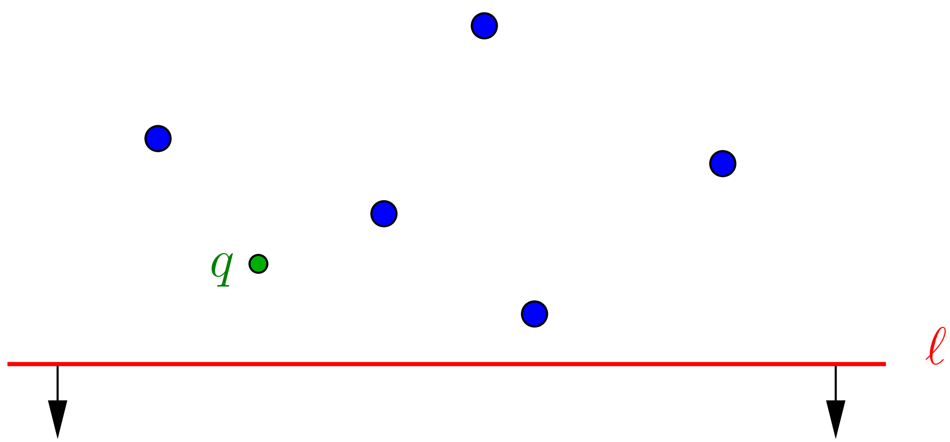
Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q?



Algoritmo de Fortune

ℓ^+: semiplano acima da linha de varredura ℓ

Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q?

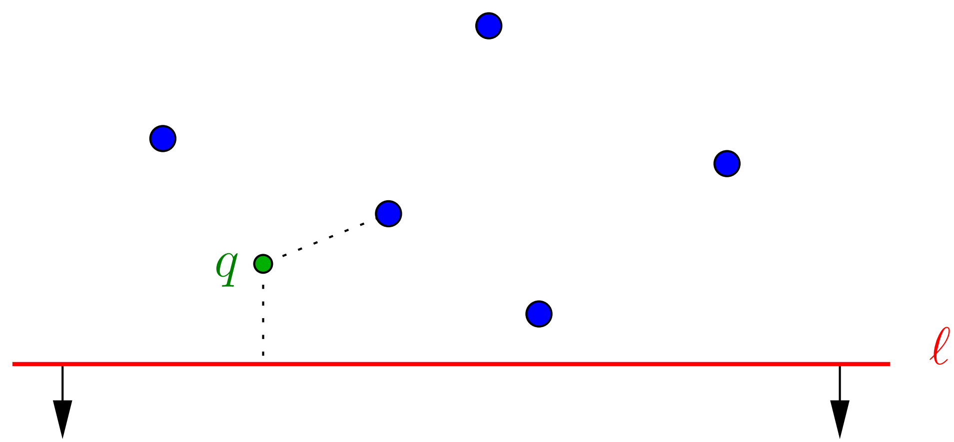


A distância de q a qualquer ponto abaixo de ℓ
é pelo menos a distância de q a ℓ.

Algoritmo de Fortune

ℓ^+: semiplano acima da linha de varredura ℓ

Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q?

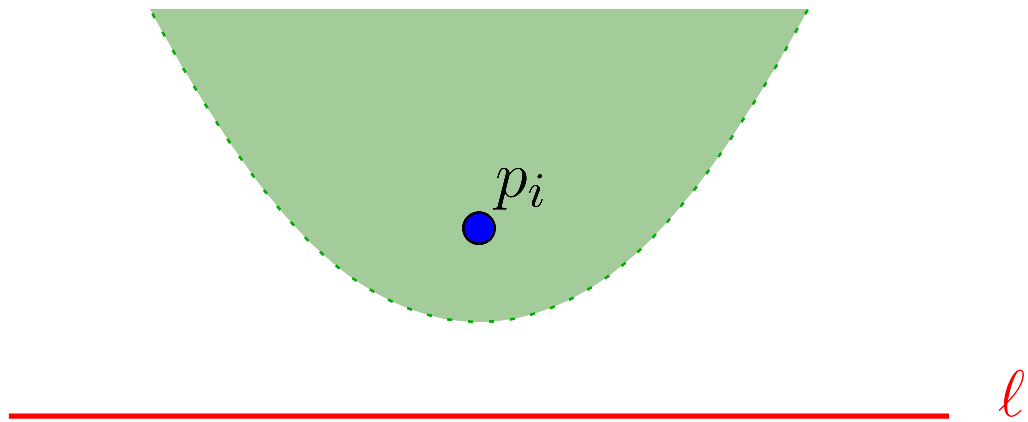


A distância de q a qualquer ponto abaixo de ℓ
é pelo menos a distância de q a ℓ.

Se q está mais próximo de um p_i acima de ℓ do que de ℓ,
então q está em $\mathcal{V}(p_i)$.

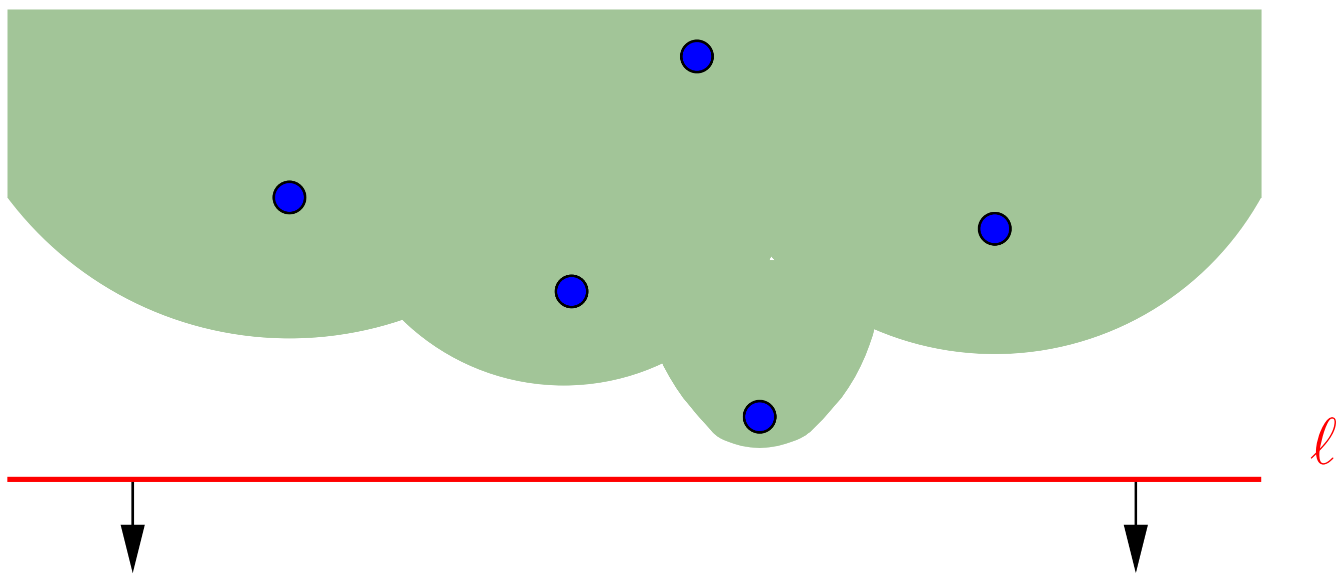
Algoritmo de Fortune

O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma parábola.



Algoritmo de Fortune

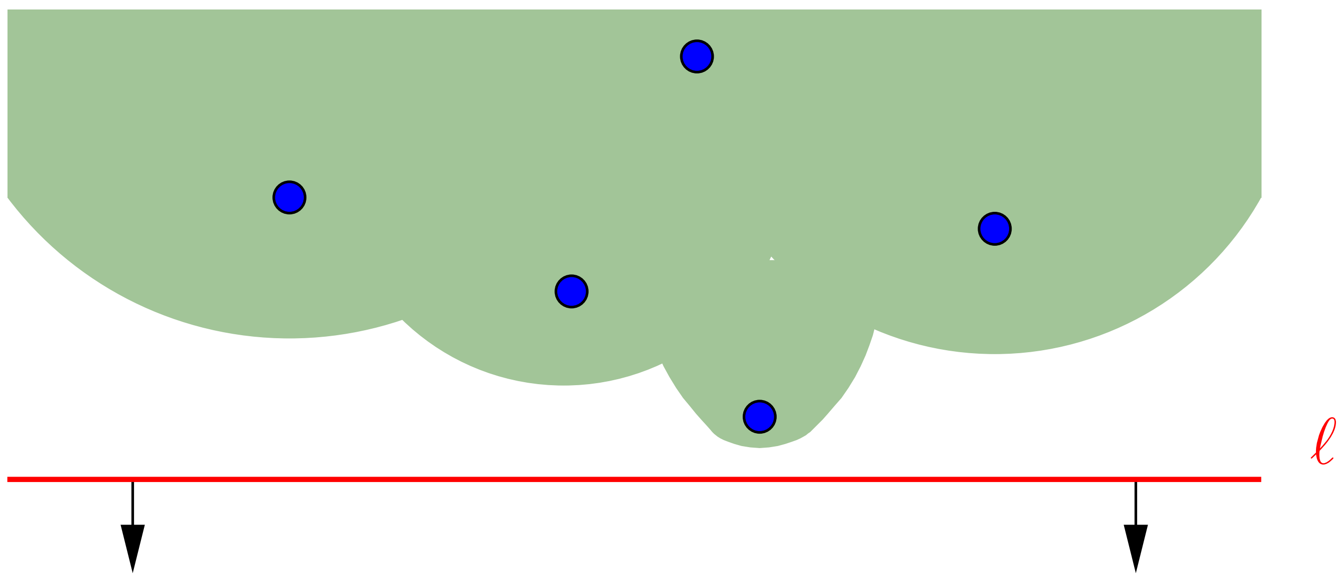
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma parábola.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\mathrm{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por um conjunto de parábolas,

Algoritmo de Fortune

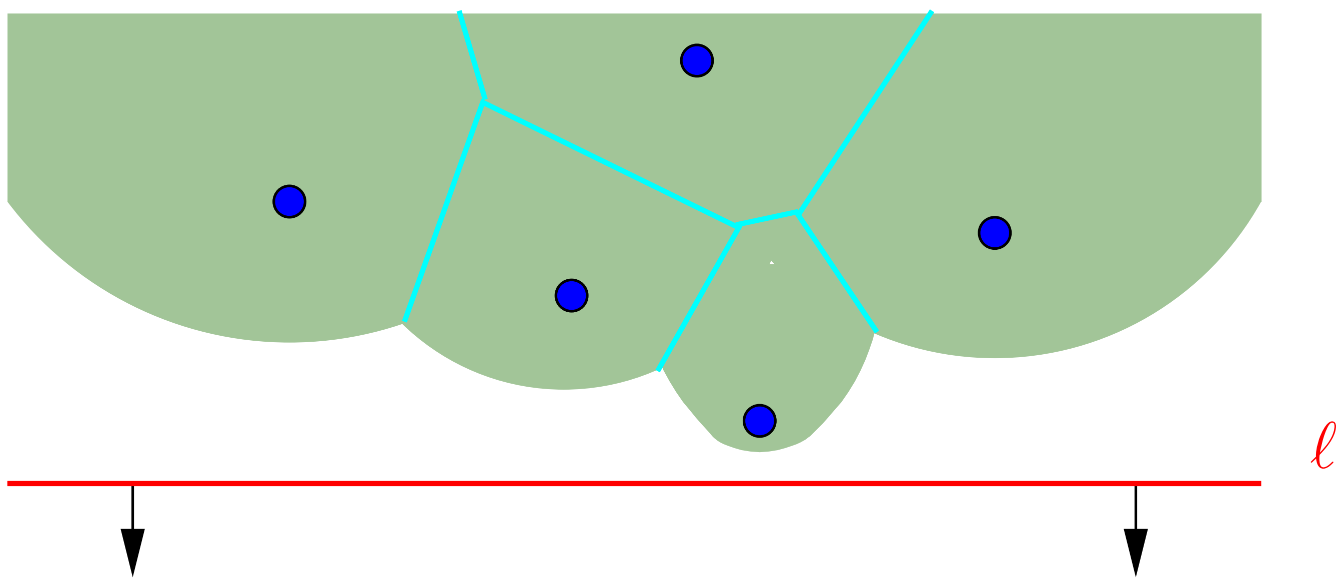
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma parábola.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\mathrm{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por um conjunto de parábolas, ou arcos parabolóides, que definem a chamada linha da praia.

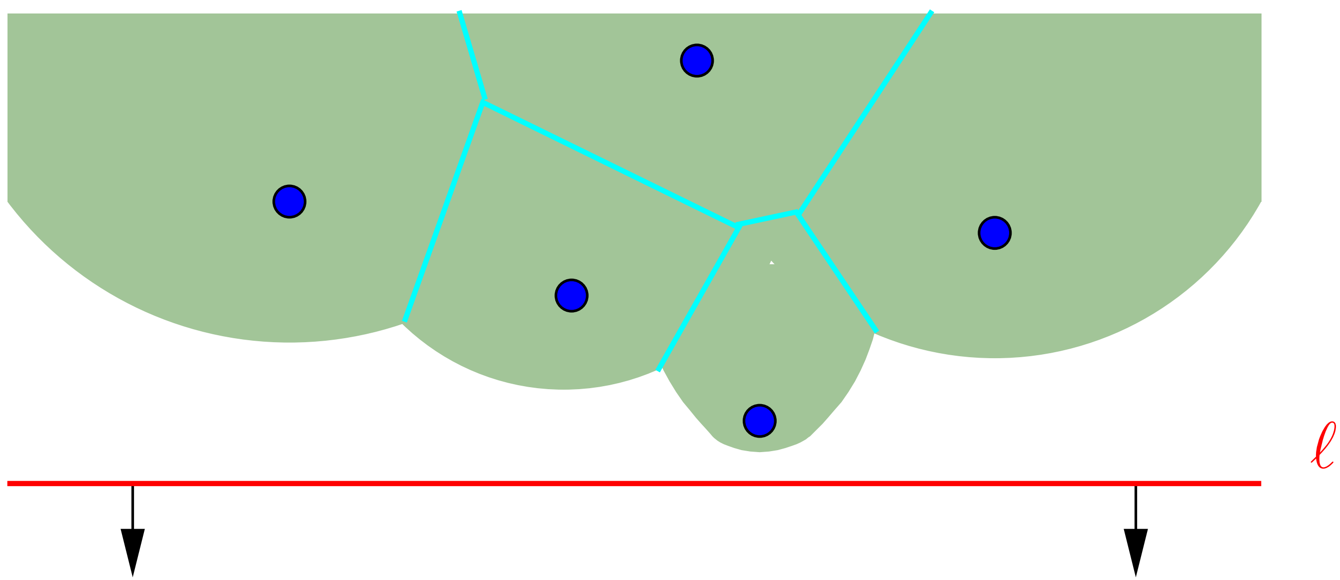
Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.



Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.



Esses pontos de encontro desenham $\mathrm{Vor}(P)$.
Vejam a animação do algoritmo.

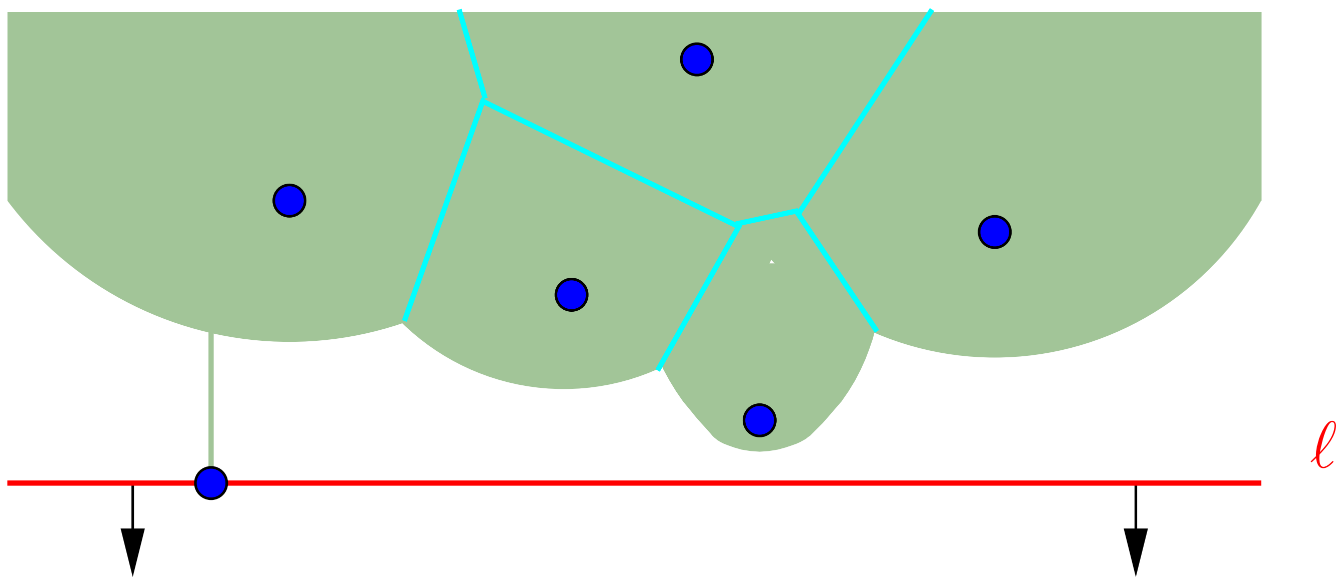
Algoritmo de Fortune

Como a linha da praia se altera com o mover de ℓ?

Algoritmo de Fortune

Como a linha da praia se altera com o mover de ℓ?

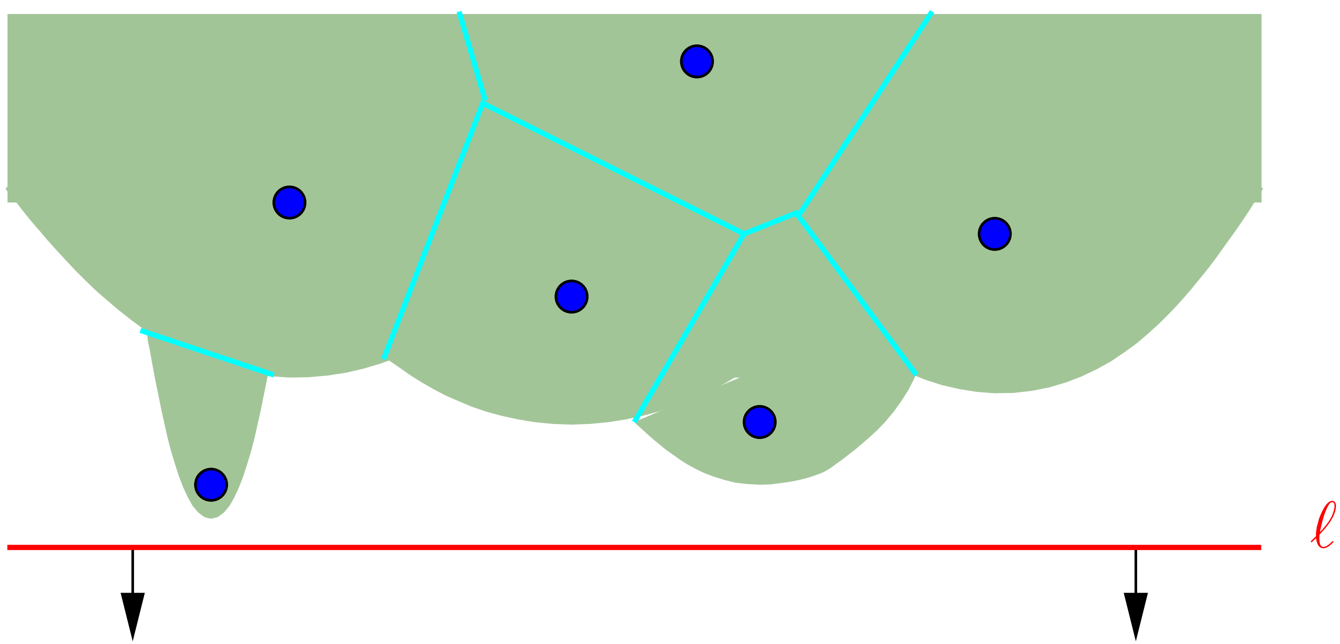
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.



Algoritmo de Fortune

Como a linha da praia se altera com o mover de ℓ?

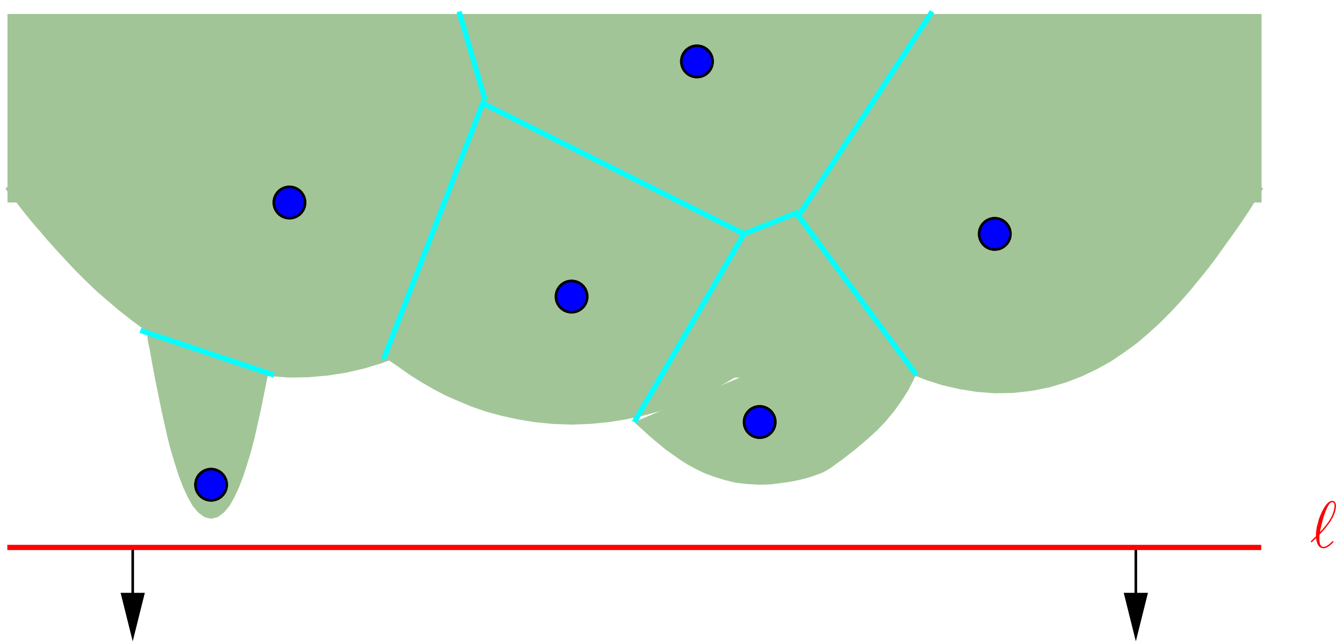
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.



Algoritmo de Fortune

Como a linha da praia se altera com o mover de ℓ?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.

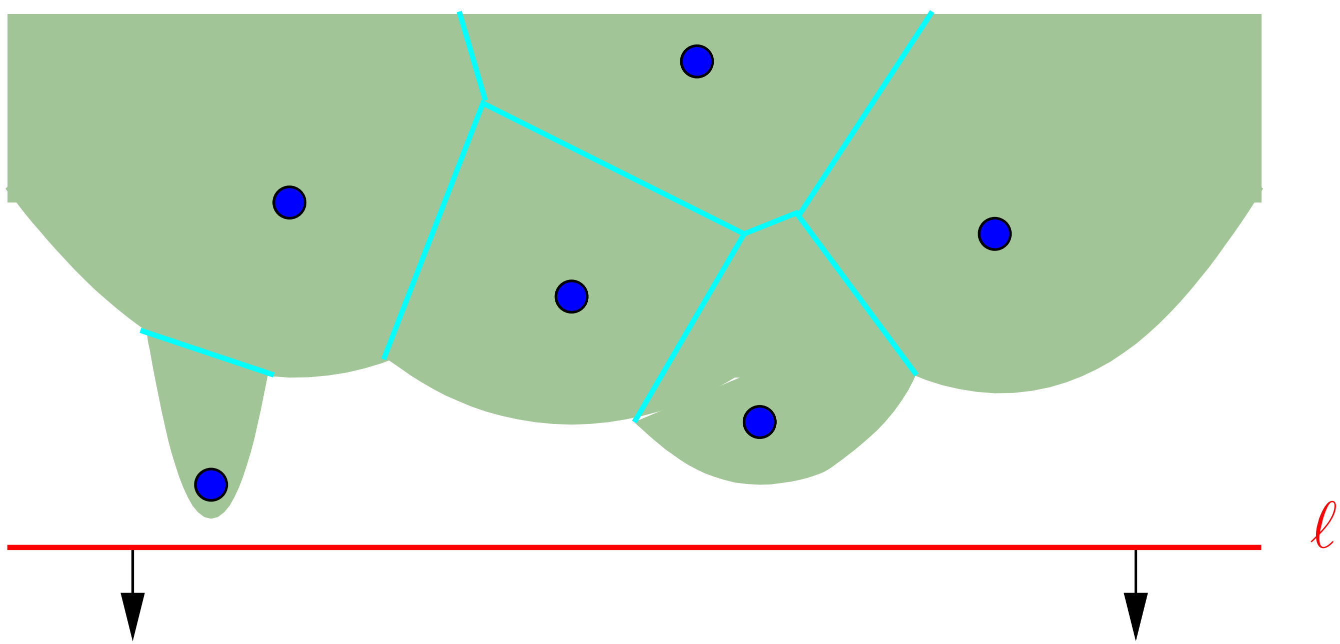


Note que o mesmo arco aparece mais de uma vez na linha.

Algoritmo de Fortune

Como a linha da praia se altera com o mover de ℓ?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.



Pontos de P são pontos eventos.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P.

Um tal ponto evento é chamado de evento-ponto.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P.

Um tal ponto evento é chamado de evento-ponto.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P.

Um tal ponto evento é chamado de evento-ponto.

Então há no máximo $2n-1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P.

Um tal ponto evento é chamado de evento-ponto.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

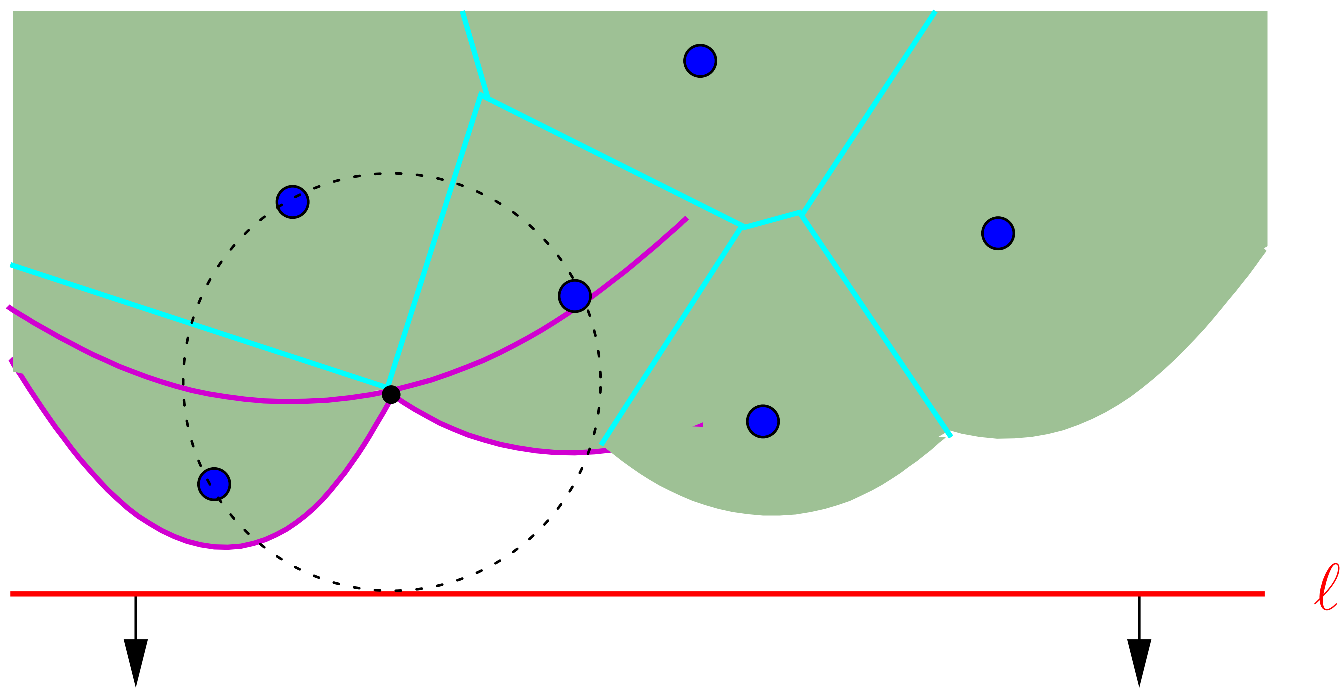
Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram!
Veja a animação.

Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que
um arco desaparece da linha da praia.
Quando isso ocorre?

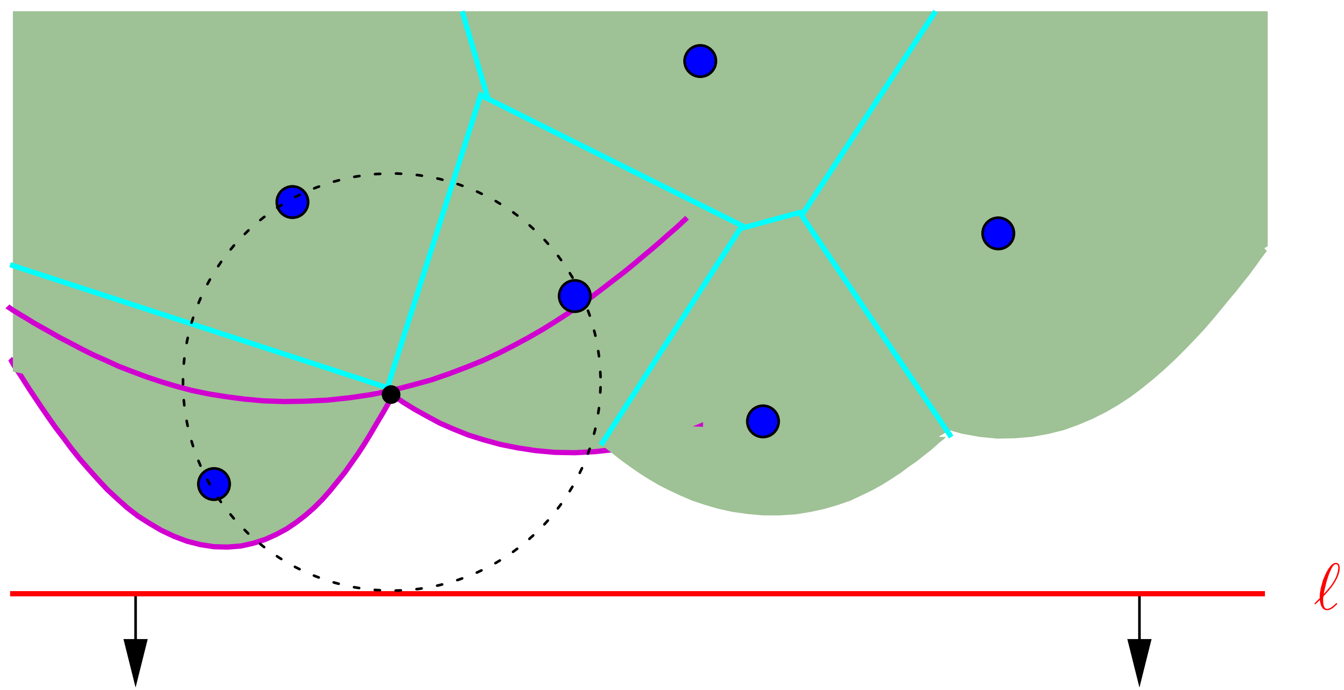
Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que
um arco desaparece da linha da praia.
Quando isso ocorre?
Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.



Segundo tipo de ponto evento

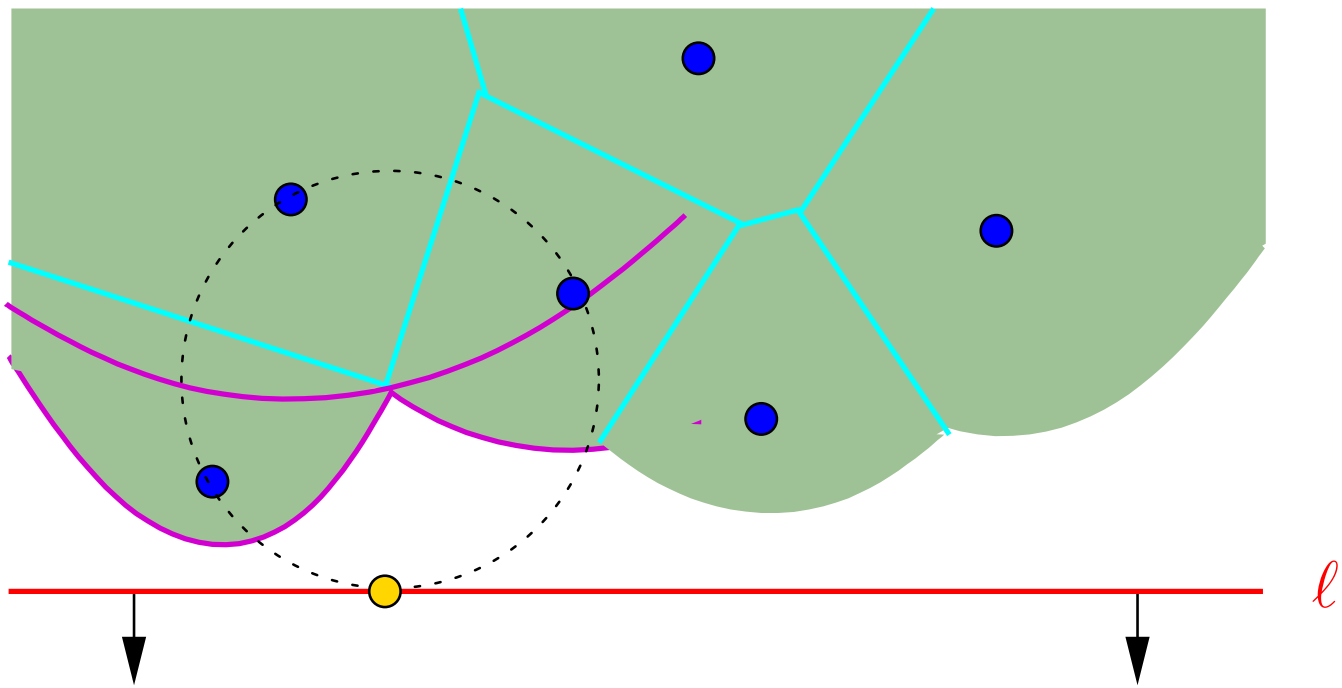
Tal ponto evento indica o momento em que
um arco desaparece da linha da praia.
Quando isso ocorre?
Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.



Esse ponto está equidistante de três pontos de P
e é um vértice de $\mathrm{Vor}(P)$.

Segundo tipo de ponto evento

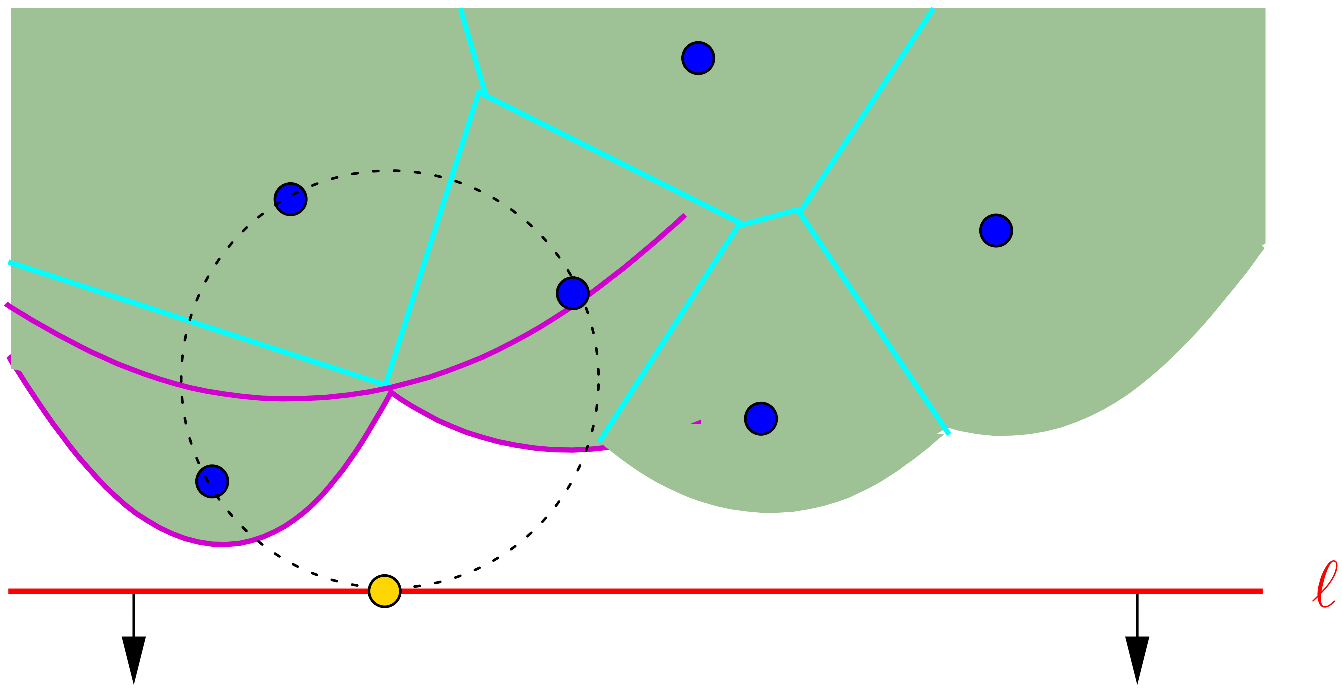
Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de evento-círculo.

Segundo tipo de ponto evento

Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de evento-círculo.

Lema. O único jeito de um arco desaparecer da linha de praia é por meio de um evento-círculo.