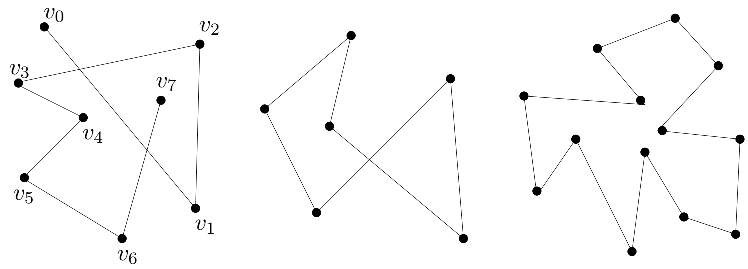
GEOMETRIA COMPUTACIONAL

TEOREMA DA GALERIA DE ARTE

1. Definições e convenções

Uma *curva poligonal* é uma sequência finita $(v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são pon
em $\mathbb{R}^2$ e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$. Os pontos $v_0, \ldots, v$
também são chamados de *vértices* e os segmentos $e_0, \ldots, e_{n-2}$ de *arestas*. (Notação: os índices se
considerados ciclicamente, assim, por exemplo, $v_n = v_0$, $e_{n-1} = e_0, \ldots$)

Uma curva poligonal é *fechada* se o último ponto da sequência é igual ao primeiro, ou seja, $v_0 =$
Uma curva polígonal é *simples* se ela não se autointersecta. Mais precisamente, isto significa qu
segmento e_i só intersecta (possivelmente) o segmento e_{i+1} no ponto v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$.



curva poligonal — fechada não-simples — fechada simples

O famoso Teorema de Jordan diz que toda curva plana fechada simples divide o plano em d
regiões: o *interior* e o *exterior* da curva. Definimos um *polígono* como sendo a região fechada
plano (no sentido topológico) limitada por uma curva poligonal fechada simples. O termo *políg
simples* também é frequentemente usado com este mesmo sentido. Convencionaremos que os vérti
de um polígono serão sempre listados na ordem em que eles aparecem ao percorrermos a front
do polígono no sentido anti-horário. A fronteira de um polígono P será denotada por ∂P. Da no
definição temos que $\partial P \subseteq P$.

Diremos que dois pontos p e q de um polígono P *vêem* ou *enxergam* um ao outro se o segmento
liga p e q, denotado por pq, está inteiramente contido no polígono P.

A planta de uma sala, com n paredes, de uma galeria de arte pode ser vista como sendo
polígono formado por n vértices (ou arestas). Considere o problema de determinar-se onde dever
dispor guardas na galeria de tal modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos
guarda. Pensaremos em um guarda como sendo um ponto e diremos que um conjunto de guar
guardam ou *cobrem* um polígono se cada ponto do polígono pode ser visto por pelo menos um guar
Victor Klee propôs o seguinte problema.

Problema 1. *Dado n, determinar, como uma função de n, o número mínimo de guardas suficie
para cobrir um polígono arbitrário com n vertices.*

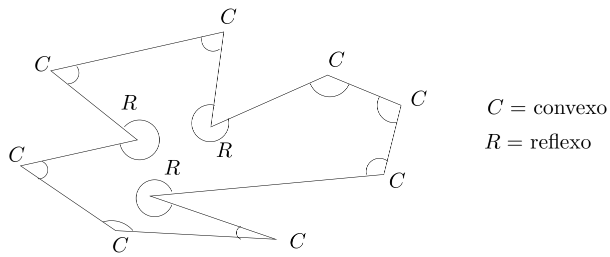
Se denotarmos por $g(P)$ o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono
por $G(n)$ o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono com n vértices, en
temos que

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}.$$

Não é difícil ver que $G(n) \leq n$. Podemos colocar um guarda em cada vértice do polígono. Ape
deste fato ser trivial, é interessante notar que a generalização para o espaço tridimensional é falsa

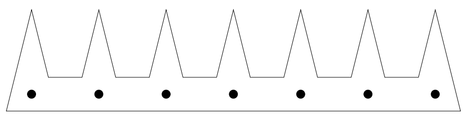
Salas que têm o formato de um polígono convexo, com qualquer número de vértices, podem
cobertas por apenas um guarda, colocado em qualquer ponto da sala. Todo polígono com três vérti
é convexo, logo $G(3) = 1$. Existem polígonos com quatro vértices que não são convexos.

Diremos que um vértice de um polígono é *reflexo* ou *concavo* se o seu ângulo interior é maior do que π. Já se o ângulo interior do vértice de um polígono for no máximo π, diremos que o vértice é *convexo*.



Um polígono com quatro vértices (um quadrilátero) pode ter no máximo um ângulo reflexo. Mesmo assim é possível cobrirmos o polígono com apenas um guarda, ou seja, $G(4) = 1$. Um polígono com cinco vértices pode ter 0, 1 ou 2 vértices reflexos. Fazendo alguns experimentos podemos ver que polígonos com cinco vértices podem ser cobertos por apenas um guarda, ou seja, $G(5) = 1$. Existem polígonos com 6 vértices que necessitam de 2 guardas para serem cobertos.

Uma questão interessante em geometria combinatória é saber como o número de guardas necessários para cobrir um polígono cresce como uma função de n. O polígono 'pente' mostra que $G(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$, ou seja, que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.



Este número é sempre suficiente, ou seja, um polígono com n vértices pode ser sempre guardado por no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas. É o que mostra um resultado muito bacana em geometria combinatória, o chamado *Chvátal's Art Gallery Theorem*.

Teorema 2 (Teorema da Galeria de Arte)**.** *Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.*

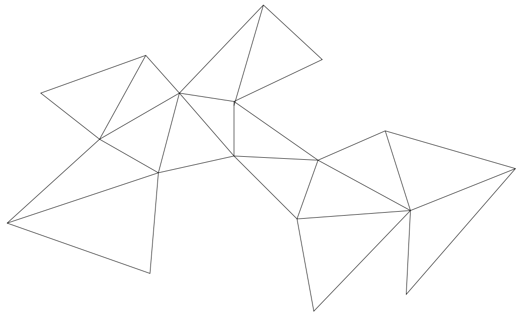
A primeira demonstração deste teorema é, naturalmente, devida a Chvátal. Fisk, três anos mais tarde, apresentou uma prova muito simples deste teorema. Esta prova baseia-se em dois conceitos: triangulação de polígonos e coloração de vértices de um grafo.

1.1. **Diagonais e triangulação.** Dois vértices u e v de um polígono P se vêem ou se enxergam *claramente* se o segmento uv com extremos u e v está inteiramente contido em P e se, além disso, a intersecção de uv com a fronteira ∂P de P é igual a $\{u, v\}$. Ou seja, u e v se vêem claramente se

(i) $uv \subset P$ e
(ii) $uv \cap \partial P = \{u, v\}$.

Uma *diagonal* de um polígono P é um segmento de reta entre dois vértices de P que se vêem claramente. Duas diagonais distintas uv e wx de P se cruzam se $uv \cap wx \not\subset \{u, v, w, x\}$. Se colocarmos em um polígono P o maior número possível de diagonais que duas-a-duas não se cruzam, obteremos uma *triangulação* do polígono P. Uma triangulação de P pode ser vista como a união das arestas de P e um conjunto maximal de diagonais de P que duas-a-duas não se intersectam, a não ser, eventualmente, nos seus extremos. Uma outra maneira de pensarmos em uma triangulação de um polígono P (e às vezes será mais conveniente pensarmos desta maneira) é como um conjunto de triângulos que cobrem o polígono P e que se intersectam apenas em vértices e diagonais de P.

Teorema 3 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*



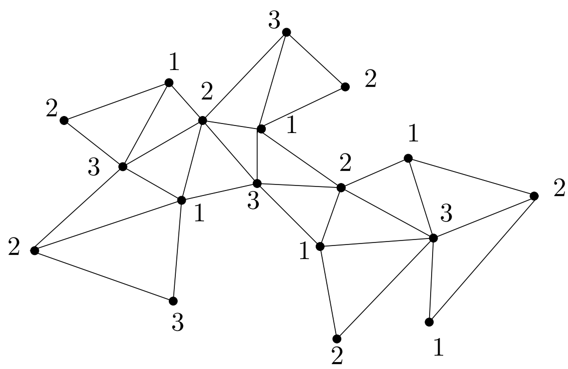
Demonstraremos o Teorema 3 na próxima seção. A demonstração é baseada no fato de que to polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal. Este fato pode parecer trivial, entretan teremos um pouco de trabalho para verificá-lo.

1.2. **Coloração de vértices de um grafo.** Um grafo $G = (V, E)$ é *k-colorível* se for possível a buirmos cores $c_1, \ldots, c_k$ aos (ou colorirmos os) vértices de G de tal forma que se u e v são vérti adjacentes em G então a cor atribuída a u é diferente da cor atribuída a v.

Associaremos um grafo (planar) $G_T = (V, E)$ à triangulação T de um polígono P da segui maneira. O conjunto do vértices V de G_P será o conjunto dos vértices de P e existirá uma are em E ligando vértices u e v de G_T se o segmento uv faz parte da triangulação T.

É um fato conhecido que todo grafo planar pode ser 4-colorido (o famoso *Teorema das 4 Cor* Com grafos associados a triangulações, que são planares, podemos fazer melhor que isto.

Teorema 4. *Seja G_T o grafo associado a uma triangulação T de um polígono. Então G_T é 3-colorí*



O teorema anterior também será demonstrado na próxima seção.

1.3. **Demonstração do Teorema da Galeria de Arte.** Seja P um polígono com n vértices. M traremos que P pode ser coberto por $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas. Pelo Teorema 3, sabemos que todo polígon triangularizável, assim seja T uma triangulação de P. Do Teorema 4, sabemos que o grafo G_T asso ado a T é 3-colorível. Considere uma tal 3-coloração e suponha que as cores usadas foram, digam azul, verde e amarela. Observemos que cada triângulo de T tem pelo menos um vértices de cada u dessas cores. Como a coleção de triângulos de T cobrem P e cada triângulo tem um vértice de amarela (ou qualquer outra cor) então guardas colocados nos vértices amarelos cobrem P. Analo mente, guardas colocados em vértices de cor azul cobrem P e guardas colocado em vértices de verde cobrem P. Pelo menos uma dessas 3 cores é usada em não mais do que $n/3$ vértices. Com número de vértices com uma determinada cor é um número inteiro podemos trocar $n/3$ por $\lfloor n/$ Logo, $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são suficiente e eventualmente necessários para cobrirmos um polígono com vértices.

2. Teoria de triangulações

Nesta seção, provaremos alguns resultados relacionados com triangulação de polígonos. Também mostraremos o Teorema 3 e 4, que deixamos de provar na seção anterior. Para estudarmos os aspectos algorítmicos de triangulação e partição de polígono ainda teremos que esperar um pouco.

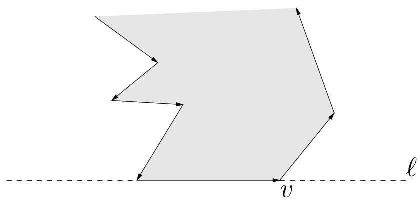
Lema 5. *Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.*

Demonstração. Seja P um polígono. Oriente as arestas de P no sentido anti-horário. Um transeunte andando sobre ∂P, e seguindo a orientação, teria o interior do polígono à sua esquerda. Assim, em um vértice estritamente convexo, o nosso transeunte virará à esquerda e em um vértice estritamente reflexo ele virará à direita.

Seja v o vértice de P com

(i) Y-coordenada mínima; e
(ii) X-coordenada máxima, respeitando (i).

Seja ℓ a reta horizontal passando sobre v. A aresta seguindo v deve estar acima de ℓ. Logo, nosso traseunte deve virar à esquerda em v. Portanto, v é um vértice estritamente convexo. ∎

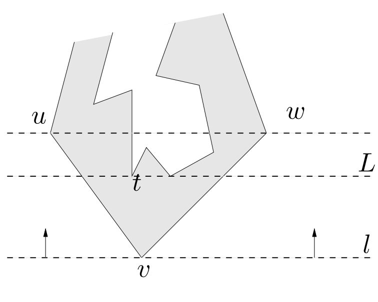


Lema 6 (Meister [5]). *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal.*

Demonstração. Seja P um polígono com $n \geq 4$ vértices e seja v um vértice estritamente convexo de P. Sejam u e w vértices adjacentes a v. Se uw é uma diagonal do polígono então não há o que demonstrar. Logo, suponhamos que uw não é uma diagonal de P, ou seja,

- ou $uw \not\subset P$;
- ou $uw \subset P$ e $uw \cap \partial P \not\subset \{u, w\}$.

Como $n \geq 4$ então o triângulo de vértices v, u, w, denotado por $\triangle(v, u, w)$, contém pelo menos um vértice de P distinto de v, u e w. Seja t um vértice de P em $\triangle(v, u, w)$ mais próximo de v, onde a distância é medida ortogonalmente à reta passando pelo segmento uw. Logo, t é o primeiro vértice de P atingido quando movemos a reta ℓ paralela a vw de v na direção de uw.



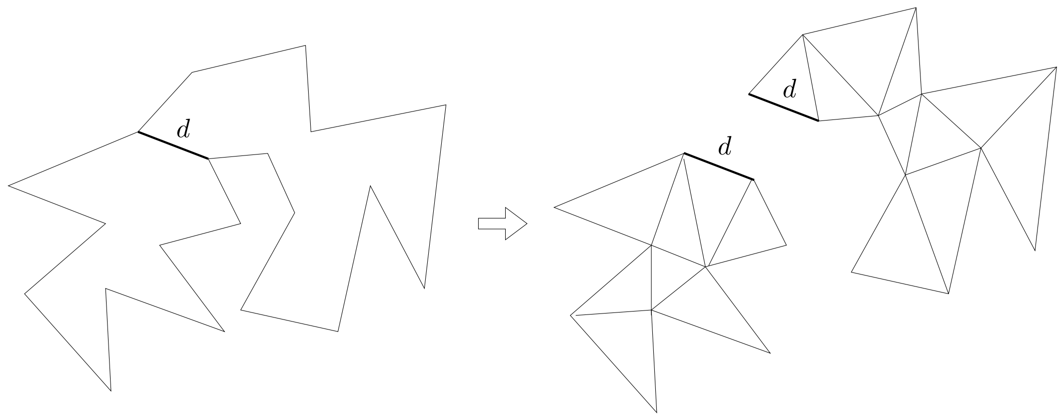
Afirmamos que vt é uma diagonal de P. De fato, seja L a reta passando por t e paralela ao segmento uw. Notemos que a interseção do semiplano determinado por L contendo o vértice v com o triângulo $\triangle(u, v, w)$ é um triângulo que não tem *nenhum* ponto de ∂P no seu interior. Logo, o vértice v vê t claramente, e vt é uma diagonal de P. ∎

Estamos prontos para provar o Teorema 3, cujo enunciado é repetido a seguir.

Teorema 3 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser particionado triângulos através da inclusão diagonais (zero ou mais).*

Demonstração. Seja P um polígono. A prova é por indução no número n de vértices do polígono Se $n = 3$, o polígono é um triângulo e o teorema vale, já que não precisamos adicionar nenhu diagonal.

Suponha que $n \geq 4$. Pelo Lema 6, sabemos que P possui uma diagonal d. O segmento d particiona em dois polígonos com menos do que n vértices, cada um tendo d como aresta. Aplicando a hipót de indução temos que cada um desses (sub)polígonos pode ser triangulado. Logo, combinando triangulações de cada um dos polígonos e d, obtemos uma triangulação de P.



Lema 7 (Número de diagonais)**.** *Toda triangulação de um polígono de n vértices consiste de n diagonais e $n-2$ triângulos.*

Demonstração. Seja P um polígono. Provaremos o lema por indução no número n de vértices de Ambas as afirmações são verdadeiras para $n = 3$, ou seja, para um triângulo.

Suponhamos que $n \geq 4$. Particionemos P em dois polígonos P_1 e P_2 através de uma diago arbitrária d. Suponhamos que P_1 tenha n_1 vértices e P_2 tenha n_2 vértices. Assim, temos que $n_1 + n$ $n + 2$.

Aplicando a hipótese de indução ao polígono P_1 e ao polígono P_2, temos que toda triangula de P_1 possui $n_1 - 3$ diagonais e toda triangulação de P_2 possui $n_2 - 3$ diagonais. Toda triangula de P que possui d induz triangulações de P_1 e P_2. Assim, toda triangulação de P que possui d te

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 \;=\; n_1 + n_2 - 5 \;=\; n + 2 - 5 \;=\; n - 3$$

diagonais. Como a escolha de d foi arbitrária, concluímos que toda triangulação de P possui n diagonais. O número de triângulos é claramente um a mais que o número de diagonais.

Lema 8 (Soma dos ângulos)**.** *A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2$*

Demonstração. Pelo Lema 7, existem $n - 2$ triângulos em uma triangulação de um polígono com vértices. Cada triângulo contribui com π para a soma dos ângulos internos.

Diremos que três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma *orelha* se uw é u diagonal de P. Duas orelhas não se sobrepõem se os seus interiores são disjuntos.

Teorema 9 (Meister's Two Ears Theorem)**.** *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui p menos duas orelhas.*

O teorema acima segue imediatamente do seguinte teorema.

Teorema 10. *Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P.*

Demonstração. A demonstração é por indução no número de vértices n de P. Se $n = 4$ então P é um quadrilátero e os dois triângulos de T são orelhas de P. Suponhamos que $n \geq 5$. Particionemos P em dois polígono P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d de T. Sejam T_1 e T_2 as triangulações de P_1 e P_2, repectivamente, obtidas através da restrição da triangulação T a P_1 e P_2. Para $i = 1, 2$, o (sub)polígono P_i é um triângulo ou, pela hipótese de indução, possui duas orelhas formadas por triângulos em T_i. Pelo menos um desses (possivelmente dois) triângulos de T_i é uma orelha de P. Note que triângulos de T_i são triângulos de T também. Como triângulos de T_1 são distintos de triângulos de T_2, temos pelo menos dois triângulos de T (um vindo de T_1, e outro de T_2) que são orelhas de P. ∎

Estamos agora preparados para demonstrar o Teorema 4 da seção anterior.

Teorema 4. *Seja G_T um grafo associado a uma triangulação T de um polígono P. Então G_T é 3-colorível.*

Demonstração. A prova é por indução no número de vértices n de G_T. Claramente um triângulo é 3-colorível. Logo, podemos supor que $n \geq 4$. Pelo Teorema 10 sabemos que P tem uma orelha (na realidade pelo menos duas) que é formada por um triângulo $\triangle(u, v, w)$ de T. Seja P' o polígono obtido a partir de P através da remoção desta orelha (isto é, troque a subsequência $\ldots, u, v, w, \ldots$ na fronteira ∂P de P, pela subsequência $\ldots, u, w, \ldots$) e seja T' a triangulação de P' obtida a partir de T, simplesmente removendo-se $\triangle(u, v, w)$. P' tem $n - 1$ vértices e pela hipótese de indução o grafo $G_{T'}$ associado à triangulação T' é 3-colorível . O grafo G_T pode ser obtido a partir de $G_{T'}$ simplesmente adicionando o vértice v e as arestas uv e vw. Logo, existe (uma única!) maneira de estendermos a 3-coloração de $G_{T'}$ a uma 3-coloração de G_T ('pinte' v com a cor que não pintamos u nem w). ∎

Referências

[1] A. Below, J.A. De Loera e J. Richter-Gebert, Finding minimal triangulations of convex 3-polytopes is NP-hard, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, ACM-SIAM, 2000, pp. 65–66.

[2] V. Chvátal, A combinatorial theorem in plane geometry, *Journal of Combinatorial, Series B* **18** (1975), 39–41.

[3] S. Fisk, A short proof of Chvátal's watchman theoreom, *Journal of Combinatorial Theory, series B* **24** (1978), 374.

[4] R.P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics*, Addison-Wesley, 1994, QA832 G861d.

[5] G.H. Meister, Polygons have ears, *American Mathematical Monthly* **82** (1975), 648.

[6] J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.

[7] ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.

[8] J. Ruppert e R. Seidel, On the difficult of triangulating three-dimensional non-convex polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* **7** (1992), 227–253.