Geometria Computacional

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Segundo Semestre de 2011

Lista 2

1. [Exercício 1.1.4.6 do O'Rourke — guardando a parede] Construa um polígono P e disponha guardas em P de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em ∂P, mas existem pontos em P que não são vistos/cobertos pelos guardas.
2. [Exercício 1.1.4.6 do O'Rourke — guardas em poliedros] Descreva um poliedro em $\mathbb{R}^3$ que mesmo colocando-se guardas em todos os vértices existam pontos do poliedro que não são cobertos pelos guardas. **Sugestão.** Veja o Capítulo 9 do O'Rourke (1987).
3. ['Tetraedrização' de poliedros] Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem 'buracos') em $\mathbb{R}^3$ que não pode ser particionado em tetrahedros tendo vértices selecionados dentre os vértices do politopo. **Sugestão.** Veja o Capítulo 10 do O'Rourke (1987). **Observação.** Ruppert e Seidel mostraram que o seguinte problema é NP-completo: dado um politopo P em $\mathbb{R}^3$, decidir se P pode ser tetraedrizado. Below, De Loera e Richter-Gebert provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em $\mathbb{R}^3$ é NP-difícil. (Note que isto, em particular, significa que politopos convexos possuem tetraedrizações com um número diferente de tetraedros — em dimensão 2 não temos um fato semelhante.)
4. Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono com n vértices. Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um polígono (vértices em sentido anti-horário a medida que ocorrem quando percorremos ∂P) e seja $V_k := \{v_i \mid i \mod 3 = k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Então guardas colocados nos vértices em V_k cobrem o polígono P para algum $k \in \{0, 1, 2\}$. Apresente um exemplo que mostra que o professor Sperto está enganado.
5. [Exercício 1.1.4.2 do O'Rourke — visibilidade clara] Seja $G'(n)$ o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com n vértices. Qual é a relação entre $G(n)$ e $G'(n)$? A prova de Fisk estabelece que $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$? Tente determinar $G'(n)$ exatamente.
6. [Exercício 1.1.4.3 do O'Rourke — guardas nos vértices] Tente resolver o exercício anterior com a restrição que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.
7. [Exercício 1.2.5.1 do O´Rourke — soma dos ângulos externos] Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com n vértices.
8. O *dual* de uma triangulação T de um polígono P é um grafo com um vértice associado a cada triângulo de T e uma aresta ligando dois vértices se e somente se os triângulos correspondentes têm um lado (diagonal) em comum. Prove que o dual D de uma triangulação é uma árvore (uma árvore é um grafo conexo sem ciclos).
9. Prove ou de um contra-exemplo: Toda árvore binária é dual de uma triangulação de algum polígono.
10. [Exercício 1.2.5.3 do O'Rourke — triangulações extremais] Quais polígonos tem o menor número de triangulações (em função do número de vértices n)? Um polígono de n vértices pode ter uma única triangulação? Quais polígonos de n vértices tem o maior número de triângulações distintas?
11. [Exercício 1.2.5.4 do O'Rourke — número de triangulações] Qual o número de triangulações distintas de um polígono convexo com n vértices? **Sugestão.** Veja o Capítulo 10, 505–508, de Grimaldo (1994).
12. [Exercício 1.2.5.7 do O'Rourke — rotações em árvores] Para aqueles que conhecem a operação de `rotação` para manter o balanceamento de árvores binárias de busca. Interprete a operação de `rotação` em termos de triangulação de polígonos.
13. O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6 (Meister). Ele sugeriu que o vértice t, escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre v e t fosse mínima e afirmou que escolhendo t dessa maneira vt é uma diagonal do polígono P. O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstração do lema para fazer este exercício.)
14. [Minimizar o número de guardas está em NP] Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: dados um polígono P e pontos $p_1, \ldots, p_k$, decidir se guardas colocados nos pontos $p_1, \ldots, p_k$ cobrem P.
15. [Minimizar o número de guardas é NP-díficil] Considere o problema de decisão: dados um polígono P e um inteiro positivo k, decidir se P pode ser coberto por k guardas. Mostre que este problema é NP-completo. **Sugestão.** Veja o Capítulo 9 do O'Rourke (1987).