# Análise de Algoritmos

KT 5.5 e CLRS 28.2

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

# Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

| | 1 | | | | | | | | | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 31 | −41 | 59 | 26 | −53 | 58 | 97 | −93 | −23 | 84 |

# Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

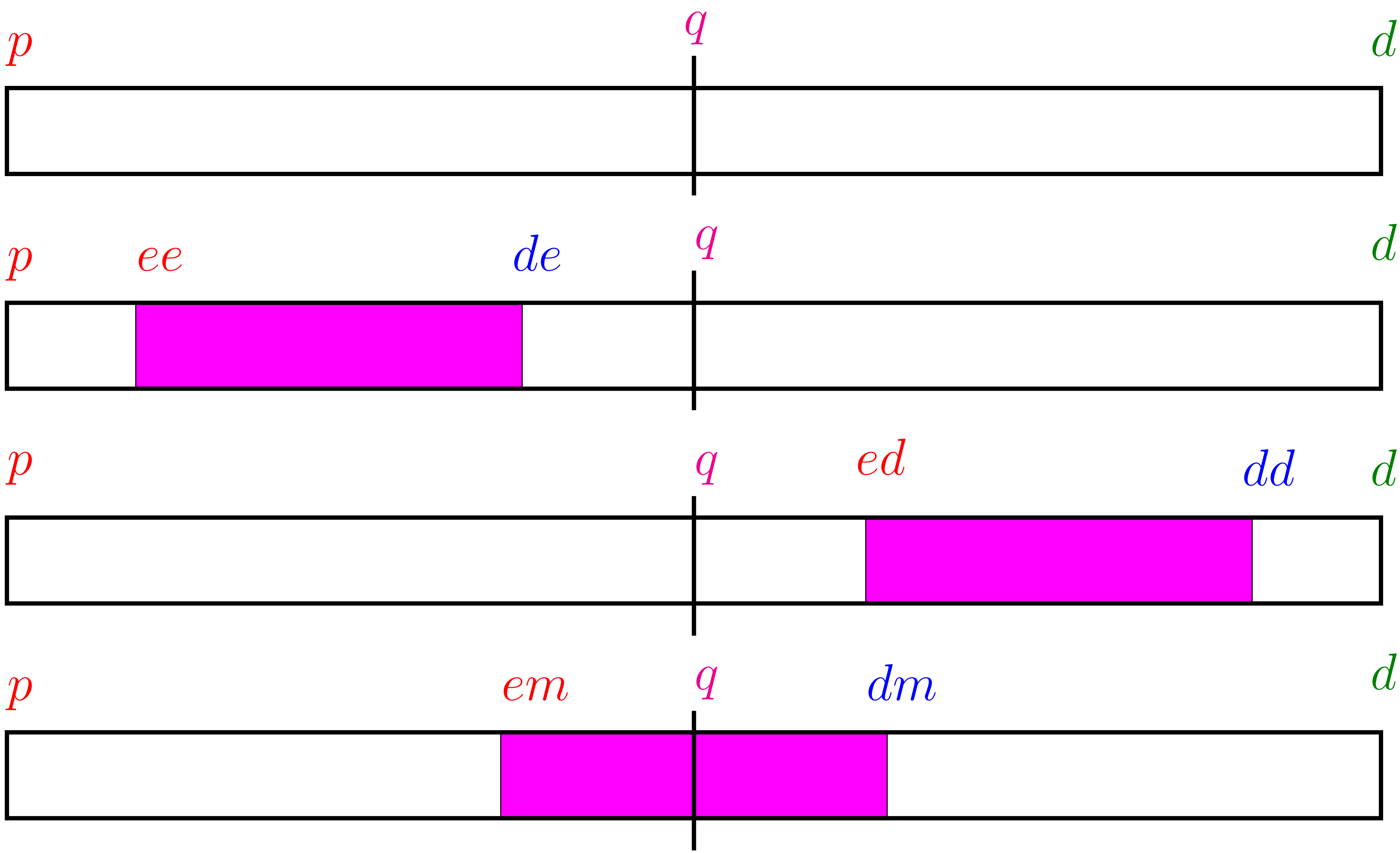
| | 1 | | | | | | | | | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 31 | −41 | 59 | 26 | −53 | 58 | 97 | −93 | −23 | 84 |

Sai:

| | 1 | | 3 | | | | 7 | | | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 31 | −41 | 59 | 26 | −53 | 58 | 97 | −93 | −23 | 84 |

$A[e\,..\,d] = A[3\,..\,7]$ é segmento de soma máxima.
$A[3\,..\,7]$ tem soma $187$.

# Solução de divisão-e-conquista



# Algoritmo de divisão-e-conquista

Setermina soma máxima de um seg. de $A[p\,..\,d]$.

SEG-MAX-DC $(A, p, d)$

se $p = d$ **então devolva** $\max(0, A[p])$
$q \leftarrow \lfloor (p+d)/2 \rfloor$
$maxesq \leftarrow$ SEG-MAX-DC$(A, p, q)$
$maxdir \leftarrow$ SEG-MAX-DC$(A, q+1, d)$
$max2esq \leftarrow soma \leftarrow A[q]$
**para** $i \leftarrow q - 1$ **decrescendo até** $p$ **faça**
    $soma \leftarrow soma + A[i]$
    $max2esq \leftarrow \max(max2esq, soma)$
$max2dir \leftarrow soma \leftarrow A[q+1]$
**para** $f \leftarrow q + 2$ **até** $d$ **faça**
    $soma \leftarrow soma + A[f]$
    $max2dir \leftarrow \max(max2dir, soma)$
$maxcruz \leftarrow max2esq + max2dir$
**devolva** $\max(maxesq, maxcruz, maxdir)$

# Correção

Verifique que:

- $maxesq$ é a soma máxima de um segmento de $A[p \,..\, q]$;
- $maxdir$ é a soma máxima de um segmento de $A[q+1 \,..\, d]$; e
- $maxcruz$ é a soma máxima de um segmento da forma $A[i \,..\, f]$ com $i \leq q$ e $q+1 \leq f$.

Conclua que o algoritmo devolve a soma máxima de um segmento de $A[p \,..\, d]$.

# Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome $1$ unidade de tempo o consumo total é:

| linha | | todas as execuções da linha | |
|---|---|---|---|
| 1-2 | $=$ | $2$ | $= \Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ | $= T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ |
| 4 | $=$ | $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ | $= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ |
| 5 | $=$ | $1$ | $= \Theta(1)$ |
| 6 | $=$ | $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ | $= \Theta(n)$ |
| 7-8 | $=$ | $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ | $= \Theta(n)$ |
| 9 | $=$ | $1$ | $= \Theta(1)$ |
| 10 | $=$ | $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ | $= \Theta(n)$ |
| 11-12 | $=$ | $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ | $= \Theta(n)$ |
| 13-14 | $=$ | $2$ | $= \Theta(1)$ |

total $= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n)$

# Consumo de tempo

$T(n) :=$ consumo de tempo quando $n = d - p + 1$

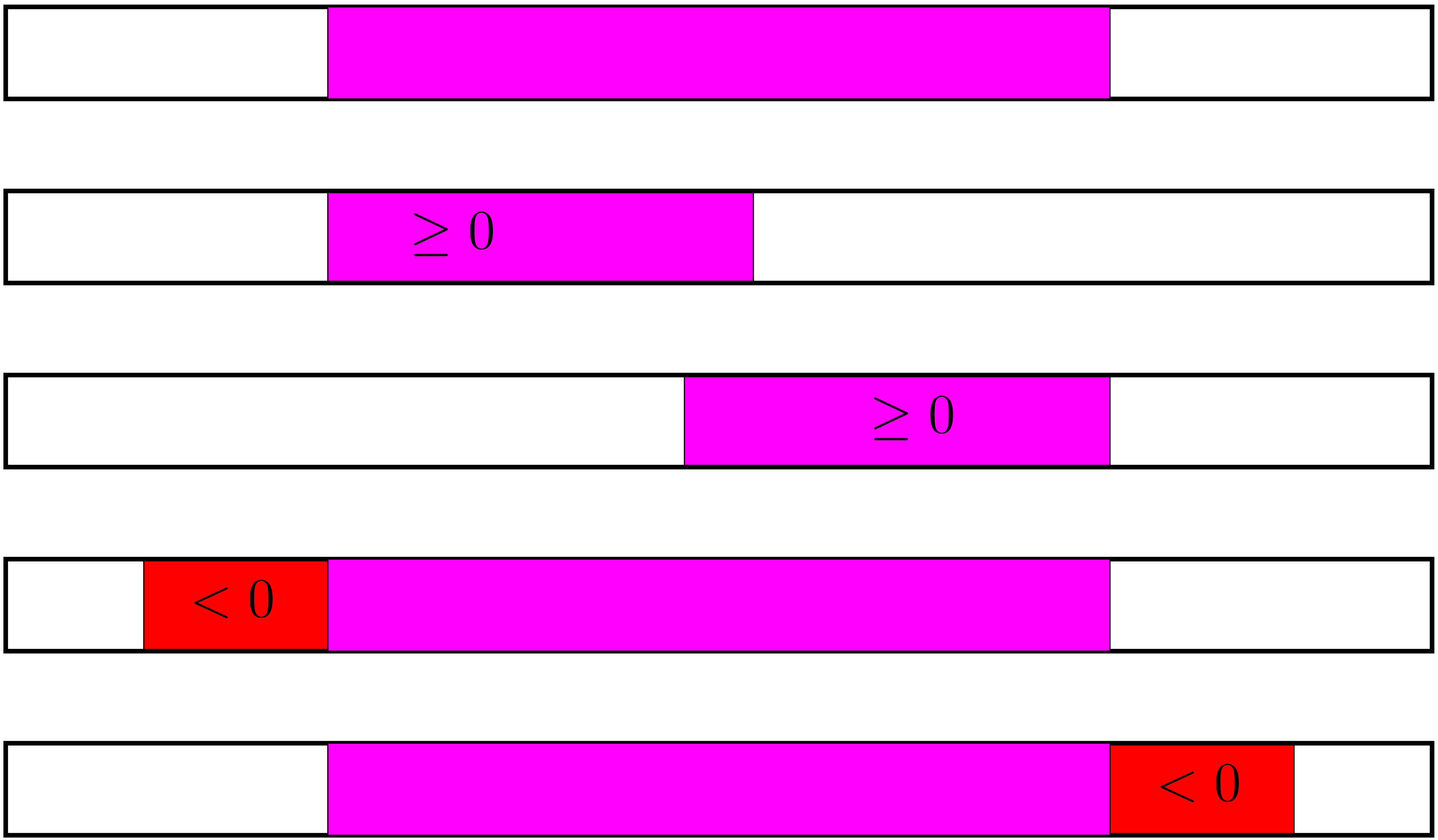
Na análise do consumo de tempo do SEG-MAX-DC chegamos a (já manjada) recorrência com $\Theta$ do lado direito:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

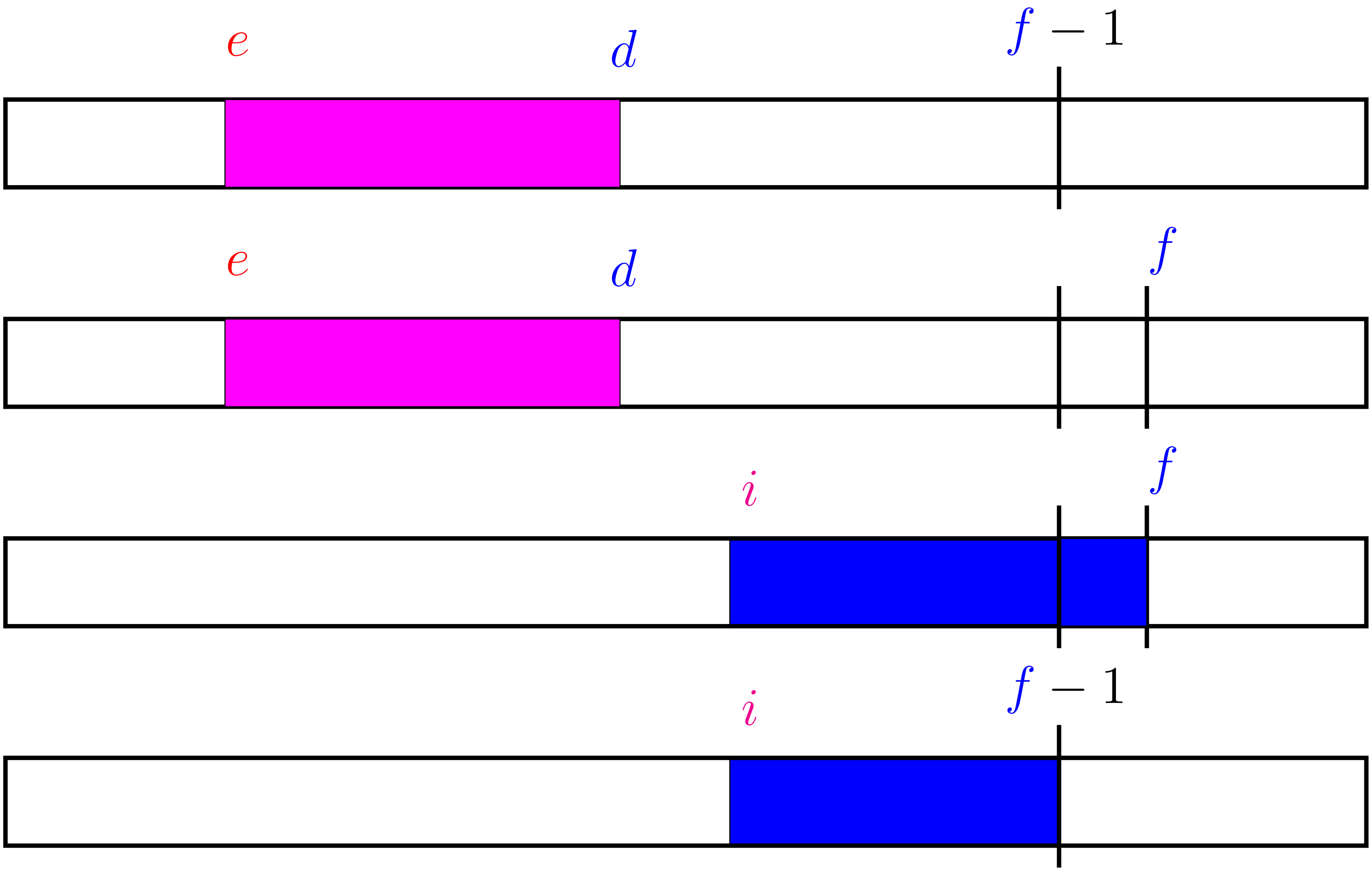
Solução assintótica: $T(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

# Cara da solução

Solução



# Solução indutiva



# Algoritmo linear

Determina um segmento de soma máxima de $A[1\,..\,n]$ (por Jay Kadane).

SEG-MAX-1 $(A, n)$

$somamax \leftarrow 0$
$e \leftarrow 0 \quad d \leftarrow -1 \quad \triangleright\ A[e\,..\,d]$ é vazio
$i \leftarrow 1$
$soma \leftarrow 0$
**para** $f \leftarrow 1$ **até** $n$ **faça**
  **se** $soma + A[f] < 0$
    **então** $i \leftarrow f + 1 \quad soma \leftarrow 0$
    **senão** $soma \leftarrow soma + A[f]$
  **se** $soma > somamax$ **então**
    $somamax \leftarrow soma \quad e \leftarrow i \quad d \leftarrow f$
**devolva** $e, d$ **e** $somamax$

# Correção

Verifique que:

- $A[e \mathinner{..} d]$ é um segmento de soma máxima em $A[1 \mathinner{..} f-1]$.
- $somamax$ é a soma de $A[e \mathinner{..} d]$.
- $A[i \mathinner{..} f-1]$ é um segmento de soma máxima que termina em $f-1$.
- $soma$ é a soma de $A[i \mathinner{..} f-1]$.

Conclua que o algoritmo devolve a soma máxima de um segmento de $A[1 \mathinner{..} n]$.

# Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome $1$ unidade de tempo o consumo total é:

| linha | | todas as execuções da linha | |
|---|---|---|---|
| 1-2 | $=$ | $2$ | $= \Theta(1)$ |
| 3-4 | $=$ | $2$ | $= \Theta(1)$ |
| 5 | $=$ | $n+1$ | $= \Theta(n)$ |
| 6 | $=$ | $n$ | $= \Theta(n)$ |
| 7-8 | $=$ | $n$ | $= \Theta(n)$ |
| 9 | $=$ | $n$ | $= \Theta(n)$ |
| 10 | $\leq$ | $n$ | $= \mathrm{O}(n)$ |
| 11 | $=$ | $1$ | $= \Theta(1)$ |
| total | $=$ | $\Theta(4n+3) + \mathrm{O}(n)$ | $= \Theta(n)$ |

# Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-3 é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-2 é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-DC é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-1 é $\Theta(n)$.

# Técnicas

- Evitar recálculos. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recalculá-los (SEG-MAX-2, SEG-MAX-1, programação dinâmica).
- Divisão-e-conquista. Os algoritmos Mergesort e SEG-MAX-2 utilizam uma forma conhecida dessa técnica.
- Algoritmos incrementais/varredura. Como estender a solução de um subproblema a uma solução do problema (SEG-MAX-1).
- Delimitação inferior. Bons projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (SEG-MAX-1).

# Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

| | 12 | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 9 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 | 2 | 9 | 8 |
| $Y$ | 0 | 6 | 3 | 2 | 8 | 4 | 9 | 9 | 3 | 8 | 4 | 4 |

# Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\mathinner{.\,.} n]$ e $Y[1\mathinner{.\,.} n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

| | 12 | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 9 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 | 2 | 9 | 8 |
| $Y$ | 0 | 6 | 3 | 2 | 8 | 4 | 9 | 9 | 3 | 8 | 4 | 4 |

Sai:

$X \cdot Y$

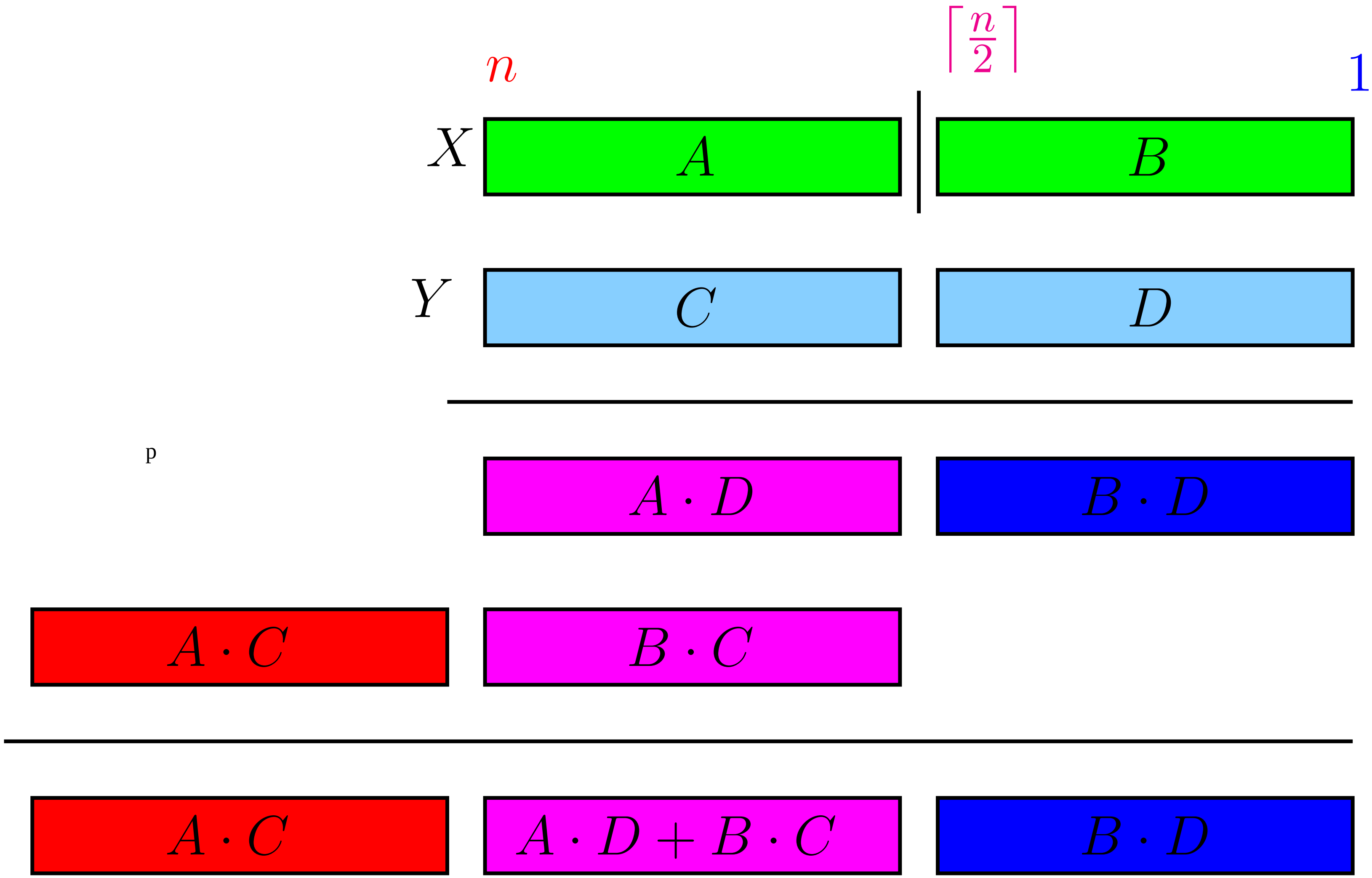
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 4 | 4 | 0 | 8 | 7 | 2 | 8 | 6 | 7 | 0 | 2 | 7 | 1 | 4 | 1 | 0 | 2 | 9 | 5 | 1 | 2 |

# Algoritmo do ensino fundamental

```
                   * * * * * * * *
                 × * * * * * * * *
                 -----------------
                 * * * * * * * * *
               * * * * * * * * *
             * * * * * * * * *
           * * * * * * * * *
         * * * * * * * * *
       * * * * * * * * *
     * * * * * * * * *
   * * * * * * * * *
 ---------------------------------
 * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

# Divisão e conquista




$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^n + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

# Exemplo

| | 4 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 1 | 4 | 1 |

| | 4 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 5 | 9 | 3 | 6 |

# Exemplo

| | 4 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 1 | 4 | 1 |

| | 4 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 5 | 9 | 3 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | 3 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $B$ | 4 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $C$ | 5 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| $D$ | 3 | 6 |

# Exemplo

$$\begin{array}{cccc} \color{red}{4} & & & \color{blue}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \color{red}{4} & & & \color{blue}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{9} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline \end{array}$$

$$X \; \boxed{3\,|\,1\,|\,4\,|\,1} \qquad Y \; \boxed{5\,|\,9\,|\,3\,|\,6}$$

$$A \; \boxed{3\,|\,1} \qquad B \; \boxed{4\,|\,1} \qquad C \; \boxed{5\,|\,9} \qquad D \; \boxed{3\,|\,6}$$

$$X \cdot Y = \color{red}{A \cdot C} \times 10^4 + \color{magenta}{(A \cdot D + B \cdot C)} \times 10^2 + \color{blue}{B \cdot D}$$

$\color{red}{A \cdot C = 1829}$ $\qquad$ $\color{magenta}{(A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535}$

$\color{blue}{B \cdot D = 1476}$

$$\begin{array}{lcccccccc} \color{red}{A \cdot C} & \color{red}{1} & \color{red}{8} & \color{red}{2} & \color{red}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \color{magenta}{(A \cdot D + B \cdot C)} & & & \color{magenta}{3} & \color{magenta}{5} & \color{magenta}{3} & \color{magenta}{5} & 0 & 0 \\ \color{blue}{B \cdot D} & & & & & \color{blue}{1} & \color{blue}{4} & \color{blue}{7} & \color{blue}{6} \\ \hline X \cdot Y = & 1 & 8 & 6 & 4 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{array}$$

# Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT $(X, Y, n)$

**se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$

$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$

$A \leftarrow X[q+1\,.\,.\,n]$ $\qquad B \leftarrow X[1\,.\,.\,q]$

$C \leftarrow Y[q+1\,.\,.\,n]$ $\qquad D \leftarrow Y[1\,.\,.\,q]$

$E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$

$F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$

$G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$

$H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$

$R \leftarrow E \times 10^{n} + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$

**devolva** $R$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com $n$ algarismos.

# Consumo de tempo

| linha | todas as execuções da linha | |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 4 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 5 | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 6 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 7 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 8 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 10 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| total | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$ |

# Consumo de tempo

Sabemos que

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 4T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 6 | 28 | 120 | 496 | 2016 | 8128 | 32640 | 130816 | 523776 |

# Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada . . .
Será?!?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad+bc & bd
\end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n$=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

# $X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

# $X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$g = (a+b)(c+d)$ $\quad$ $e = ac$ $\quad$ $f = bd$ $\quad$ $h = g - e - f$

$X \cdot Y$ (por R$ 3,06) $= e \times 10^2 + h \times 10^1 + f$

# Exemplo

$$X = \quad 2133 \quad Y = \quad 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$

$$ac = \quad ? \qquad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

# Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

# Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 2 \quad Y = \ 2 \quad X \cdot Y = \ 4$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad X \cdot Y = \; ?$

$ac = \; ? \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$

$X = \; 21 \quad Y = \; 23 \qquad X \cdot Y = \; ?$

$ac = \; 4 \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$

$X = \; 1 \quad Y = \; 3 \quad X \cdot Y = \; 3$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = \color{green}{21}33 \quad Y = \color{green}{23}12 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$\color{red}{ac} = \ ? \qquad \color{blue}{bd} = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = 2\color{green}{1} \quad Y = 2\color{green}{3} \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$\color{red}{ac} = 4 \qquad \color{blue}{bd} = 3 \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

# Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 21 \quad Y = \; 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \; 483$$
$$ac = \; 4 \qquad bd = \; 3 \qquad (a+b)(c+d) = \; 15$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = \quad 2133 \quad Y = \quad 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$
$$ac = \quad 483 \quad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

$$X = \quad 33 \quad Y = \quad 12 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$
$$ac = \quad ? \quad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = 483 \quad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = 396$$
$$ac = 3 \quad bd = 6 \qquad (a+b)(c+d) = 18$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

# Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; 483 \quad bd = \; 396 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 54 \quad Y = \; 35 \qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ 483 \quad bd = \ 396 \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 54 \quad Y = \ 35 \qquad X \cdot Y = \ 1890$$
$$ac = \ 15 \quad bd = \ 20 \qquad (a+b)(c+d) = \ 72$$

# Exemplo

$$X = \color{green}{21}33 \quad Y = \color{green}{23}12 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$\color{red}{ac} = 483 \quad \color{blue}{bd} = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = 4931496$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

# Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

```
KARATSUBA (X, Y, n)
    se n ≤ 3 devolva X · Y
    q ← ⌈n/2⌉
    A ← X[q+1 . . n]        B ← X[1 . . q]
    C ← Y[q+1 . . n]        D ← Y[1 . . q]
    E ← KARATSUBA(A, C, ⌊n/2⌋)
    F ← KARATSUBA(B, D, ⌈n/2⌉)
    G ← KARATSUBA(A + B, C + D, ⌈n/2⌉ + 1)
    H ← G − F − E
    R ← E × 10^n + H × 10^⌈n/2⌉ + F
    devolva R
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com $n$ algarismos.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 4 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 5 | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 6 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 7 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil + 1)$ |
| 8 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 10 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| total | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$ |

# Consumo de tempo

Sabemos que

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 3T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 5 | 19 | 65 | 211 | 665 | 2059 | 6305 | 19171 | 58025 |

# Recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(2) &= 1 \\ R(3) &= 1 \\ R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 14 | 15 | 29 | 36 | 45 | 53 |
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |

# Recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(2) &= 1 \\
R(3) &= 1 \\
R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots
\end{aligned}
$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 14 | 15 | 29 | 36 | 45 | 53 |
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |

Vamos mostra que $R(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.
Isto implica que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.

# Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |
| $31(n-3)^{\lg 3} - 6n$ | $*$ | $*$ | $*$ | 7 | 63 | 119 | 237 | 324 | 473 | 5910 |

# Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |
| $31(n-3)^{\lg 3} - 6n$ | $*$ | $*$ | $*$ | 7 | 63 | 119 | 237 | 324 | 473 | 5910 |

Prova:

Se $n = 4$, então $R(n) = 7 = 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$.

# Solução assintótica da recorrência

Prova: (continuação) Se $n \geq 5$ vale que

$$
\begin{aligned}
R(n) &= 3R(\lceil n/2 \rceil + 1) + n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 3(31(\lceil n/2 \rceil + 1 - 3)^{\lg 3} - 6(\lceil n/2 \rceil + 1)) + n \\
&\leq 3(31(\frac{(n+1)}{2} - 2)^{\lg 3} - 6(\frac{n}{2} + 1)) + n \\
&= 3(31(\frac{(n-3)}{2})^{\lg 3} - 3n - 6) + n \\
&= 3(31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{2^{\lg 3}} - 3n - 6) + n \\
&= 3 \cdot 31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{3} - 9n - 18 + n \\
&= 31(n-3)^{\lg 3} - 6n - 2n - 18 \\
&< 31(n-3)^{\lg 3} - 6n = \Theta(n^{\lg 3})
\end{aligned}
$$

# Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ ($1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585$).

# Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

| | |
|---|---|
| Jardim de infância | $\Theta(n\,10^n)$ |
| Ensino fundamental | $\Theta(n^2)$ |
| Karatsuba e Ofman'60 | $\mathrm{O}(n^{1.585})$ |
| Toom e Cook'63 | $\mathrm{O}(n^{1.465})$ |
| (divisão e conquista; generaliza o acima) | |
| Schönhage e Strassen'71 | $\mathrm{O}(n \lg n \lg\lg n)$ |
| (FFT em aneis de tamanho específico) | |
| Fürer'07 | $\mathrm{O}(n \lg n\, 2^{\mathrm{O}(\log^* n)})$ |

# Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

# Resultados experimentais

| $n$ | Ensino Fund. | KARATSUBA |
|---:|:---:|:---:|
| 4 | 0.005662 | 0.005815 |
| 8 | 0.010141 | 0.010600 |
| 16 | 0.020406 | 0.023643 |
| 32 | 0.051744 | 0.060335 |
| 64 | 0.155788 | 0.165563 |
| 128 | 0.532198 | 0.470810 |
| 256 | 1.941748 | 1.369863 |
| 512 | 7.352941 | 4.032258 |

Tempos em $10^3$ segundos.

# Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,.\,.\,n, 1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n, 1\,.\,.\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \qquad (1)$$

Solução custa R$ 8,04

# Divisão e conquista

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}} \times \overset{Y}{\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$$

$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

(2)

# Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M $(X, Y, n)$
**se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
$R \leftarrow$ MULTI-M$(A, E, n/2) +$ MULTI-M$(B, G, n/2)$
$S \leftarrow$ MULTI-M$(A, F, n/2) +$ MULTI-M$(B, H, n/2)$
$T \leftarrow$ MULTI-M$(C, E, n/2) +$ MULTI-M$(D, G, n/2)$
$U \leftarrow$ MULTI-M$(C, F, n/2) +$ MULTI-M$(D, H, n/2)$
$P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$
**devolva** $P$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de $n$ linhas e $n$ colunas.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 4 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 5 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 6 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 7 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 8 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| total | $=$ | $8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$T(n) \quad = \quad 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 12 | 112 | 960 | 7936 | 64512 | 520192 | 4177920 | 3348889[illegible] |

# Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(n) &= 8\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 12 | 105 | 112 | 865 | 876 | 945 | 960 |
| $20\,(n-1)^3 - 2n^2$ | $-2$ | 12 | 142 | 508 | 1230 | 2428 | 4222 | 6732 |

# Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Conclusão anterior$+$Exercício $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é
$\Theta(n^3)$.

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd
\end{aligned} \tag{4}$$

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg \\
s &= p_1 + p_2 = af + bh \\
t &= p_3 + p_4 = ce + dg \\
u &= p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh
\end{aligned}
$$

# Algoritmo de Strassen

STRASSEN $(X, Y, n)$

**se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
$P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
$P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
$P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
$P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
$P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
$P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
$P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
$R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$S \leftarrow P_1 + P_2$
$T \leftarrow P_3 + P_4$
$U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
**devolva** $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2-3 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 4-10 | $=$ | $7, T(n/2) + \Theta(n^2)$ |
| 11-14 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 15 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| total | $=$ | $7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$T(n) \quad = \quad 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 11 | 93 | 715 | 5261 | 37851 | 269053 | 1899755 | 13363821 |

# Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(n) &= 7\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

$2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 11 | 86 | 93 | 627 | 638 | 700 | 715 |
| $19\,(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ | $-1$ | 11 | 115 | 327 | 881 | 1657 | 2790 | 4337 |

# Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ ($2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$).

# Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

| | |
|---|---|
| Ensino fundamental | $\Theta(n^3)$ |
| Strassen | $\Theta(n^{2.81})$ |
| ... | ... |
| Coppersmith e Winograd | $\Theta(n^{2.38})$ |