Análise de Algoritmos

Slides de Paulo Feofiloff

[com erros do coelho e agora também da cris]

Introdução

CLRS 2.2 e 3.1
AU 3.3, 3.4 e 3.6

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Exemplo: número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Exemplo: número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Saída: 11

Inversões: $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,5)$, $(2,6)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(4,7)$, $(4,8)$, $(7,8)$, $(4,9)$ e $(7,9)$.

Número de inversões

```
CONTA-INVERSÕES (p, n)
1   c ← 0
2   para i ← 1 até n − 1 faça
3       para j ← i + 1 até n faça
4           se p[i] > p[j]
5               então c ← c + 1
6   devolva c
```

Número de inversões

```
CONTA-INVERSÕES (p, n)
1   c ← 0
2   para i ← 1 até n − 1 faça
3         para j ← i + 1 até n faça
4               se p[i] > p[j]
5                     então c ← c + 1
6   devolva c
```

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é . . .

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$\sum_{i=2}^{n} i \;=\; (n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
5	$\leq$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
6	$=$	1
total	$\leq$	$(3/2)n^2 + n/2 + 1$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$\sum_{i=2}^{n} i \;=\; (n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
5	$\leq$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
6	$=$	1
total	$\leq$	$(3/2)n^2 + n/2 + 1$

O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome não mais que $(3/2)n^2 + n/2 + 1$ unidades de tempo.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$
total	$\leq$	?	

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

$$\begin{aligned} \text{total} &\leq \left(\tfrac{t_3+t_4+t_5}{2}\right)n^2 + \left(t_2 + \tfrac{t_3-t_4-t_5}{2}\right)n + (t_1 - t_3 + t_6) \\ &= c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \end{aligned}$$

onde c_2, c_1 e c_0 são constantes que dependem da máquina.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

$$\begin{aligned} \text{total} &\leq \left(\tfrac{t_3+t_4+t_5}{2}\right)n^2 + \left(t_2 + \tfrac{t_3-t_4-t_5}{2}\right)n + (t_1 - t_3 + t_6) \\ &= c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \end{aligned}$$

onde c_2, c_1 e c_0 são constantes que dependem da máquina.

n^2 é para sempre! Está nas entranhas do algoritmo!

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n))$ $\approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $\quad$ $(3/2)n^2$ $\quad$ $9999n^2$ $\quad$ $n^2/1000$ $\quad$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n))$ $\approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $(3/2)n^2$ $9999n^2$ $n^2/1000$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

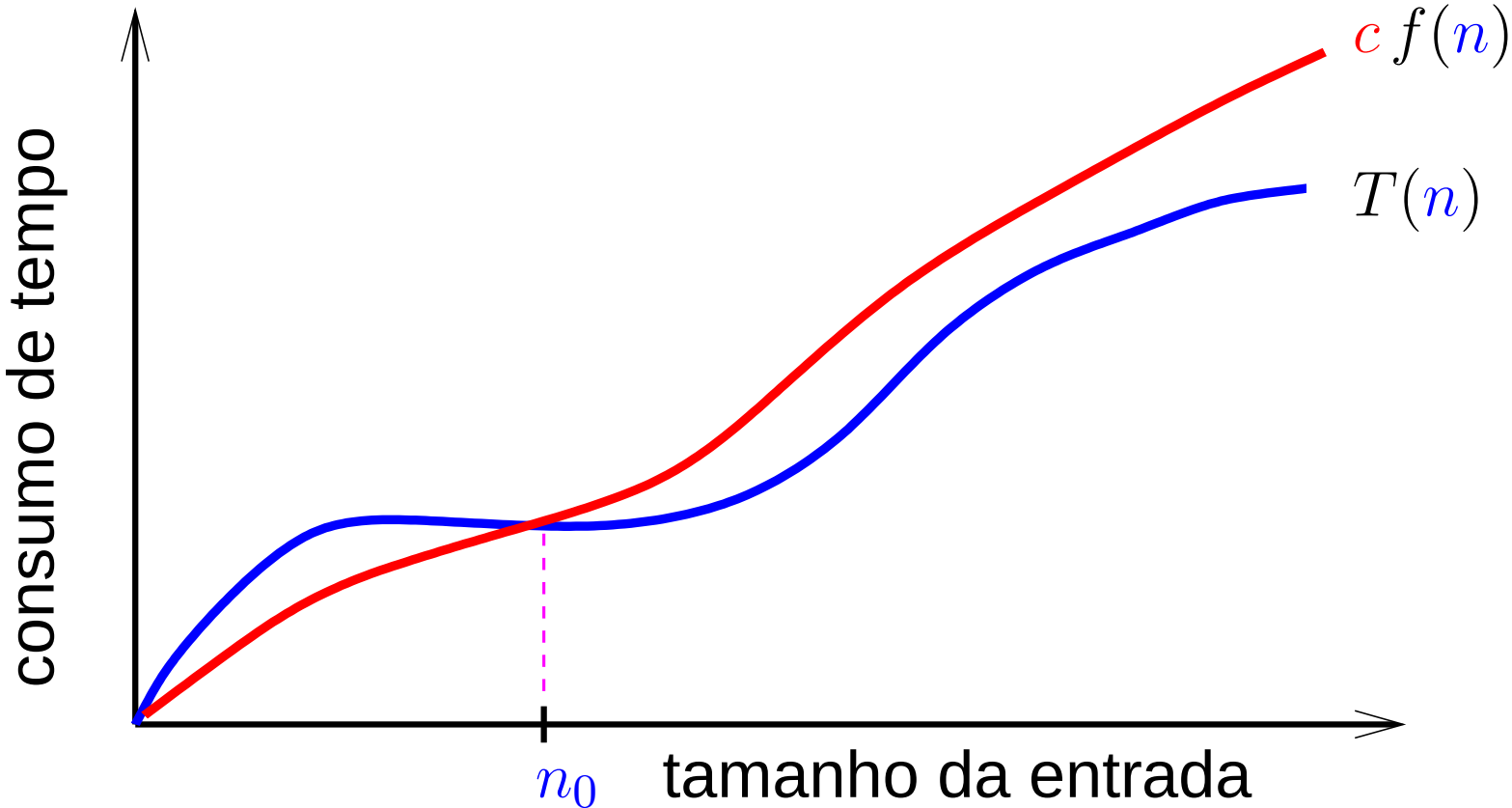
- $n^2 + 99n$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $33n^2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $9n + 2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $0{,}00001n^3 - 200n^2$ não é $\mathrm{O}(n^2)$

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros nos reais. Dizemos que $T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \leq c\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

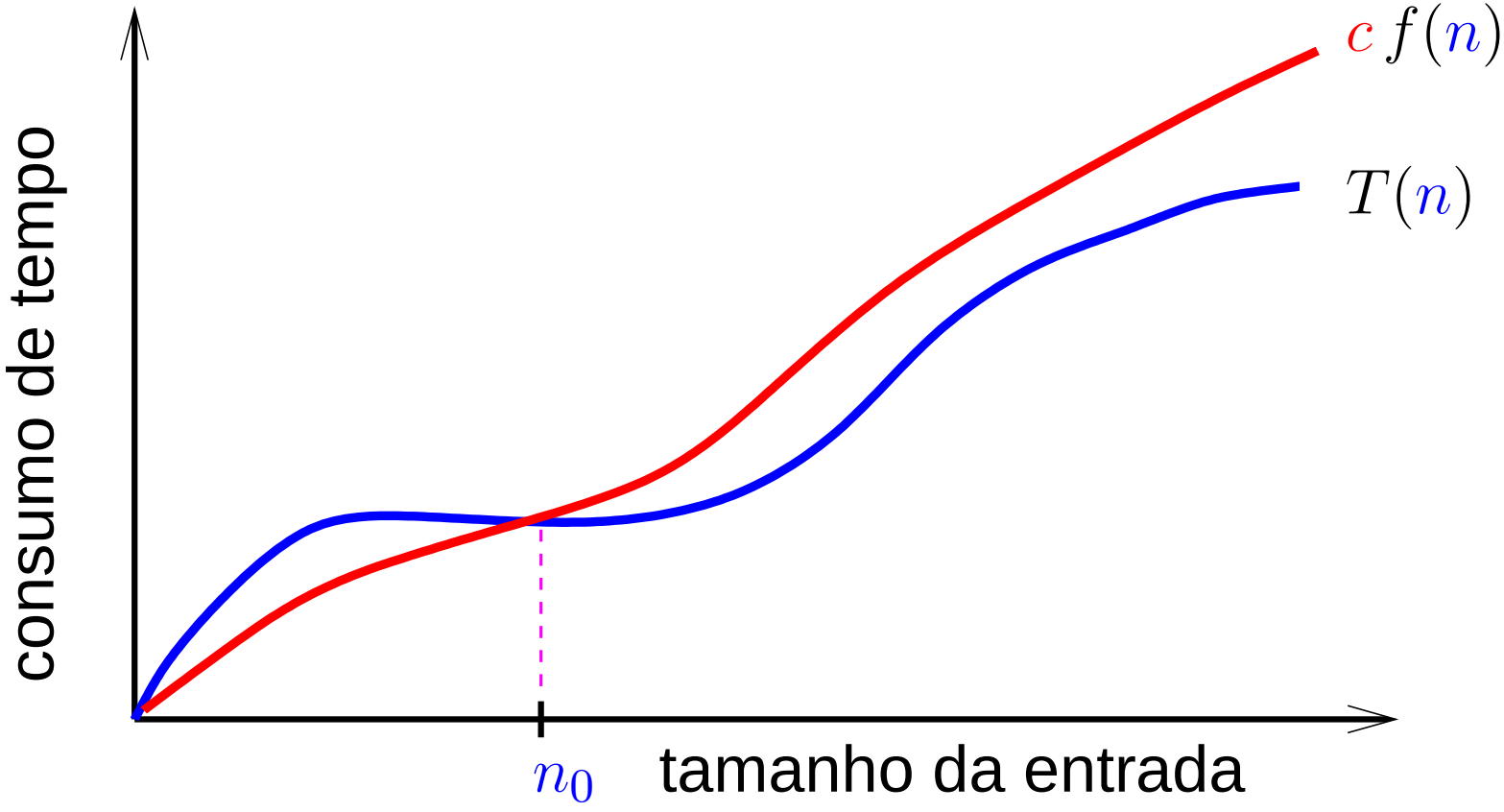


Mais informal

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$T(n) \leq c\, f(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que $\lg n \leq 1\, n$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\, n^3.$$

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\, n^3.$$

Outra prova: Para $n \geq 10$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + n\, n \lg n + n \leq 20n^3 + n^3 + n^3 = 22\, n^3.$$