MAC 338 – Anáise de Algoritmos

Gabarito parcial da Segunda Prova

1. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma seqüência de números, onde n é par. Um *pareamento* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma partição do (multi)conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em pares. Se P é um pareamento de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então a *altura* de P é o valor $\max x_i + x_j : \{x_i, x_j\}$ é um par de P. Um pareamento de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é ótimo se tem altura mínima.

   (a) Escreva (em pseudo-código, como nas aulas) um algoritmo que, dado n e um vetor $x[1\,..\,n]$ com n números, encontre e devolva um pareamento ótimo de $x[1], x[2], \ldots, x[n]$. Seu algoritmo deve consumir tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

   (b) Analise o consumo de tempo do seu algoritmo, concluindo que de fato é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

   (c) Prove que ele de fato produz um pareamento ótimo, ou seja, que nenhum emparelhamento pode ter uma altura menor que a do emparelhamento produzido pelo seu algoritmo.

```
PAREAMENTO (x, n)
  Ordena(x, n)                ▷ em ordem crescente
  para i ← 1 até n/2 faça
     P[i] ← {x[i], x[n − i + 1]}
  devolva P
```

É fácil ver que o algoritmo consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$. Resta justificar porque ele produz um pareamente ótimo.

Tome um pareamento ótimo P^* que inclua pares $P[1], \ldots, P[i]$ para i o maior possível. Se $i = n/2$, não há nada a provar: $P = P^*$ e portanto P é um pareamento ótimo. Se $i < n/2$, então considere o pareamente P', derivado de P^* da seguinte maneira. Em P^* os elementos $x[i+1]$ e $x[n-(i+1)+1]$ não formam um par. Então sejam j e k tais que, em P^*, temos os pares $\{x[i+1], x[j]\}$ e $\{x[n-(i+1)+1], x[k]\}$. Seja P' o pareamento que coincide com P^* exceto pela troca entre $x[j]$ e $x[n-(i+1)+1]$ nos pares acima. Qual é a altura do pareamento P'?

Observe que $i+1 < j < n-(i+1)+1$, logo $x[j] \leq x[n-(i+1)+1]$. Ou seja, a soma do segundo par (para onde foi $x[j]$) ou ficou igual ou diminuiu. Em fórmulas, $x[j]+x[k] \leq x[n-(i+1)+1]+x[k]$. Por outro lado, como $x[i+1] \leq x[k]$, temos também que $x[i+1]+x[n-(i+1)+1] \leq x[k]+x[n-(i+1)+1]$. Ou seja, com certeza a altura de P' é menor ou igual á altura de P^*. Mas como P^* é um pareamento ótimo, essas alturas são iguais e P' é também um pareamento ótimo. Porém P' tem um par a mais em comum com P (coincidiria com P até $i+1$ pelo menos), uma contradição à escolha de P^*. Ou seja, esse caso não ocorre. Ocorre apenas o caso em que $i = n/2$, e portanto P é um pareamento ótimo.

Erros comuns que os alunos fizeram:

A maioria dos alunos descreveu o algoritmo correto. Mas poucos escreveram uma prova correta da correção do algoritmo. Alguns dão um argumento que significa que o pareamento devolvido é um “ótimo local”, no sentido de que trocando dois elementos em um par não se obtem um pareamento melhor. Mas esse fato isolado não prova que o pareamento é ótimo. É preciso saber usar isso dentro de um argumento que compara um pareamento ótimo com o do algoritmo. Aqui, é importante observar que há casos em que um ótimo “local” não é um ótimo global, por isso tal argumento isolado não serve como prova.

Alguns alunos também argumentaram que, num pareamento ótimo, o menor sempre forma um par com o maior, mas isso não é verdade... Pense por exemplo em $x = [1, 2, 3, 30, 31, 48, 49, 50]$. O seguinte pareamento é ótimo: $\{\{1, 48\}, \{2, 49\}, \{3, 50\}, \{30, 31\}\}$. Ou seja, existem pareamentos ótimos que não formam um par com o menor e o maior elemento.