Análise de Algoritmos

Estes slides são adaptações de slides

do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Multiplicação de inteiros gigantescos

n := número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

12 … 1

X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Sai:

23 … $X \cdot Y$ … 1

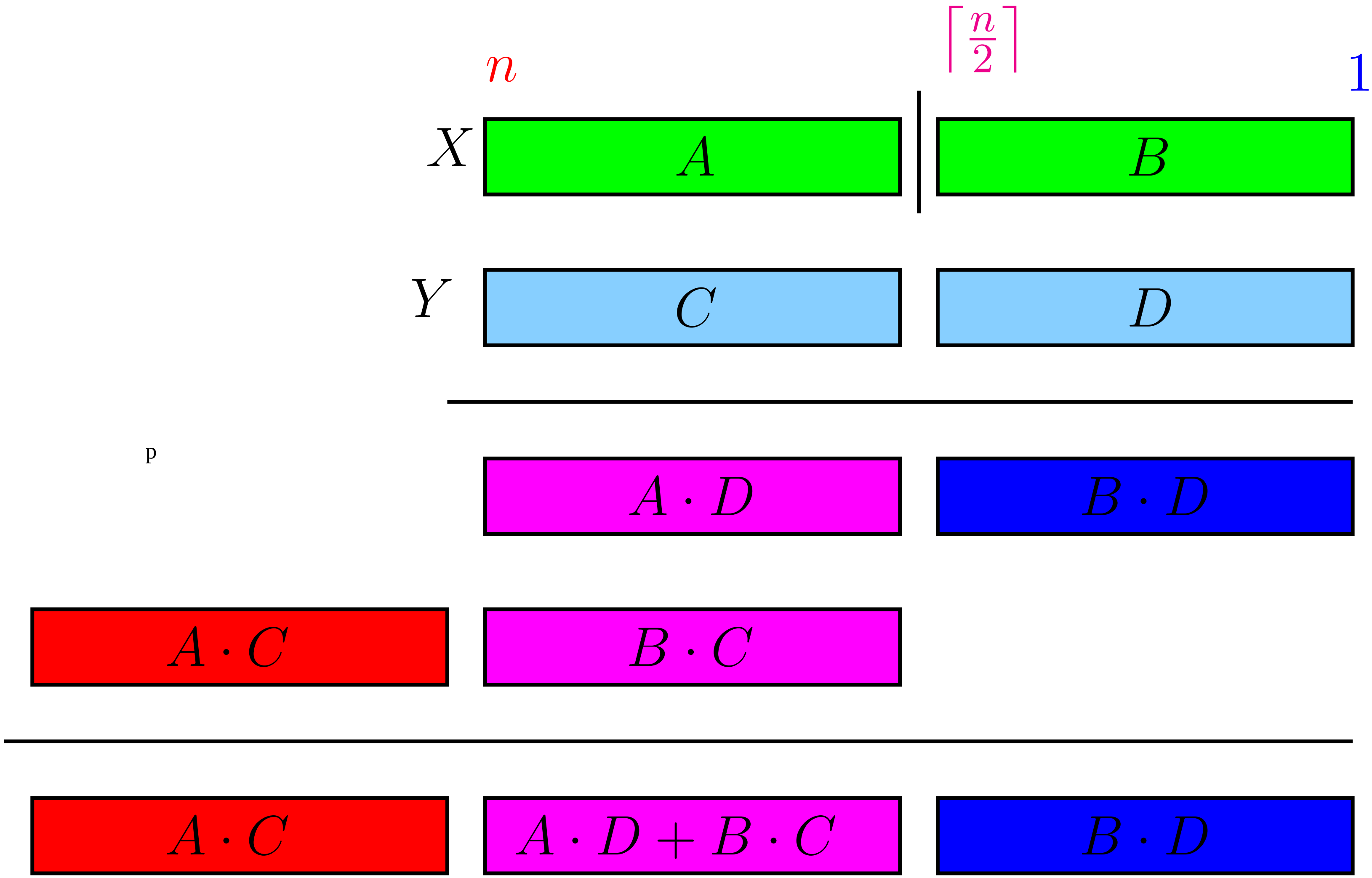
5	8	4	4	0	8	7	2	8	6	7	0	2	7	1	4	1	0	2	9	5	1	2

Algoritmo do ensino fundamental

```
                  *  *  *  *  *  *  *  *
               ×  *  *  *  *  *  *  *  *
            ------------------------------
               *  *  *  *  *  *  *  *  *
            *  *  *  *  *  *  *  *  *
         *  *  *  *  *  *  *  *  *
      *  *  *  *  *  *  *  *  *
   *  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
*  *  *  *  *  *  *  *  *
---------------------------------------------------
*  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
```

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

Divisão e conquista



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^{n} + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

Exemplo

	4			1		4			1
X	3	1	4	1	Y	5	9	3	6

Exemplo

$$X \quad \begin{array}{cccc} \color{red}{4} & & & \color{blue}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \qquad Y \quad \begin{array}{cccc} \color{red}{4} & & & \color{blue}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{9} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline \end{array}$$

$$A \ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad C \ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 9 \\ \hline \end{array} \qquad D \ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & & & 1 \\ X & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 4 & & & 1 \\ Y & \boxed{5} & \boxed{9} & \boxed{3} & \boxed{6} \end{array}$$

$$A\ \boxed{3}\boxed{1} \qquad B\ \boxed{4}\boxed{1} \qquad C\ \boxed{5}\boxed{9} \qquad D\ \boxed{3}\boxed{6}$$

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$A \cdot C = 1829$ $\qquad (A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$

$B \cdot D = 1476$

$$\begin{array}{lcccccccc} A \cdot C & 1 & 8 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A \cdot D + B \cdot C) & & & 3 & 5 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ B \cdot D & & & & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline X \cdot Y = & 1 & 8 & 6 & 4 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{array}$$

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT (X, Y, n)

se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
$A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\qquad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
$C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\qquad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
$E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
$F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
$G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
$H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
$R \leftarrow E \times 10^{n} + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
devolva R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
8	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(4n+2)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & \Theta(1) \\ T(n) & = & T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{array}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{array}{rcl} T'(1) & = & 1 \\ T'(n) & = & 4T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{array}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada . . .
Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R\$ 1,00 e
cada soma custa R\$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{llll}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

$$
\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$g = (a+b)(c+d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$$

$$\boxed{X \cdot Y \ \text{(por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f}$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$

$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$

$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$

$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$

$X = \ 2 \quad Y = \ 2 \quad X \cdot Y = \ 4$

Exemplo

$$X = \quad 2133 \quad Y = \quad 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$
$$ac = \quad ? \qquad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

$$X = \quad 21 \quad Y = \quad 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$
$$ac = \quad 4 \qquad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; ? \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 21 \quad Y = \; 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; 4 \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 1 \quad Y = \; 3 \quad X \cdot Y = \; 3$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ 4 \qquad bd = \ 3 \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$$X = \color{green}{21}\color{black}{33} \quad Y = \color{green}{23}\color{black}{12} \qquad X \cdot Y = ?$$

$$\color{red}{ac} \color{black}{= ?} \quad \color{blue}{bd} \color{black}{= ?} \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2\color{green}{1} \quad \color{black}{Y = 2}\color{green}{3} \qquad \color{black}{X \cdot Y = ?}$$

$$\color{red}{ac} \color{black}{= 4} \quad \color{blue}{bd} \color{black}{= 3} \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = 483$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = 15$$

Exemplo

$$X = \color{green}{21}33 \quad Y = \color{green}{23}12 \qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$\color{red}{ac} = 483 \quad \color{blue}{bd} = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = \quad 2133 \quad Y = \quad 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$

$$ac = \quad 483 \quad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

$$X = \quad 33 \quad Y = \quad 12 \qquad\qquad X \cdot Y = \quad ?$$

$$ac = \quad ? \quad bd = \quad ? \qquad (a+b)(c+d) = \quad ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = 396$$

$$ac = 3 \quad bd = 6 \qquad (a+b)(c+d) = 18$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; 483 \quad bd = \; 396 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 54 \quad Y = \; 35 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ 483 \quad bd = \ 396 \quad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 54 \quad Y = \ 35 \qquad\qquad X \cdot Y = \ 1890$$

$$ac = \ 15 \quad bd = \ 20 \quad (a+b)(c+d) = \ 72$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

Exemplo

$$X = \color{green}{21}33 \quad Y = \color{green}{23}12 \qquad X \cdot Y = 4931496$$

$$\color{red}{ac} = 483 \quad \color{blue}{bd} = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA (X, Y, n)

se $n \le 3$ **devolva** $X \cdot Y$
$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
$A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\quad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
$C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\quad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
$E \leftarrow$ KARATSUBA$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
$F \leftarrow$ KARATSUBA$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
$G \leftarrow$ KARATSUBA$(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
$H \leftarrow G - F - E$
$R \leftarrow E \times 10^{n} + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
devolva R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$=$	$\Theta(n)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(5n + 2)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \\
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4
\end{aligned}
$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$
\begin{aligned}
T'(1) &= 1 \\
T'(n) &= 3T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

Recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(2) &= 1 \\
R(3) &= 1 \\
R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(2) &= 1 \\ R(3) &= 1 \\ R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Vamos mostra que $R(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.
Isto implica que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	$*$	$*$	$*$	7	63	119	237	324	473	5910

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	$*$	$*$	$*$	7	63	119	237	324	473	5910

Prova:

Se $n = 4$, então $R(n) = 7 = 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$.

Solução assintótica da recorrência

Prova: (continuação) Se $n \geq 5$ vale que

$$
\begin{aligned}
R(n) &= 3R(\lceil n/2 \rceil + 1) + n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 3(31(\lceil n/2 \rceil + 1 - 3)^{\lg 3} - 6(\lceil n/2 \rceil + 1)) + n \\
&\leq 3(31(\frac{(n+1)}{2} - 2)^{\lg 3} - 6(\frac{n}{2} + 1)) + n \\
&= 3(31(\frac{(n-3)}{2})^{\lg 3} - 3n - 6) + n \\
&= 3(31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{2^{\lg 3}} - 3n - 6) + n \\
&= 3 \cdot 31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{3} - 9n - 18 + n \\
&= 31(n-3)^{\lg 3} - 6n - 2n - 18 \\
&< 31(n-3)^{\lg 3} - 6n = \Theta(n^{\lg 3})
\end{aligned}
$$

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ ($1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância	$\Theta(n\,10^n)$
Ensino fundamental	$\Theta(n^2)$
Karatsuba e Ofman'60	$\mathrm{O}(n^{1.585})$
Toom e Cook'63	$\mathrm{O}(n^{1.465})$
(divisão e conquista; generaliza o acima)	
Schönhage e Strassen'71	$\mathrm{O}(n \lg n \lg \lg n)$
(FFT em aneis de tamanho específico)	
Fürer'07	$\mathrm{O}(n \lg n\, 2^{\mathrm{O}(\log^* n)})$

Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.005662	0.005815
8	0.010141	0.010600
16	0.020406	0.023643
32	0.051744	0.060335
64	0.155788	0.165563
128	0.532198	0.470810
256	1.941748	1.369863
512	7.352941	4.032258

Tempos em 10^3 segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

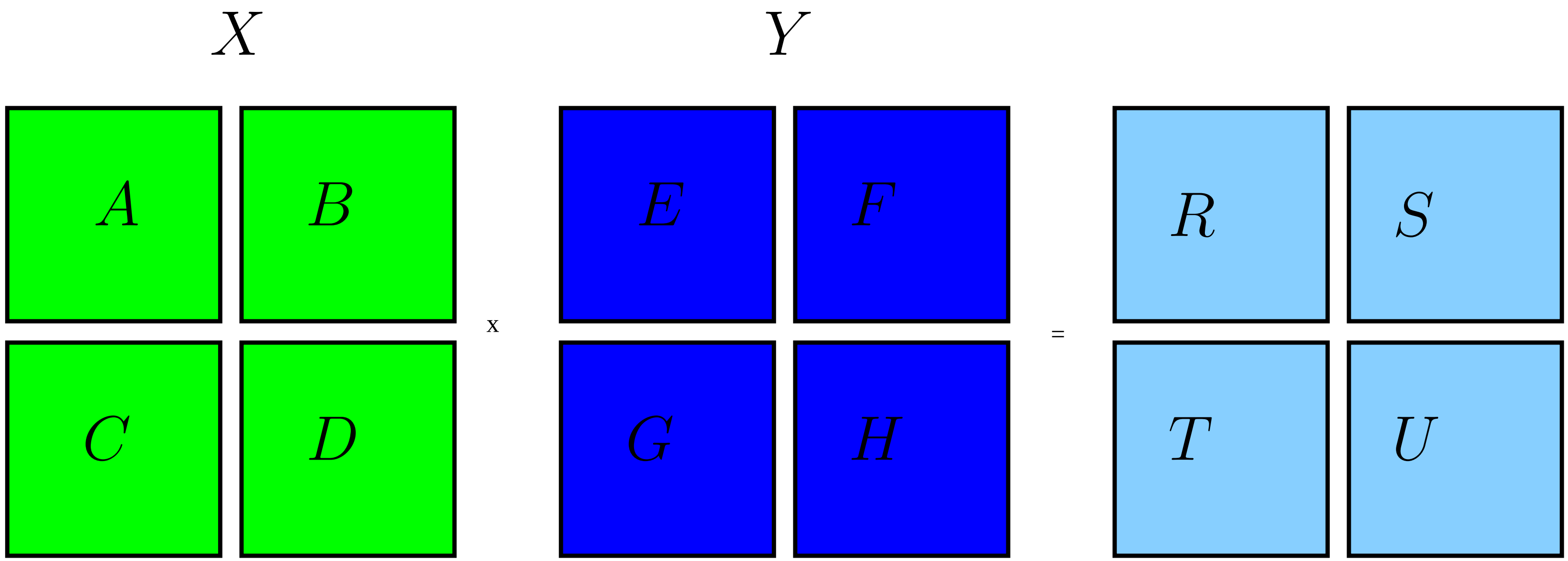
Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \tag{1}$$

Solução custa R$ 8,04

Divisão e conquista



$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

(2)

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M (X, Y, n)

se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
$R \leftarrow$ MULTI-M$(A, E, n/2) +$ MULTI-M$(B, G, n/2)$
$S \leftarrow$ MULTI-M$(A, F, n/2) +$ MULTI-M$(B, H, n/2)$
$T \leftarrow$ MULTI-M$(C, E, n/2) +$ MULTI-M$(D, G, n/2)$
$U \leftarrow$ MULTI-M$(C, F, n/2) +$ MULTI-M$(D, H, n/2)$
$P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)
devolva P

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(n^2)$
3	$=$	$\Theta(n^2)$
4	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
5	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
6	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
7	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
8	$=$	$\Theta(n^2)$
9	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$8\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	3348889[illegible]

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 8\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	12	105	112	865	876	945	960
$20\,(n-1)^3 - 2n^2$	-2	12	142	508	1230	2428	4222	6732

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Conclusão anterior$+$Exercício $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é
$\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd
\end{aligned}$$

(4)

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$p_1 = a(f-h) = af - ah$$

$$p_2 = (a+b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c+d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g-e) = dg - de$$

$$p_5 = (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$

$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$

$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$

$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n)

se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
$P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
$P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
$P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
$P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
$P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
$P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
$P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
$R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$S \leftarrow P_1 + P_2$
$T \leftarrow P_3 + P_4$
$U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
devolva $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2-3	$=$	$\Theta(n^2)$
4-10	$=$	$7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$=$	$\Theta(n^2)$
15	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$7\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 7\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2,3,4,\ldots \end{aligned}$$

Verifique por indução que $R(n) \le 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2,3,4\ldots$.

$2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	11	86	93	627	638	700	715
$19\,(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$	-1	11	115	327	881	1657	2790	4337

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ ($2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen	$\Theta(n^{2.81})$
...	...
Coppersmith e Winograd	$\Theta(n^{2.38})$